Exercice 1

Partie I - Etude d'une matrice carrée

1. a) • On a :

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-0 \\ 1-\frac{1}{2} & 0+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$$

• On a d'une part :

$$M + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et, d'autre part (*cf* point précédent) :

$$2M^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc, on a bien :

$$\boxed{2M^2 = M + I_2.}$$

b) • D'après la question précédente, on a : $2M^2 = M + I_2$, d'où :

$$2M^2 - M - I_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{le polynôme } P = 2X^2 - X - 1 \text{ est annulateur de la matrice } M.}$$

• D'après le point précédent, les valeurs propres de M sont parmi les racines du polynôme $P = 2X^2 - X - 1$. Ce polynôme est de discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

donc, il admet deux racines, qui sont données par :

$$\frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = 1.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } M \text{ sont } \frac{-1}{2} \text{ et } 1.}$$

c) • On a :

$$MU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U = 1.U$$

et :

$$MV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}.V$$

On a obtenu :

$$\boxed{MU = 1.U \text{ et } MV = \frac{-1}{2}.V.}$$

- D'après la question précédente 1 et $\frac{-1}{2}$ sont les seules valeurs propres possibles de M. Or, les égalités obtenues dans le point précédent et la non nullité des matices U et V permettent d'affirmer que 1 et $\frac{-1}{2}$ sont effectivement des valeurs propres de M (et que U est un vecteur propre pour M associé à la valeur propre 1 et V est un vecteur propre pour M associé à la valeur propre $\frac{-1}{2}$).
Donc :
$$\boxed{\text{les valeurs propres de } M \text{ sont } 1 \text{ et } \frac{-1}{2}.}$$

2. a) On a :
$$\det(P) = 3 \times 1 - 2 \times 0 = 3 \neq 0$$
donc : $\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible}}$ et :
$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.}$$
Remarque : on peut aussi justifier l'inversibilité de P en constatant que P est obtenue en juxtaposant deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes.

b) - On a d'une part :
$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
et, d'autre part :
$$PD = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
donc :
$$\boxed{MP = PD.}$$
Remarque : on a ici utilisé un argument calculatoire pour conclure, mais on aurait aussi pu conclure avec le cours vu la façon dont ont été construites les matrices P et D.

- D'après le point précédent, on a : $MP = PD$. Comme la matrice P est inversible et la matrice D est diagonale, on peut conclure que :
$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est diagonalisable.}}$$

3. a) Notons Q_n la propriété définie par : «$M^nP = PD^n$» et montrons par récurrence que Q_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Initialisation :
On a d'une part :
$$M^0P = I_2P = P$$
et d'autre part :
$$PD^0 = PI_2 = P$$
donc :
$$M^0P = PD^0$$
c'est-à-dire que Q_0 est vraie.
Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété Q_n est vraie et montrons que Q_{n+1} est vraie. On a :
$$\begin{aligned} M^{n+1}P &= MM^nP \\ &= MPD^n \quad \text{(car } Q_n \text{ est vraie)} \\ &= PDD^n \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= PD^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc Q_{n+1} est vraie (sous réserve que Q_n le soit).
Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, Q_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ M^nP = PD^n.}$$

b) Comme D est diagonale, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. D'après la question 3.a), on a :

$$\begin{aligned} M^nP = PD^n \quad &\text{d'où} \quad M^nPP^{-1} = PD^nP^{-1} \\ &\text{d'où} \quad M^nI = PD^nP^{-1} \\ &\text{d'où} \quad M^n = PD^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Avec la question précédente et la question 2.a), on en déduit :

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}$) :

$$\boxed{M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

Partie II - Etude d'un processus aléatoire

1. a)
- Le réel a_1 est la probabilité de l'événement «à l'issue du premier échange, l'urne U contient deux jetons 0». Cet événement se réalise si, et seulement si, on choisit le jeton 1 dans l'urne U -ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{2}$- et on choisit le jeton 0 dans l'urne V -ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{2}$-. L'indépendance des tirages dans les urnes U et V permet donc de conclure que l'on a :

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.}$$

- Le raisonnement est similaire pour l'obtention de c_1 : c_1 est la probabilité de l'événement «à l'issue du premier échange, l'urne U contient deux jetons 1». Cet événement se réalise si, et seulement si, on choisit le jeton 0 dans l'urne U -ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{2}$- et on choisit le jeton 1 dans l'urne V -ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{2}$-. Doù :

$$c_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Enfin, comme la famille (A_1, B_1, C_1) est un système complet d'événements, on a :

$$b_1 = 1 - a_1 - c_1 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4-1-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2} \text{ et } c_1 = \frac{1}{4}.}$$

Remarque : on peut aussi déterminer b_1 de la façon suivante : b_1 est la probabilité de l'événement «à l'issue du premier échange, l'urne U contient un jeton 0 et un jeton 1». Cet événement se réalise de deux façons exactement : on choisit le jeton 0 de l'urne U et le jeton 0 de l'urne V (ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) ou on choisit le jeton 1 de l'urne U et le jeton 1 de l'urne V (ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). L'incompatibilité de ces deux événements permet de conclure que l'on a : $b_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b) • Sachant que l'événement A_n est réalisé, c'est-à-dire sachant qu'à l'issue de n échanges, l'urne U contient deux jetons 0, il est certain qu'à l'issue de l'échange suivant, l'urne U contiendra un jeton 0 et un jeton 1 (car on va nécessairement choisir un jeton 0 de l'urne U et un jeton 1 de l'urne V). D'où :

$$\boxed{P_{A_n}(B_{n+1}) = 1.}$$

• Sachant que l'événement B_n est réalisé, c'est-à-dire sachant qu'à l'issue de n échanges, l'urne U contient un jeton 0 et un jeton 1, l'urne U contiendra un jeton 0 et un jeton 1 si, et seulement si, on choisit dans les urnes U et V des numéros égaux, ce qui se réalise avec probabilité $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ comme on l'a vu dans la remarque de la question précédente. D'où :

$$\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}.}$$

• Sachant que l'événement C_n est réalisé, c'est-à-dire sachant qu'à l'issue de n échanges, l'urne U contient deux jetons 1, il est certain qu'à l'issue de l'échange suivant, l'urne U contiendra un jeton 0 et un jeton 1. D'où :

$$\boxed{P_{C_n}(B_{n+1}) = 1.}$$

• La famille (A_n, B_n, C_n) est clairement un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
&= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= P(A_n) \times 1 + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times 1 \quad \text{(d'après les points précédents)} \\
&= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n.}$$

Remarque : en tout rigueur le cas $n = 0$ devrait être traité à part dans cette question car les événements A_0 et C_0 sont de probabilités nulles.

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, utilisée avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times 0 + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times 0 \quad (*) \\ &= \frac{1}{4} b_n. \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: sachant qu'à l'issue de n échanges, l'urne U contient deux jetons 0, il est impossible que l'urne U contienne, à l'issue de l'échange suivant, deux jetons 0; d'où : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$.
Sachant qu'à l'issue de n échanges, l'urne U contient un 0 et un jeton 1, l'urne U contiendra, à l'issue de l'échange suivant, deux jetons 0 si, et seulement si, on choisit le jeton 1 de l'urne U et le jeton 0 de l'urne V, d'où : $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Sachant qu'à l'issue de n échanges, l'urne U contient deux jetons 1, il est impossible que l'urne U contienne, à l'issue de l'échange suivant, deux jetons 0; d'où : $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$.

On obtient aussi (toujours avec la formule des probabilités totales et le même système complet d'événements) :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times 0 + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times 0 \quad \text{(justifications similaires aux précédentes)} \\ &= \frac{1}{4} b_n. \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}$) :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n.}$$

Remarque : là encore, en tout rigueur, on aurait du traiter le cas $n = 0$ à part.

2. a) Comme la famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, on a :

$$\boxed{a_n + b_n + c_n = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \quad \text{(d'après la question 1.b))} \\ &= \frac{1}{2} b_n + a_n + c_n \\ &= \frac{1}{2} b_n + (1 - b_n) \quad \text{(car, d'après la question précédente, } a_n + b_n + c_n = 1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 1 \right) b_n + 1 \\ &= -\frac{1}{2} b_n + 1. \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}$) :

$$\boxed{b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} b_n.}$$

3. a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} MX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{2} b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}$) :

$$\boxed{X_{n+1} = MX_n.}$$

b) Notons P_n la propriété définie par : « $X_n = M^n X_0$ » et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Initialisation :
On a :

$$M^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned} M^{n+1} X_0 &= M M^n X_0 \\ &= MX_n \quad \text{(car } P_n \text{ est vraie)} \\ &= X_{n+1} \quad \text{(d'après la question précédente).} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie (lorsque P_n l'est).

Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ X_n = M^n X_0.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} X_n &= M^n X_0 \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question 3.c))} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 + 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}$ d'où :

$$\boxed{b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).}$$

d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a, d'après la question 1.c), $a_{n+1} = \dfrac{1}{4} b_n$.
D'où, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{1}{4} b_{n-1}$$

c'est-à-dire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a (*cf* question précédente) :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{4} b_{n-1} \\
&= \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} + \left(\frac{-1}{6}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right).
\end{aligned}$$

Comme :

$$\frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{0}\right) = \frac{1}{6}(1-1) = 0 = a_0$$

on peut conclure que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } a_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right).}$$

Le même raisonnement permet de conclure que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } c_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right).}$$

Exercice 2

1. a) • Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + 1.}$$

• D'après le point précédent, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\mathrm{e}^x (1+\mathrm{e}^x)^2 - (-\mathrm{e}^x)(2\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x))}{\left((1+\mathrm{e}^x)^2\right)^2} + 0 \\ &= \frac{-\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2 + 2\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)(-(1+\mathrm{e}^x)+2\,\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(-1-\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(-1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout x de $\mathbb{R}$) :

$$\boxed{f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}.}$$

Remarque : l'énoncé sous-entend que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est la raison pour laquelle nous n'avons pas justifié cette dérivabilité, mais il n'est pas difficile de le faire : la fonction $x \longmapsto 1+\mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus, elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont. La dérivabilité de f' s'obtient de façon similaire.

b) • Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a (par stricte croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$) les équivalences :

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff \ln(\mathrm{e}^x) > \ln(1) \iff x > 0$$

et les équivalences :

$$\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff \ln(\mathrm{e}^x) = \ln(1) \iff x = 0.$$

Avec la question précédente, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$(1+\mathrm{e}^x)^3$		$+$	$\vert$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc :

$$\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty,0] \text{ et convexe sur } [0,+\infty[.}$$

• D'après le point précédent, il existe un unique réel en lequel la fonction f'' s'annule en changeant de signe : 0.
Comme :

$$f(0) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^0} + 0 = \frac{1}{2}$$

on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ admet un (unique) point d'inflexion qui est le point de coordonnées } \left(0, \frac{1}{2}\right).}$$

c) • D'après la question précéedente, on a le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

Détail (*cf* question 1.a) pour l'expression de f') :

$$\boxed{f'(0) = \frac{-\mathrm{e}^0}{(1+\mathrm{e}^0)^2} + 1 = \frac{-1}{2^2} + 1 = \frac{-1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}.}$$

Remarque : c'est la démarche usuelle : on a obtenu les variations de f' à partir du signe de sa dérivée, c'est-à-dire à partir du signe de f''.

• Avec le tableau précédent, on obtient le signe de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$\searrow$	$\underbrace{\frac{3}{4}}_{>0}$	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	

c'est-à-dire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) > 0$. Ce constat permet de conclure que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

2. a) • On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.}$$

• On a $\lim_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où (par inverse) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = 0$$

et comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on obtient (par somme) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + x = +\infty.}$$

• On a $\lim_{x\to-\infty} 1 + \mathrm{e}^x = 1$, d'où (par inverse) :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = 1$$

et comme $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, on obtient (par somme) :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + x = -\infty.}$$

b) Avec la question précédente et la question 1.c), on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. a) • On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + x - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

avec ce que l'on a vu dans la question 2.a), on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0.}$$

• Le point précédent permet directement de conclure que :

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote (oblique) à } (C) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

b) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + x - x - 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - 1.$$

Or (*cf* question 2.a)), on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = 1$ donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - 1 = 0.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x+1 \text{ est bien asymptote (oblique) à } (C) \text{ au voisinage de } -\infty.}$$

c) Une équation de (T) est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

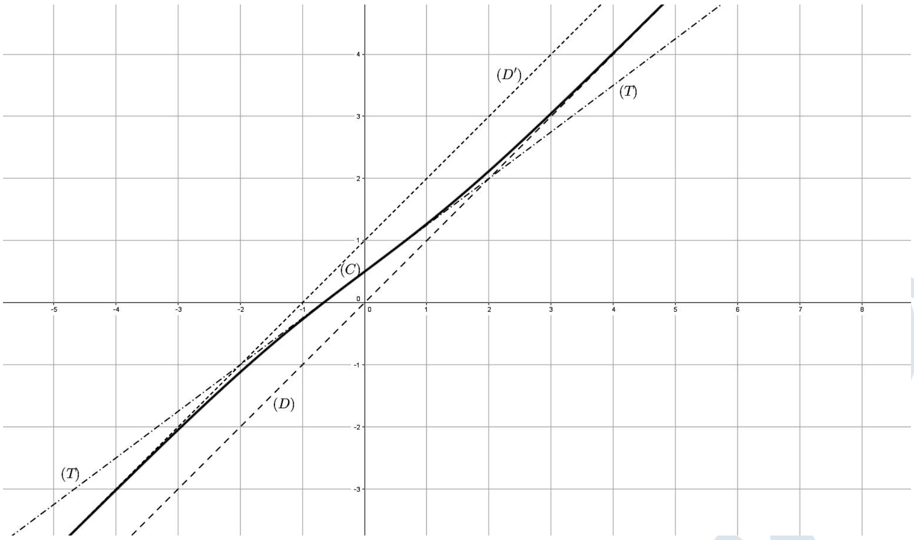
Or (*cf* questions 1.b) et 1.c)), on a :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{3}{4}$$

donc :

$$\boxed{\text{une équation de } (T) \text{ est : } y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.}$$

d) Les droites (D), (D'), (T) et la courbe (C) ont l'allure suivante :



Remarque : dans cette question, il convient de :

- tenir compte des variations de f,
- tenir compte du fait que la droite (T) est tangente à (C) en son point d'abscisse 0,
- tenir compte du fait que la droite (D) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$,
- tenir compte du fait que la droite (D') est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$,
- tenir compte du fait que f est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$,
- bien construire les droites (D), (D') et (T).

4. a) La fonction f est, sur $\mathbb{R}$, continue (car dérivable) et strictement croissante d'après la question 2)b). Avec le théorème de la bijection, on en déduit que f réalise une bijection de f sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ c'est-à-dire sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (*cf* question 1.c)).
On en déduit que tout élément de $\mathbb{R}$ admet exactement un antécédent par f dans $\mathbb{R}$, en particulier :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0, \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}, \text{ admet une unique solution.}}$$

b) On a :

$$f(-1) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}} - 1 = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}} - \frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}} = \frac{1-\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)}{1+\mathrm{e}^{-1}} = \frac{-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}} \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$f(-1) < 0 < f(0)$$

ce qui se réécrit :

$$f(-1) < f(\alpha) < f(0).$$

La stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$ permet d'en déduire :

$$-1 < \alpha < 0.$$

A fortiori, on a :

$$\boxed{-1 \leq \alpha \leq 0.}$$

Remarques : d'autres méthodes permettent de conclure :

- On peut appliquer le théorème de la bijection sur $[-1, 0]$ et ainsi obtenir que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in [-1, 0]$, admet exactement une solution, solution qui est nécessairement égale à α puisque l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

- On peut utiliser les variations de f pour obtenir : pour tout x de $]-\infty,-1[$, $f(x) < \dfrac{-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}} < 0$ et, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x) > \dfrac{1}{2} > 0$. Ceci permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty,-1[$ ni dans $]0,+\infty[$ donc, son unique solution appartient à $[-1,0]$.

c) On peut compléter le programme de la façon suivante :

```
function y=f(x)
      y=1/(1+exp(x))+x
endfunction
a=-1, b=0
while b-a>10^-3
      c=(a+b)/2
      if f(c)*f(a)<0 then
          b=c
      else
          a=c
      end
end
disp(c)
```

Exercice 3

1. a) Comme l'urne contient initialement trois boules dont une bleue et deux rouges (et que le tirage de la boule se fait au hasard), on a :

$$\boxed{P(B_1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(R_1) = \frac{2}{3}.}$$

b) Il est clair que la famille (B_1, R_1) est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{3} \times P_{B_1}(B_2) + \frac{2}{3} \times P_{R_1}(B_2) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad (*) \\ &= \frac{1+4}{9} \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: sachant qu'une boule bleue a été tirée lors de la première séquence, l'urne contient, au moment du deuxième tirage, une boule bleue et deux boules rouges. D'où : $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$

Sachant qu'une boule rouge a été tirée lors de la première séquence, l'urne contient, au moment du deuxième tirage, deux boules bleues et une boule rouge. D'où : $P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3}$.

Avec la formule des probabilités totales et le même système complet, on obtient aussi :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \\ &= \frac{1}{3} \times P_{B_1}(R_2) + \frac{2}{3} \times P_{R_1}(R_2) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \quad \text{(justifications similaires aux précédentes)} \\ &= \frac{2+2}{9} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{P(B_2) = \frac{5}{9} \text{ et } P(R_2) = \frac{4}{9}.}$$

c) On cherche à déterminer $P_{B_2}(R_1)$. On a :

$$\begin{aligned} P_{B_2}(R_1) &= \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \quad \text{(par définition)} \\ &= \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(B_2)}{P(B_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} \quad (\textit{cf} \text{ questions préédentes}) \\ &= \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{9}{5} \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{en constatant, à l'issue de la deuxième séquence, que la boule tirée est bleue, la probabilité que}}$$

$$\boxed{\text{le premier tirage ait amené une boule rouge est égale à } \frac{4}{5}.}$$

Remarque : on aurait pu plus directement appliquer la formule de Bayes. On l'a ici réétablie dans le cas particulier considéré.

2. a) Au premier tirage on peut soit :
   - Tirer une boule rouge, auquel cas -*cf* protocole de l'expérience aléatoire-, au moment du deuxième tirage, l'urne contient une boule rouge (et deux boules bleues).
   - Tirer une boule bleue, auquel cas, au moment du deuxième tirage, l'urne contient deux boules rouges (et une boule bleue).

   Donc :

$$\boxed{Y_1(\Omega) = \{1, 2\}.}$$

   b) - L'événement $[Y_1 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire une boule rouge au premier tirage. D'où (*cf* question 1.a)) :

$$\boxed{P(Y_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3}.}$$

   - L'événement $[Y_1 = 2]$ est réalisé si, et seulement si, on tire une boule bleue au premier tirage. D'où (*cf* question 1.a)) :

$$\boxed{P(Y_1 = 1) = P(B_1) = \frac{1}{3}.}$$

   c) D'après les deux questions précédentes, la loi de Y_1 est donnée par le tableau suivant.

k	1	2
$P(Y_1 = k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

   On en déduit que Y_1 admet une espérance (Y_1 est finie) donnée par :

$$\boxed{E(Y_1) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.}$$

3. a) D'après la question 2)a), à l'issue de la première séquence l'urne contient une ou deux boules rouges (et trois boules en tout). Distinguons deux cas :
   - Dans le cas où on tire une boule rouge lors de la deuxième séquence, le nombre de boules rouges diminue d'une unité (et le nombre de boules bleues augmente d'une unité) et on a alors zéro ou une boule rouge dans l'urne à l'issue de cette séquence, selon que l'on en avait une ou deux juste avant ce tirage.
   - Dans le cas où on tire une boule bleue lors de la deuxième séquence, la composition de l'urne reste la même et on a alors une ou deux boules rouges dans l'urne à l'issue de cette séquence, selon que l'on en avait une ou deux juste avant ce tirage.

   D'où :

$$\boxed{Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}.}$$

b) L'événement $[Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]$ est l'événement : à l'issue de la première séquence, l'urne contient 2 boules rouges et à l'issue de la deuxième séquence, l'urne contient de nouveau 2 boules rouges.
Cet événement est donc celui pour lequel le nombre initial de boules rouges n'évolue pas lors des deux premières séquences, donc se réalise si, et seulement si, on tire aux deux premiers tirages des boules bleues.
D'où : $[Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2] = B_1 \cap B_2$ et donc :

$$P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]) = P(B_1 \cap B_2).$$

Avec la formule des probabilités composées et ce que l'on a vu dans la question 1.b), on en déduit :

$$P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{9}.}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 0]) &= P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \\
P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) &= P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\
P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]) &= P(\varnothing) = 0 \\
P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 0]) &= P(\varnothing) = 0 \\
P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]) &= P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Avec la question précédente, on en déduit que la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) est effectivement donnée par le tableau suivant :

$i \in Y_1(\Omega)$ \ $j \in Y_2(\Omega)$	0	1	2
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

4. a) • Comme $Y_1(\Omega) = \{1, 2\}$, la famille $([Y_1 = 1], [Y_1 = 2])$ est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales et la question précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned}
P(Y_2 = 0) &= P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 0]) + P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 0]) = \frac{2}{9} + 0 = \frac{2}{9} \\
P(Y_2 = 1) &= P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) + P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \\
P(Y_2 = 2) &= P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]) + P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]) = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

La loi de Y_2 est donc donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Y_2 = k)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{9}$

Remarque : on obtient de façon analogue la loi de Y_1 à partir de la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2). Ceci permet de vérifier que le résultat obtenu dans la question 2.a) est bien correct.

- On déduit du point précédent que Y_2 admet une espérance donnée par :

$$\boxed{E(Y_2) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{6}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{0+6+2}{9} = \frac{8}{9}.}$$

b) D'après la question 3.c), on a :

$$\begin{aligned} E(Y_1 Y_2) &= 1 \times 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times 1 \times \frac{4}{9} + 1 \times 2 \times 0 + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times 2 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{0+4+0+0+4+4}{9} \\ &= \frac{12}{9} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{E(Y_1 Y_2) = \frac{4}{3}.}$$

c)
- D'après la formule de Huygens et les questions 2.c), 4.a) et 4.b), on a :

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1) E(Y_2) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{36}{27} - \frac{32}{27} = \frac{4}{27}.$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = \frac{4}{27}.}$$

- D'après le point précédent, la covariance du couple (Y_1, Y_2) est non nulle. Donc :

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

5. (a) On peut compléter le programme de la façon suivante :

```
1. n=input('n?')
2. r=2
3. for k=1:n
4.       if r==2 then
5.             if rand()<2/3 then r=1
6.             end
7.       else
8.          if r==1 then
9.               if rand()<1/3 then r=0
10.              end
11.         end
12.      end
13. end
14. disp(r)
```

Remarque : rappelons que la condition `if rand()<1/3` se réalise avec probabilité $\frac{1}{3}$ (probabilité qui est bien égale à la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant une boule rouge et deux boules bleues -et ainsi amener le nombre de boule rouge à diminuer d'une unité-).

(b) Dans le cas $n = 2$, on simule deux fois la séquence. Comme la valeur affichée est celle du nombre de boules rouges présentes dans l'urne après n séquences, on en déduit que :

$\boxed{\text{le nombre affiché lorsque l'utilisateur donne 2 comme valeur à } n \text{ est celle prise par la variable aléatoire } Y_2.}$

(c) $\boxed{\text{Il n'est pas nécessaire que le cas } \texttt{r==0} \text{ apparaisse car dans cette situation, le nombre de boules rouges}}$
$\boxed{\text{présentes dans l'urne n'évolue plus, il reste égale à 0.}}$

Exercice 4

1. a) On a :

$$\int_a^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_a^x = \frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \left(\frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2a}\right) = \frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a} = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2a}\right).$$

Donc on a bien (pour tout x de $[a, +\infty[$) :

$$\boxed{\int_a^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2a} - \mathrm{e}^{-2x}\right).}$$

b) D'après la question précédente, on a, pour tout réel x de $[a, +\infty[$:

$$\int_a^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2a} - \mathrm{e}^{-2x}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et comme $\lim\limits_{z\to-\infty} \mathrm{e}^{z} = 0$, on obtient, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2a} - \mathrm{e}^{-2x}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a}.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et que l'on a : } \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a}.}$$

2.
- Pour tout t de $]-\infty, a[$, $f(t) = 0 \geq 0$ et, pour tout t de $[a, +\infty[$, $f(t) = 2\,\mathrm{e}^{2a}\mathrm{e}^{-2t} > 0$ (en tant que produit de réels strictement positifs).
  Donc, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a $(*)$.
- L'intégale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-\infty, a[$. De plus, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{2a}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit que l'intégale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que l'on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{2a}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{2a}\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{2a}\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2a} = \mathrm{e}^{2a-2a} = \mathrm{e}^{0} = 1.$$

Par conséquent, l'intégale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est bien une densité.}}$$

Détail de $(*)$: la fonction $t \longmapsto -2t$ est continue sur $]a, +\infty[$ (car polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}$, ensemble sur lequel la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ est continue, donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est continue sur $]a, +\infty[$. Comme la fonction $t \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{2a}$ est continue sur $]a, +\infty[$ (car constante), f est continue sur $]a, +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

La continuité de f sur $]-\infty, a[$ est claire car f est constante sur $]-\infty, a[$.

3. a) Soit x un réel tel que $x < a$. Comme f est nulle sur $]-\infty, a[$, f est nulle sur $]-\infty, x]$, d'où :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On a bien obtenu (pour tout x de $]-\infty, a[$) :

$$\boxed{F(x) = 0.}$$

b) Soit x un réel tel que $x \geq a$. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} 2\,\mathrm{e}^{2a}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + 2\,\mathrm{e}^{2a}\int_{a}^{x} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= 2\,\mathrm{e}^{2a}\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2a} - \mathrm{e}^{-2x}\right) \quad \text{(d'après la question 1.a))} \\
&= \mathrm{e}^{-2a+2a} - \mathrm{e}^{-2x+2a} \\
&= \mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-2(x-a)} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2(x-a)}.
\end{aligned}$$

On a obtenu, pour tout x de $[a, +\infty[$:

$$\boxed{F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2(x-a)}.}$$

Remarque : on a finalement, pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 - \mathrm{e}^{-2(x-a)} & \text{si} \quad a \leq x \end{cases}$.

4. a) Pour tout réel x, on a :

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(X - a \leq x) = P(X \leq x + a) = F(x + a).$$

On a bien obtenu (pour tout réel x) :

$$\boxed{G(x) = F(x + a).}$$

b) Soit x un réel. Distinguons deux cas.

- Cas $x < 0$. On a alors $x + a < a$, d'où (*cf* questions 4.a) et 3.a)) :

$$G(x) = F(x + a) = 0.$$

- Cas $x \geq 0$. On a alors $x + a \geq a$, d'où (*cf* questions 4.a) et 3.b)) :

$$G(x) = F(x + a) = 1 - \mathrm{e}^{-2(x+a-a)} = 1 - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On a bien obtenu (pour tout x de $\mathbb{R}$) :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.}$$

c) - D'après la question précédente, la fonction de répartition de Y coïncide avec la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 2, donc :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 2.}}$$

- D'après le point précédent, Y admet une espérance et une variance, données par :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{2} \text{ et } V(Y) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.}$$

d) Par définition : $Y = X - a$, d'où :

$$X = Y + a.$$

Comme Y admet une espérance, on en déduit que X admet une espérance, qui est donnée par (*cf* question précédente) :

$$E(X) = E(Y + a) = E(Y) + a = \frac{1}{2} + a.$$

Comme Y admet une variance, on en déduit aussi que X admet une variance, qui est donnée par :

$$V(X) = V(Y + a) = 1^2 V(Y) = \frac{1}{4}.$$

Finalement :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance, qui sont bien données par : } E(X) = \frac{1}{2} + a \text{ et } V(X) = \frac{1}{4}.}$$

5. a) - Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, X_k admet une espérance, donnée par : $E(X_k) = E(X) = \frac{1}{2} + a$ (*cf* question précédente). On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance, donc Z_n admet une espérance. De plus, par linéarité de l'espérance, celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned}
E(Z_n) &= E\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + a\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\left(n \times \left(\frac{1}{2} + a\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a \\
&= a.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{E(Z_n) = a.}$$

- D'après le point précédent, Z_n admet une espérance, donnée par : $E(Z_n) = a$. Donc :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$$

b) - Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, X_k admet une variance, donnée par : $V(X_k) = V(X) = \frac{1}{4}$ (*cf* question 4.d)). On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance, donc Z_n admet une variance. De plus, celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= V\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= V\left(\frac{1}{n}E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right) \quad (\ll V(b+aT)=V(aT)\ \left(=a^2V(T)\right)\gg) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \quad (\ll V(aT)=a^2V(T)\gg) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \quad (\text{par indépendance de } X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\times\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

On a en effet obtenu :

$$\boxed{V(Z_n)=\frac{1}{4n}.}$$

- D'après la question précédente, Z_n est un estimateur sans biais de a. Donc son risque quadratique (en tant qu'estimateur de a) est égal à sa variance. Avec le point précédent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le risque quadratique de } Z_n \text{ est donné par : } r(Z_n)=\frac{1}{4n}.}$$

c) La valeur prise par Z_{1000} est une ≪bonne≫ estimation de a d'après les questions 5.a) et 5.b). Donc :

$\boxed{\text{l'instruction } \texttt{-1/2+mean(X)} \text{ convient.}}$