EXERCICE 1

PARTIE A : Calcul matriciel et suites

1. (a) On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+0 & 1-1+0 & 1-1-0 \\ 1-2+1 & 1+1+1 & 1+1-2 \\ 1+0-1 & 1-0-1 & 1-0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

On a obtenu :

$$\boxed{PQ = 3I.}$$

(b) On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} PQ = 3I \quad & \text{d'où} \quad \frac{1}{3}PQ = \frac{1}{3}(3I) \\ & \text{d'où} \quad P\left(\frac{1}{3}Q\right) = I. \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

2. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} MX_n &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2a_n + b_n + c_n) \\ \frac{1}{4}(a_n + 2b_n + c_n) \\ \frac{1}{4}(a_n + b_n + 2c_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \quad (cf \text{ définition des suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n.}$$

(b) Notons P_n la propriété définie par : «$X_n = M^n X_0$» et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Initialisation :
On a :

$$M^0X_0 = IX_0 = X_0$$

c'est-à-dire que P_0 est vraie.
Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
On a :

$$\begin{array}{rcl} M^{n+1}X_0 & = & MM^nX_0 \\ & = & MX_n \quad \text{(car } P_n \text{ est vraie)} \\ & = & X_{n+1} \quad \text{(d'après la question précédente).} \end{array}$$

Donc P_{n+1} est vraie (sous réserve que P_n le soit).
Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ X_n = M^nX_0.}$$

3. (a) On a :

$$\begin{array}{rcl} (4M-I)(4M-4I) & = & \left(4.\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(4.\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On a en effet obtenu que :

$$\boxed{(4M-I)(4M-4I) \text{ est égale à la matrice nulle.}}$$

(b) D'après la question précédente, le polynôme $P = (4X-1)(4X-4)$ est annulateur de la matrice M. Les valeurs propres de M sont donc parmi les racines de ce polynôme.
Or, pour tout réel x, on a les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} P(x) = 0 & \iff & (4x-1)(4x-4) = 0 \\ & \iff & 4x-1 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x-4 = 0 \\ & \iff & x = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x = 1. \end{array}$$

Donc les racines de P sont $\frac{1}{4}$ et 1; ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } M \text{ sont } \frac{1}{4} \text{ et } 1.}$$

4. (a) Remarquons que l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M = PDP^{-1} &\iff P^{-1}M = P^{-1}PDP^{-1}\\
&\iff P^{-1}M = IDP^{-1}\\
&\iff P^{-1}MP = DP^{-1}P\\
&\iff P^{-1}MP = DI\\
&\iff P^{-1}MP = D.
\end{aligned}$$

Avec la question 1.(b), on en déduit :

$$\begin{aligned}
D &= P^{-1}MP\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ qui est bien une matrice diagonale.}}$$

Remarque : on a $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(D)$, donc les éléments diagonaux de la matrice D obtenus sont bien cohérents avec le résultat obtenu dans la question précédente.

(b) On a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}.}$$

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
M^n &= PD^nP^{-1} \quad \text{(d'après la question précédente)}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(car } D \text{ est diagonale)}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & -\left(\frac{1}{4}\right)^n\\ \left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n & -2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-2\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

On a bien obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

(d) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. D'après la question 2.(b), on a :

$$\begin{aligned} X_n &= M^n X_0 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ d'où :

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right), \; b_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \; \text{ et } \; c_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Comme $\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1^n}{4^n} = \frac{1}{4^n}$, on peut conclure que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right), \; b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).}$$

(e) Comme $1 < 4$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty.$$

Avec la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) = \frac{1}{3}, \; \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}.}$$

5. On peut compléter le script Scilab de la façon suivante :

```
n=0
a=1 ; b=0
while a> 0.334 & b<0.333
     n = n+1
     a = 1/3*(1+2/4^n)
     b = 1/3*(1-1/4^n)
end
disp(n)
```

Remarque : la question précédente assure l'existence d'un entier n tel que $a_n \leq 0,334$ et $b_n \geq 0,333$ (car $\frac{1}{3} < 0,334$ et $\frac{1}{3} > 0,333$).

PARTIE B : Application à un jeu de hasard

1. On a :

$$\boxed{P(A_0) = 1,\ P(B_0) = 0 \text{ et } P(C_0) = 0}$$

et :

$$\boxed{P(A_1) = \frac{2}{4},\ P(B_0) = \frac{1}{4} \text{ et } P(C_0) = \frac{1}{4}.}$$

Remarque : les valeurs de $P(A_0)$, $P(B_0)$ et $P(C_0)$ sont immédiates. Détaillons l'obtention de $P(B_1)$. L'événement B_1 est l'événement «à l'issue du premier coup, le pion est sur la case 1», événement qui se réalise si, et seulement si, le pion avance de 1 case puisqu'au début du jeu le pion est sur la case 0. On en déduit, par équiprobabilité du tirage du chiffre dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, que l'on a : $P(B_1) = \frac{1}{4}$.

2. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

   - La probabilité $P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité, sachant que l'événement A_n est réalisé, c'est-à-dire sachant qu'à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup le pion est sur la case 0, que le pion soit de nouveau sur la case 0 au $(n+1)^{\text{ième}}$ coup. Or, sachant qu'à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup le pion est sur la case 0, la probabilité qu'il soit de nouveau sur la case 0 au coup suivant est celle que le pion avance de 0 case ou de 3 cases. On en déduit, par équiprobabilité du tirage du chiffre dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, que l'on a :

$$\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.}$$

   - On justifie de façon similaire que l'on a :

$$\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}.}$$

   Remarque : on a aussi : $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$, $P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$, $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

   (b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
   La famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{4} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n). \end{aligned}$$

La formule des probabilités totales, utilisée avec le même système complet, permet aussi d'obtenir :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n)\times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)\times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n)\times \frac{1}{4} + P(B_n)\times\frac{1}{2} + P(C_n)\times\frac{1}{4} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n) \end{aligned}$$

et encore :

$$\begin{aligned} P(C_{n+1}) &= P(A_n)\times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)\times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)\times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= P(A_n)\times \frac{1}{4} + P(B_n)\times\frac{1}{4} + P(C_n)\times\frac{1}{2} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{2}P(C_n). \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que l'on a (*cf* question 1.) :

$$\frac{1}{2}P(A_0)+\frac{1}{4}P(B_0)+\frac{1}{4}P(C_0) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 = \frac{1}{2} = P(A_1)$$

$$\frac{1}{4}P(A_0)+\frac{1}{2}P(B_0)+\frac{1}{4}P(C_0) = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 = \frac{1}{4} = P(B_1)$$

et :

$$\frac{1}{4}P(A_0)+\frac{1}{4}P(B_0)+\frac{1}{2}P(C_0) = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{4} = P(C_1)$$

donc les trois égalités précédentes sont encore valables dans le cas $n = 0$.
On peut donc finalement conclure que l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n)+\frac{1}{4}P(B_n)+\frac{1}{4}P(C_n),\ P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n)+\frac{1}{2}P(B_n)+\frac{1}{4}P(C_n) \text{ et}}$$

$$\boxed{P(C_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n)+\frac{1}{4}P(B_n)+\frac{1}{2}P(C_n).}$$

Remarque : en toute rigueur, il convient de traiter le cas $n = 0$ à part pour s'assurer que les événements A_n, B_n et C_n sont bien tous de probabilités non nulles.

(c) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}.$$

Remarquons que les suites $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les mêmes propriétés : d'après la question 1.(a) pour les termes initiaux et d'après la question précédente pour les relations de récurrence.
On en déduit $(*)$ que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{P(A_n) = a_n,\ P(B_n) = b_n \text{ et } P(C_n) = c_n.}$$

Remarque : le lecteur sceptique pourra «officialiser» $(*)$ à l'aide d'une récurrence (en introduisant la propriété P_n : «$a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$»).

3. Le résultat de la question 4.(e) peut être interprété de la façon suivante :

$\boxed{\text{plus le nombre de coups augmente, plus il est équiprobable que la puce occupe la case 0, la case 1 ou la case 2.}}$

EXERCICE 2

1. (a) • D'abord, comme f n'est définie qu'à droite de -1, on a :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x\ln(1+x).$$

Or, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1+x = 0$ par valeurs positives et $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z > 0}} \ln(z) = -\infty$ donc, par composition :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \ln(1+x) = -\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x = -1$, donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty.}$$

• D'après le point précédent :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.}}$$

(b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} \ln(z) = +\infty$ donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+x) = +\infty.}$$

(c) D'après la question précédente, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Déterminons maintenant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
Pour tout x de $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x).$$

Avec ce que l'on a vu dans la question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Donc :

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées (au voisinage de } +\infty).}$$

2. (a) Pour tout x de $]-1,+\infty[$, on a :

$$\boxed{f'(x) = 1\times\ln(1+x) + x\times\frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.}$$

(b) D'après la question précédente, on a, pour tout x de $]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

D'où, pour tout x de $]-1,+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1\times(1+x) - x\times 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{(1+x)^2} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}.$$

On a bien obtenu, pour tout x de $]-1,+\infty[$:

$$\boxed{f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}.}$$

(c) D'après la question précédente, on a, pour tout x de $]-1,+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

Or, pour tout x de $]-1,+\infty[$, $x > -1$ donc $x+2 > 1$. D'où, pour tout x de $]-1,+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{\overbrace{x+2}^{>0}}{\underbrace{(1+x)^2}_{>0}} > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est strictement croissante sur l'intervalle }]-1,+\infty[.}$$

Remarque : c'est la démarche usuelle : pour obtenir les variations de f', on a étudié le signe de sa dérivée, c'est-à-dire le signe de f''.

3. (a) • On a (*cf* question 2.(a)) :

$$\boxed{f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = \ln(1) = 0.}$$

• Avec la question précédente, on en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

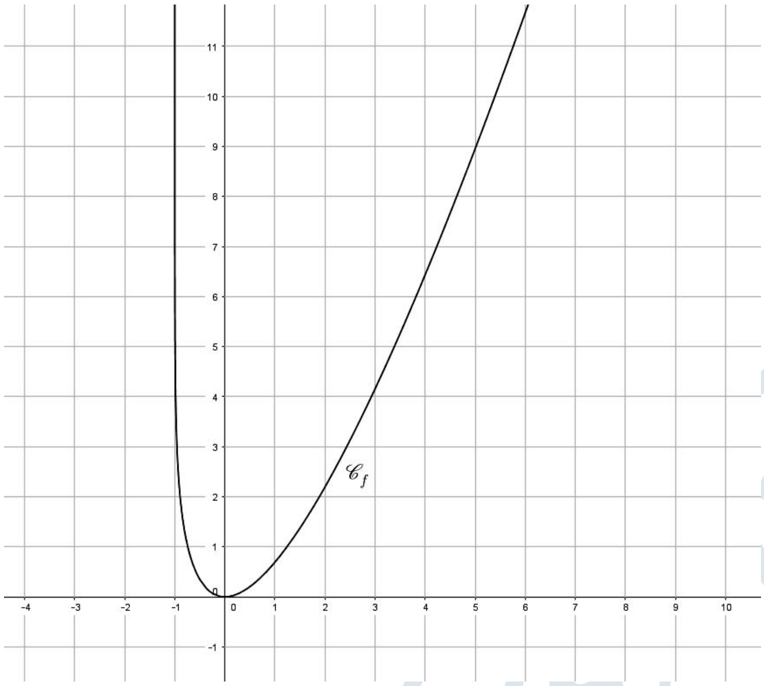
(b) D'après la question précédente (et les questions 1.(a) et 1.(b) pour les limites) on a le tableau de signes et de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Détail :

$$f(0) = 0.\ln(1+0) = 0.$$

4. L'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan est la suivante :



Remarque : dans cette question, il convient de tenir compte :

- des variations de f obtenues (et du fait que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0 est horizontale).
- de la valeur de $f(0)$.
- de la limite de f en -1.
- du fait que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

(on peut même aussi tenir compte du fait que f est convexe (*cf* question 2.(c)) dans laquelle on a obtenu, pour tout x de $]-1,+\infty[$, $f''(x) > 0$)

5. (a) On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad (*) \\
&= \frac{1^2.\ln(2)}{2} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par intégration par parties (les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$).

On a bien obtenu :

$$\boxed{I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x.}$$

(b) Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} x-1+\frac{1}{x+1} &= \frac{x(x+1)}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x^2+x-(x+1)+1}{x+1} \\ &= \frac{x^2+x-x-1+1}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{x+1}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu que l'on a :

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0,1],\ \frac{x^2}{x^2+1}=x-1+\frac{1}{x+1}.}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x-\int_0^1 1\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-[x]_0^1+[\ln(x+1)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}-0-(1-0)+\ln(2)-\ln(1) \\ &= \frac{1}{2}-1+\ln(2) \\ &= -\frac{1}{2}+\ln(2). \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\ln(2)-\frac{1}{2}.}$$

(d) D'après la question 5.(a), on a :

$$I=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Avec la question précédente, on en déduit :

$$I=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{I=\frac{1}{4}.}$$

6. On peut compléter le script Scilab de la façon suivante :

```
function y=f(x)
    y=x^n*log(1+x)
endfunction
for n = 1:50
    x=linspace(0,1,100)
    fplot2d(x,f)
end
```

Remarque : avec ce programme on obtient les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, …, f_{50} et pas seulement les courbes représentatives des fonctions f_1, f_5, f_{10}, f_{20} et f_{50}.

7. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{I_n \text{ est l'aire du domaine délimité par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe}}$$

$$\boxed{\text{représentative de } f_n \text{ et la droite d'équation } x = 1.}$$

(b) Avec le graphique fourni on peut conjecturer que l'on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

8. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{array}{lll} 0 \leq x \leq 1 & \text{d'où} & 1 \leq 1 + x \leq 2 \\ & \text{d'où} & \ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2) \quad \text{(par croissance de la fonction ln sur } [1,2]) \\ & \text{d'où} & 0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2) \\ & \text{d'où} & 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2) \quad (\text{car } x^n \geq 0). \end{array}$$

On a bien :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Avec le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\int_0^1 0 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, \mathrm{d}x.$$

D'où :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, \mathrm{d}x.$$

Or :

$$\int_0^1 x^n \ln(2) \, \mathrm{d}x = \ln(2) \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \ln(2) \left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.}$$

(c) On a :

$$\lim_{n \to +\infty} 0 = 0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1}$$

donc, d'après la question précédente et le théorème d'encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 3

1. - On a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{2a^2} = 0$$

et :

$$f(0) = \frac{0}{2a^2} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est en effet continue en } 0.}$$

- On a :

$$\lim_{\substack{x \to 2a \\ x < 2a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2a \\ x < 2a}} \frac{x}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a},$$

$$\lim_{\substack{x \to 2a \\ x > 2a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2a \\ x > 2a}} 0 = 0$$

donc :

$$\lim_{\substack{x \to 2a \\ x < 2a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to 2a \\ x > 2a}} f(x)$$

et par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas continue en } 2a.}$$

2. - Pour tout x de $]-\infty, 0[$ et tout x de $]2a, +\infty[$, on a : $f(x) = 0 \geq 0$ et, pour tout x de $[0, 2a]$, on a : $f(x) = \dfrac{\overbrace{x}^{\geq 0}}{\underbrace{2a^2}_{>0}} \geq 0.$

Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en $2a$ (car nulle sur $]-\infty, 0[$, polynomiale sur $]0, 2a[$ et nulle sur $]2a, +\infty[$).
- Sous réserve de convergence des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}x$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x.$$

Or, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{4a^2}{2} - 0\right) = \frac{4a^2}{4a^2} = 1.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

Remarque sur le deuxième point : avec la question précédente, on peut même affirmer que l'ensemble des points de continuité de f est $\mathbb{R} \setminus \{2a\}$.

3. (a) Soit x un réel. Déterminons $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Cas $x<0$. On a alors :
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0.$$
- Cas $0\leq x\leq 2a$. On a alors :
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} \frac{t}{2a^2}\,\mathrm{d}t=0+\frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x^2}{2}-0\right)=\frac{x^2}{4a^2}.$$
- Cas $2a<x$. On a alors :
$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{2a} \frac{t}{2a^2}\,\mathrm{d}t+\int_{2a}^{x} 0\,\mathrm{d}t\\&=0+\frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} x\,\mathrm{d}x+0\\&=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}\\&=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{4a^2}{2}-0\right)\\&=1.\end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$$\boxed{F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0\leq x\leq 2a\\ 1 & \text{si } 2a<x\end{cases}.}$$

(b) On a :
$$\begin{aligned}P_{[X>\frac{a}{2}]}(X\leq a)&=\frac{P\left([X>\frac{a}{2}]\cap[X\leq a]\right)}{P\left(X\leq a\right)}\quad\text{(par définition d'une probabilité conditionnelle)}\\&=\frac{P\left(\frac{a}{2}\leq X\leq a]\right)}{P\left(X\leq a\right)}\\&=\frac{F\left(a\right)-F\left(\frac{a}{2}\right)}{F\left(a\right)}\\&=\frac{\frac{a^2}{4a^2}-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2}}{\frac{a^2}{4a^2}}\quad\text{(d'après la question précédente }(0\leq\frac{a}{2}\leq 2a\text{ et }0\leq a\leq 2a))\\&=\frac{\frac{a^2}{4a^2}-\frac{\frac{a^2}{4}}{4a^2}}{\frac{a^2}{4a^2}}\\&=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}\\&=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}\\&=\frac{3}{16}\times 4\\&=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{3}{4}.}$$

4. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2a, +\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2a} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2a} \frac{x^2}{2a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{8a^3}{3} - 0\right) = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{4a}{3}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance, qui est bien égale à } \frac{4a}{3}.}$$

5. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2a, +\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2a} \frac{x^3}{2a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{16a^4}{4} - 0\right) = \frac{16a^4}{8a^2} = 2a^2.$$

Donc X^2 admet une espérance, donnée par : $E\left(X^2\right) = 2a^2$. Avec la formule de Huygens, on en déduit que X admet une variance, donnée par :

$$\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 2a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{18a^2}{9} - \frac{16a^2}{9} = \frac{2a^2}{9}.}$$

6. (a) Soit x un réel. Déterminons $G(x) = P(Y \leq x) = P\left(X^2 \leq x\right)$.

- Cas $x < 0$. Dans ce cas, l'événement $[X^2 \leq x]$ est impossible (car x est strictement négatif et X^2 est à valeurs strictement positives), donc :

$$G(x) = P\left(X^2 \leq x\right) = 0.$$

- Cas $x = 0$. L'événement $[X^2 \leq x]$ est alors égal à l'événement $[X^2 \leq 0]$ qui se réalise si, et seulement si, X prend la valeur 0. Comme X est à densité, on en déduit :

$$G(0) = P\left(X^2 \leq 0\right) = P\left(X = 0\right) = 0.$$

- Cas $0 < x$. On a dans ce cas :

$$G(x) = P\left(X^2 \leq x\right) = P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right).$$

Comme $-\sqrt{x} < 0$, la question 3.(a) permet d'affirmer que l'on a $F\left(-\sqrt{x}\right) = 0$. Pour déterminer $F\left(\sqrt{x}\right)$, il y a un peu plus de travail, car il convient de distinguer deux sous-cas, selon que l'on a $(0 \leq)\ \sqrt{x} \leq 2a$ ou $2a < \sqrt{x}$.
Comme $\sqrt{x} \leq 2a$ équivaut à $x \leq 4a^2$, on obtient dans le sous-cas $x \leq 4a^2$:

$$G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) = \frac{(\sqrt{x})^2}{4a^2} = \frac{x}{4a^2}$$

et comme $2a < \sqrt{x}$ équivaut à $4a^2 < x$, on obtient dans le sous-cas $4a^2 < x$:

$$G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x}{4a^2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 4a^2 \\ 1 & \text{si} \quad 4a^2 < x \end{cases}.}$$

Remarque : voici une démarche un peu différente.
Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2a, +\infty[$, on peut supposer que X est à valeurs dans $]0, 2a[$. Par conséquent $\underbrace{Y}_{=X^2}$ est à valeurs dans $]0, 4a^2[$.

Soit maintenant x un réel. Déterminons $G(x) = P(Y \leq x)$.

- Cas $x \leq 0$. Dans ce cas, l'événement $[Y \leq x]$ est impossible car x est négatif et Y prend des valeurs strictement positives, donc :
$$G(x) = P(Y \leq x) = 0.$$
- Cas $4a^2 \leq x$. Dans ce cas, l'événement $[Y \leq x]$ est certain (car Y est à valeurs dans $]0, 4a^2[$ et $4a^2 \leq x$), donc :
$$G(x) = P(Y \leq x) = 1.$$
- Cas $0 < x < 4a^2$. On a dans ce cas :
$$G(x) = P(Y \leq x) = P\left(X^2 \leq x\right) = P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}).$$
Comme $-\sqrt{x} < 0$, la question 3.(a) permet d'affirmer que l'on a $F(-\sqrt{x}) = 0$. De plus, comme $0 < x < 4a^2$, on a : $0 < \sqrt{x} < \underbrace{2a}_{=\sqrt{4a^2}}$ (par stricte croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$) donc :
$$G(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{4a^2} - 0 = \frac{x}{4a^2}.$$

(on laisse le soin au lecteur de vérifier qu'on retrouve bien la même fonction G que plus haut).

(b) D'après la question précédente, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x}{4a^2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 4a^2 \\ 1 & \text{si} \quad 4a^2 < x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x-0}{4a^2-0} & \text{si} \quad 0 < x \leq 4a^2 \\ 1 & \text{si} \quad 4a^2 < x \end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\left[0, 4a^2\right]$ donc :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi uniforme sur } \left[0, 4a^2\right].}$$

(c) La commande `rand()*4*a^2` :

$$\boxed{\text{simule le choix aléatoire d'un réel uniformément entre } 0 \text{ et } 4a^2\text{, c'est-à-dire, simule la loi uniforme sur } \left[0, 4a^2\right].}$$

Remarque : détaillons cela.
Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi unifome sur $[0, 1]$. Soit W la variable aléatoire définie par $W = 4a^2 \times Z$. Il convient d'établir que W suit la loi uniforme sur $\left[0, 4a^2\right]$.
La fonction de répartition de Z est la fonction F_Z définie, pour tout z de $\mathbb{R}$, par :
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ \dfrac{z-0}{1-0} & \text{si} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < z \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ z & \text{si} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < z \end{cases}.$$

Soit maintenant x un réel. Déterminons $F_W(x)$ où F_W désigne la fonction de répartition de W. On a :

$$\begin{array}{rcl}
F_W(x) & = & P(W \leq x) \\
& = & P\left(4a^2 Z \leq x\right) \\
& = & P\left(Z \leq \dfrac{x}{4a^2}\right) \\
& = & F_Z\left(\dfrac{x}{4a^2}\right) \\
& = & \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & \dfrac{x}{4a^2} < 0 \\ \dfrac{x}{4a^2} & \text{si} & 0 \leq \dfrac{x}{4a^2} \leq 1 \\ 1 & \text{si} & 1 < \dfrac{x}{4a^2} \end{array}\right. \\
& = & \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ \dfrac{x}{4a^2} & \text{si} & 0 \leq x \leq 4a^2 \\ 1 & \text{si} & 4a^2 < x \end{array}\right. .
\end{array}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\left[0, 4a^2\right]$ donc W suit la loi uniforme sur $\left[0, 4a^2\right]$.

(d) Un script convenant est le suivant :

```
Y=rand()*4*a^2
X=sqrt(Y)
disp(X)
```

7. (a) Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, X_k admet une espérance, donnée par : $E(X_k) = E(X) = \dfrac{4a}{3}$ (*cf* question 4.). On en déduit que T_n admet une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcll}
E(T_n) & = & E\left(\dfrac{3}{4n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) & \\
& = & \dfrac{3}{4n} E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) & \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{3}{4n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) & \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{3}{4n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{4a}{3} & \\
& = & \dfrac{3}{4n}\left(n \times \dfrac{4a}{3}\right) & \\
& = & a. &
\end{array}$$

Donc :

$$\boxed{T_n \text{ est bien un estimateur sans biais de } a.}$$

(b) D'après la question précédente, le risque quadratique de T_n est, sous réserve d'existence, sa variance. Or, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, X_k admet une variance, donnée par : $V(X_k) = V(X) = \dfrac{2a^2}{9}$ (*cf* question 5.).

On en déduit que T_n admet une variance donnée par :

$$\begin{aligned}
V(T_n) &= V\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \left(\frac{3}{4n}\right)^2 V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \quad (\text{«}V(aT+b)=a^2V(T)\text{»}) \\
&= \frac{9}{16n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \quad (\text{par indépendance de } X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) \\
&= \frac{9}{16n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2a^2}{9} \\
&= \frac{9}{16n^2}\left(n \times \frac{2a^2}{9}\right) \\
&= \frac{a^2}{8n}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{le risque quadratique de } T_n \text{ est donnée par : } r(T_n) = \frac{a^2}{8n}.}$$

(c) On peut compléter le script Scilab de la façon suivante :

```
n = length(X) // longueur de X
T_n = 3/(4*n)*sum(X)
disp(T_n)
```