EXERCICE 1

1. (a) • On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6+1 & 2-4+2 & 1+6+1 \\ 3-6+3 & 6+4+6 & 3-6+3 \\ 1+6+1 & 2-4+2 & 1+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.}$$

• On a (*cf* point précédent) :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8+0+8 & 16-0+16 & 8+0+8 \\ 0+48+0 & 0-32+0 & 0+48+0 \\ 8+0+8 & 16-0+16 & 8+0+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 32 & 16 \\ 48 & -32 & 48 \\ 16 & 32 & 16 \end{pmatrix} \\ &= 16\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{A^3 = 16A \text{ (par conséquent, en posant } \alpha = 16\text{, on a : } A^3 = \alpha A).}$$

Remarque : on peut aussi constater que l'on a : $A^2 = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et se servir de cette égalité dans le calcul de A^3 (cela adoucit un peu les calculs).

(b) Supposons que A soit inversible. Alors A^{-1} est bien définie. Comme $A^3 = 16A$ (*cf* question précédente), on en déduit : $A^3A^{-1} = 16AA^{-1}$ ce qui se réécrit $A^2AA^{-1} = 16AA^{-1}$ soit encore :

$$A^2 = 16I_3$$

ce qui est exclu car on a obtenu dans la question précédente : $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}}_{=16I_3}.$

Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} A^5 &= A^3A^2 \\ &= 16AA^2 \quad \text{(d'après la question 1.(a))} \\ &= 16A^3 \\ &= 16.(16A) \quad \text{(d'après la question 1.(a))} \\ &= 16^2A. \end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{A^5 = 16^2A.}$$

(b) Notons Q_p la propriété définie par : «$A^{2p-1} = \alpha^{p-1}A$» et montrons par récurrence que Q_p est vraie pour tout p de $\mathbb{N}^*$.

Initialisation :

On a :

$$\alpha^{1-1}A = 1.A = A$$

et :

$$A^{2\times1-1} = A^1 = A$$

donc $A^{2\times1-1} = \alpha^{1-1}A$, c'est-à-dire que Q_1 est vraie.

Hérédité :

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété Q_p est vraie et montrons que Q_{p+1} est vraie.

Comme Q_p est vraie, on a :

$$\begin{aligned} A^{2p-1} = \alpha^{p-1}A \quad &\text{d'où} \quad A^{2p-1}A^2 = \alpha^{p-1}AA^2 \\ &\text{d'où} \quad A^{2p-1+2} = \alpha^{p-1}A^3 \\ &\text{d'où} \quad A^{2p+1} = \alpha^{p-1}\alpha A \quad \text{(d'après la question 1.(a))} \\ &\text{d'où} \quad A^{2p+1} = \alpha^pA. \end{aligned}$$

Or $A^{2(p+1)-1} = A^{2p+2-1} = A^{2p+1}$ donc :

$$A^{2(p+1)-1} = \alpha^pA$$

Donc Q_{p+1} est vraie.

Conclusion :

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, Q_p est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } p \text{ de } \mathbb{N}^*,\ A^{2p-1} = \alpha^{p-1}A.}$$

(c) Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a : $A^{2p-1} = \alpha^{p-1}A$, d'où : $A^{2p-1}A = \alpha^{p-1}AA$, ce qui se réécrit :

$$\boxed{A^{2p} = \alpha^{p-1}A^2.}$$

3. (a) On a obtenu dans la question 1.(a) l'égalité $A^3 = 16A$, d'où :

$$A^3 - 16A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Le polynôme $P = X^3 - 16X$ est donc annulateur de la matrice A. Les valeurs propres de A sont donc parmi les racines de ce polynôme.

Or, pour tout réel x, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff x^3 - 16x = 0 \\ &\iff x\left(x^2 - 16\right) = 0 \\ &\iff x\left(x^2 - 4^2\right) = 0 \\ &\iff x(x-4)(x+4) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 4 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4. \end{aligned}$$

Donc les racines de P sont -4, 0 et 4; ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{les trois valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -4,\ 0 \text{ et } 4.}$$

(b) • Pour toute matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
AX = -4X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3x-2y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ -4z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & -4x \\ 3x & -2y & +3z & = & -4y \\ x & +2y & +z & = & -4z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} 5x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & +2y & +3z & = & 0 \\ x & +2y & +5z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} x & +2y & +5z & = & 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 3x & +2y & +3z & = & 0 & \\ 5x & +2y & +z & = & 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} x & +2y & +5z & = & 0 & \text{pivot} \\ & -4y & -12z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & -8y & -24z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} x & +2y & +5z & = & 0 & \\ & y & +3z & = & 0 & L_2 \leftarrow \frac{-1}{4}L_2 \\ & y & +3z & = & 0 & L_3 \leftarrow \frac{-1}{8}L_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} x & +2y & +5z & = & 0 & \\ & y & +3z & = & 0 & \text{pivot} \\ & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+5z & = & 0 \\ y+3z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2(-3z)+5z & = & 0 \\ y & = & -3z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x-z & = & 0 \\ y & = & -3z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -3z \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{le système } AX = -4X \text{ (d'inconnue } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\text{), est bien équivalent à } \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -3z \\ x & = & z \end{array}\right. .}$$

• D'après le point précédent, l'ensemble des solutions de l'équation $AX = -4X$ (d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} ,\ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comme la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de cet ensemble, on peut conclure que :

$\boxed{\text{le réel } -4 \text{ est un vecteur propre pour } A \text{ et qu'un vecteur propre associé à cette valeur}}$

$$\boxed{\text{propre est la matrice } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) • Pour toute matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3x-2y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & -2y & +3z & = & 0 \\ x & +2y & +z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} x & +2y & +z & = & 0 & \text{pivot} \\ & -8y & & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & 0 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ (d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comme cet ensemble contient d'autres matrices que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et que l'équation $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ équivaut à l'équation $AX = 0X$, on peut conclure que :

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre pour } A.}$$

• Comme la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$ (c'est la matrice que l'on obtient «en choisissant $z = -1$»), on peut directement conclure :

$$\boxed{\text{qu'un vecteur propre pour } A \text{ associé à la valeur propre } 0 \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

Remarque : on peut aussi conclure en signalant que l'on a : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-1 \\ 3-0-3 \\ 1+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) • On a :

$$\boxed{A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1 \\ 3-2+3 \\ 1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.}$$

• On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, d'après le point précédent :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc :

le réel 4 est un vecteur propre pour A (et un vecteur propre associé à cette valeur propre est la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

(e) On a :

$$\boxed{AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

et :

$$\boxed{PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Remarque : on peut remarquer que P et D ont été construites de la façon usuelle : les 3 valeurs propres pour les éléments diagonaux de D et des vecteurs propres correspondant à ces valeurs propres pour les colonnes de P; ce constat nous aurait d'ailleurs permis de justifier l'égalité $AP = PD$ de façon non calculatoire.

(f) • On a :

$$\boxed{PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.}$$

• D'après le point précédent, on a :

$$PQ = 8I \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{8}PQ = \frac{1}{8}(8I)$$
$$\text{d'où} \quad P\left(\frac{1}{8}Q\right) = I.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{8}Q = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.}$$

(g) - D'après les deux questions précédentes, on a : $AP = PD$ avec D qui est une matrice diagonale et P qui est une matrice inversible. Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

- Notons P_n la propriété définie par : «$A^n = PD^nP^{-1}$» et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Initialisation :
On a :

$$\begin{array}{rcll} PD^1P^{-1} & = & PDP^{-1} & \\ & = & APP^{-1} & \text{(car, d'après la question 3.(e), } PD = AP) \\ & = & AI_3 & \\ & = & A & \\ & = & A^1 & \end{array}$$

donc P_1 est vraie.

Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
On a :

$$\begin{array}{rcll} PD^{n+1}P^{-1} & = & PDD^nP^{-1} & \\ & = & APD^nP^{-1} & \text{(d'après la question 3.(e))} \\ & = & AA^n & \text{(car } P_n \text{ est vraie)} \\ & = & A^{n+1}. & \end{array}$$

Donc P_{n+1} est vraie (lorsque P_n l'est).

Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & PD^nP^{-1} \quad \text{(d'après le point précédent)} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(car } D \text{ est diagonale)} \\ & = & \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & -2(-4)^n & (-4)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 3.4^n & 2.4^n & 3.4^n \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-4)^n + 3.4^n & -2(-4)^n + 2.4^n & (-4)^n + 3.4^n \\ -3(-4)^n + 3.4^n & 6(-4)^n + 2.4^n & -3(-4)^n + 3.4^n \\ (-4)^n + 3.4^n & -2(-4)^n + 2.4^n & (-4)^n + 3.4^n \end{pmatrix}. \end{array}$$

On a obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-4)^n + 3.4^n & -2(-4)^n + 2.4^n & (-4)^n + 3.4^n \\ -3(-4)^n + 3.4^n & 6(-4)^n + 2.4^n & -3(-4)^n + 3.4^n \\ (-4)^n + 3.4^n & -2(-4)^n + 2.4^n & (-4)^n + 3.4^n \end{pmatrix}}.$$

Remarques :

– On a donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-4)^n+3.4^n}{8} & \frac{-2(-4)^n+2.4^n}{8} & \frac{(-4)^n+3.4^n}{8} \\ \frac{-3(-4)^n+3.4^n}{8} & \frac{6(-4)^n+2.4^n}{8} & \frac{-3(-4)^n+3.4^n}{8} \\ \frac{(-4)^n+3.4^n}{8} & \frac{-2(-4)^n+2.4^n}{8} & \frac{(-4)^n+3.4^n}{8} \end{pmatrix}.$$

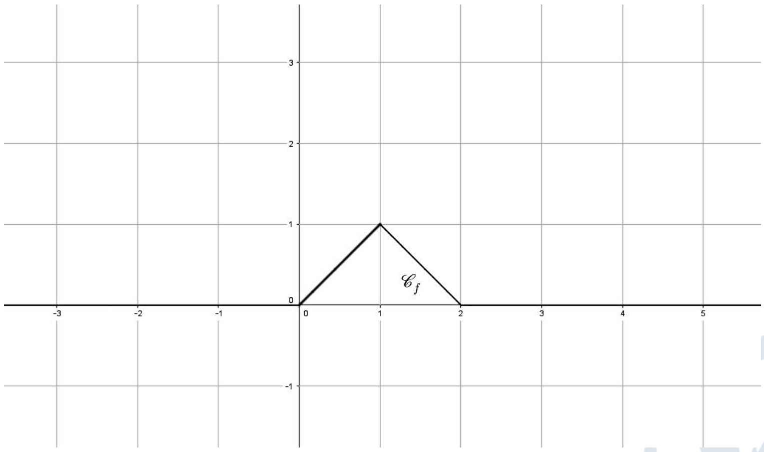
– Le lecteur pourra vérifier que l'on retrouve les résultats des questions 2.(b) et 2.(c) en distinguant les cas n pair et n impair, c'est-à-dire les cas n de la forme $2p$ et n de la forme $2p-1$.

EXERCICE 2

1. La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante, continue sur $]0, a[$ car polynomiale, continue sur $]a, 2a[$ car polynomiale et continue sur $]2a, +\infty[$ car constante.
   Pour conclure à la continuité de f sur $\mathbb{R}$, il reste à établir la continuité de f en 0, en a et en $2a$.
   On a :
   $$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} f(t) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} 0 = 0,$$
   $$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{t}{a^2} = 0$$
   et :
   $$f(0) = \frac{0}{a^2} = 0$$
   donc f est continue en 0. On a aussi :
   $$\lim_{\substack{t \to a \\ t < a}} f(t) = \lim_{\substack{t \to a \\ t < a}} \frac{t}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a},$$
   $$\lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} f(t) = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{2a-a}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$
   et :
   $$f(a) = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$
   donc f est continue en a. Enfin :
   $$\lim_{\substack{t \to 2a \\ t < 2a}} f(t) = \lim_{\substack{t \to 2a \\ t < 2a}} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{2a-2a}{a^2} = 0,$$
   $$\lim_{\substack{t \to 2a \\ t > 2a}} f(t) = \lim_{\substack{t \to 2a \\ t > 2a}} 0 = 0$$
   et :
   $$f(2a) = \frac{2a-2a}{a^2} = 0$$
   donc f est continue en $2a$.
   Finalement :
   $$\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Dans le cas particulier $a = 1$, on a, pour tout t de $\mathbb{R}$:
   $$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{si} \quad 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction f est donc constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]2,+\infty[$ et affine sur $[0,1]$ et sur $]1,2]$, ce qui permet de construire facilement sa represénation graphique qui est la suivante :



Remarque : on retrouve la continuité de f sur $\mathbb{R}$ (continuité qui peut également être utilisée pour construire la courbe représentative).

3. (a) • On a :

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x}{a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2}{2}-0\right) = \frac{1}{2}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.}$$

• On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{2a} \frac{2a-x}{a^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\int_a^{2a} 2a - x\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\int_a^{2a} 2a\,\mathrm{d}x - \int_a^{2a} x\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\int_a^{2a} 1\,\mathrm{d}x - \int_a^{2a} x\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\,[x]_a^{2a} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{2a}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a(2a-a) - \left(\frac{4a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a^2 - 2a^2 + \frac{a^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\,\frac{a^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\int_a^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.}$$

(b) • Pour tout x de $]-\infty, 0[$ et tout x de $]2a, +\infty[$, on a : $f(x) = 0 \geq 0$. Pour tout x de $[0, a]$, on a : $f(x) = \dfrac{\overbrace{x}^{\geq 0}}{\underbrace{a^2}_{>0}} \geq 0$. Enfin, pour tout x de $]a, 2a]$, on a : $x \leq 2a$, donc $-x \geq -2a$, donc $2a - x \geq 0$ et par conséquent (pour tout x de $]a, 2a]$) : $f(x) = \dfrac{\overbrace{2a-x}^{\geq 0}}{\underbrace{a^2}_{>0}} \geq 0$.

On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

• D'après la question 1., la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2a, +\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{2a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et on a (*cf* question précédente) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{f \text{ peut bien être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire } X.}$$

4. (a) La variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, auquel cas : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2a, +\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{2a}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{2a} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2a}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{2a} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculons $\int_{0}^{a} x f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{a}^{2a} x f(x)\,\mathrm{d}x$. On a :

$$\int_{0}^{a} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_{0}^{a} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{a} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^3}{3} - 0\right) = \frac{a}{3}.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{2a} x f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a}^{2a} \frac{x(2a-x)}{a^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\int_{a}^{2a} 2ax - x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\int_{a}^{2a} 2ax\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{2a} x^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\int_{a}^{2a} x\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{2a} x^2\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{2a} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{2a}\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\left(\frac{4a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) - \left(\frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\,\frac{3a^2}{2} - \frac{7a^3}{3}\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\left(3a^3 - \frac{7a^3}{3}\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\,\frac{9a^3-7a^3}{3}\\
&= \frac{1}{a^2}\,\frac{2a^3}{3}\\
&= \frac{2a}{3}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que l'on a :

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{2a} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = \frac{3a}{3} = a.
$$

Finalement :

$$
\boxed{X \text{ admet une espérance, qui est bien égale à } a.}
$$

(b) La variable aléatoire X^2 admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, auquel cas : $E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2a, +\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et on a :

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{2a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2a}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{2a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.
$$

Calculons $\displaystyle\int_0^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{2a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. On a :

$$
\int_0^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x^3}{a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{1}{a^2}\,\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{4}.
$$

On a aussi :

$$
\begin{aligned}
\int_a^{2a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{2a} \frac{x^2(2a-x)}{a^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{a^2}\int_a^{2a} 2ax^2 - x^3\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\int_a^{2a} x^2\,\mathrm{d}x - \int_a^{2a} x^3\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{2a} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^{2a}\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\left(\frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{16a^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right)\right)\\
&= \frac{1}{a^2}\left(2a\,\frac{7a^3}{3} - \frac{15a^4}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{14a^4}{3} - \frac{15a^4}{4}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{56a^4}{12} - \frac{45a^4}{12}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\,\frac{11a^4}{12} \\
&= \frac{11a^2}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{2a} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{4} + \frac{11a^2}{12} = \frac{3a^2}{12} + \frac{11a^2}{12} = \frac{14a^2}{12} = \frac{7a^2}{6}.$$

Finalement :

$$\boxed{X^2 \text{ admet une espérance, qui est bien égale à } \frac{7a^2}{6}.}$$

(c) Le fait que X^2 admette une espérance assure que X admet une variance. Celle-ci est donnée, d'après le formule de Huygens, par (*cf* questions précédentes) :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{7a^2}{6} - a^2 = \frac{7a^2 - 6a^2}{6} = \frac{a^2}{6}.$$

Finalement :

$$\boxed{X \text{ admet une variance, donnée par : } V(X) = \frac{a^2}{6}.}$$

5. (a) • Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, X_k admet une espérance, donnée par : $E\left(X_k\right) = E(X) = a$ (*cf* question 4.(a)). On en déduit que $\overline{X_n}$ admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E\left(\overline{X_n}\right) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\right) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a \\
&= \frac{1}{n}(n \times a) \\
&= a.
\end{aligned}$$

On a obtenu que :

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ admet une espérance, donnée par : } E\left(\overline{X_n}\right) = a.}$$

• Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, X_k admet une variance, donnée par : $V\left(X_k\right) = V(X) = \dfrac{a^2}{6}$ (*cf* question 4.(b)). On en déduit que $\overline{X_n}$ admet une variance donnée par :

$$\begin{aligned}
V\left(\overline{X_n}\right) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \quad (\text{«}V(aT+b)=a^2V(T)\text{»}) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k\right) \quad (\text{par indépendance de } X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a^2}{6} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n \times \frac{a^2}{6}\right) \\
&= \frac{a^2}{6n}.
\end{aligned}$$

On a obtenu que :

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ admet une variance, donnée par : } V\left(\overline{X_n}\right) = \frac{a^2}{6n}.}$$

(b) • Comme l'espérance de $\overline{X_n}$ est égale à a (*cf* question précédente) :

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$$

• Comme $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est égal à sa variance. Donc (*cf* question précédente) :

$$\boxed{\text{le risque quadratique de } \overline{X_n} \text{ est donné par : } r\left(\overline{X_n}\right) = \frac{a^2}{6n}.}$$

6. (a) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (qui s'applique car ε est strictement positif et $\overline{X_n}$ admet une variance) indique que l'on a :

$$P\left(\left|\overline{X_n} - E\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Or, d'après la question 5.(a), $E\left(\overline{X_n}\right) = a$ et :

$$\frac{V\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{a^2}{6n}}{\varepsilon^2} = \frac{a^2}{6n\varepsilon^2}.$$

Donc l'inégalité précédente se réécrit :

$$P\left(\left|\overline{X_n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{a^2}{6n\varepsilon^2}.$$

Constatons maintenant que, comme $0 < a \leq 1$, on $a^2 \leq 1$ (par croissance de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$) donc :

$$\frac{a^2}{6n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

Avec l'inégalité obtenue précédemment, on peut conclure que l'on a en effet :

$$\boxed{P\left(\left|\overline{X_n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2}.}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{6n\varepsilon^2} \quad &\text{d'où} \quad -P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\geq-\frac{1}{6n\varepsilon^2}\\ &\text{d'où} \quad 1-P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\geq1-\frac{1}{6n\varepsilon^2}\\ &\text{d'où} \quad P\left(\overline{\left[\,\left|\overline{X_n}-a\right|\geq\varepsilon\,\right]}\right)\geq1-\frac{1}{6n\varepsilon^2}\\ &\text{d'où} \quad P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|<\varepsilon\right)\geq1-\frac{1}{6n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Comme $\left[\,\left|\overline{X_n}-a\right|\leq\varepsilon\,\right]\supset\left[\,\left|\overline{X_n}-a\right|<\varepsilon\,\right]$, on a :

$$P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|\leq\varepsilon\right)\geq P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|<\varepsilon\right).$$

Avec l'inégalité précédente, on en déduit :

$$P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|\leq\varepsilon\right)\geq1-\frac{1}{6n\varepsilon^2}.$$

Enfin, comme l'événement $\underbrace{\left[\,\left|\overline{X_n}-a\right|\leq\varepsilon\,\right]}_{=\left[\,\left|\left(\overline{X_n}-a\right)-0\right|\leq\varepsilon\,\right]}$ est l'événement «l'écart entre la valeur prise par $\overline{X_n}-a$ et 0 est inférieure ou égale à ε», on a les égalités d'événements suivantes :

$$\left[\,\left|\overline{X_n}-a\right|\leq\varepsilon\,\right]=\left[-\varepsilon\leq\overline{X_n}-a\leq\varepsilon\right]=\left[\varepsilon\geq-\overline{X_n}+a\geq-\varepsilon\right]=\left[\overline{X_n}+\varepsilon\geq a\geq\overline{X_n}-\varepsilon\right]$$

d'où :

$$P\left(\left|\overline{X_n}-a\right|\leq\varepsilon\right)=P\left(\overline{X_n}-\varepsilon\leq a\leq\overline{X_n}+\varepsilon\right)$$

ce qui, avec l'inégalité obtenue plus haut, permet de conclure :

$$\boxed{P\left(\overline{X_n}-\varepsilon\leq a\leq\overline{X_n}+\varepsilon\right)\geq1-\frac{1}{6n\varepsilon^2}.}$$

(c) Dans le cas $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{600}}$ et $n=1000$, on a :

$$1-\frac{1}{6n\varepsilon^2}=1-\frac{1}{6000\left(\frac{1}{\sqrt{600}}\right)^2}=1-\frac{1}{6000\,\frac{1}{600}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

et le résultat de la question précédente se réécrit donc :

$$P\left(a\in\left[\overline{X_{1000}}-\frac{1}{\sqrt{600}},\overline{X_{1000}}+\frac{1}{\sqrt{600}}\right]\right)\geq\frac{9}{10}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'intervalle }\left[\overline{X_{1000}}-\frac{1}{\sqrt{600}},\overline{X_{1000}}+\frac{1}{\sqrt{600}}\right]\text{ est un intervalle de confiance pour } a \text{ au niveau de confiance } \frac{9}{10}.}$$

EXERCICE 3

1. On note R l'événement «la boule tirée est rouge», V l'événement «la boule tirée est verte», U l'événement «la boule tirée porte le numéro 1» et D l'événement «la boule tirée porte le numéro 2».

   (a) On cherche $P(R \cap U)$. Or, d'après le premier point de l'énoncé, 20% des boules de l'urne sont rouges et portent le numéro 1, donc :

   $$\boxed{P(R \cap U) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}\ (= 0,2).}$$

   (b) On cherche $P(D)$. Or, d'après l'énoncé, 20% des boules de l'urne sont rouges et portent le numéro 1 et toutes les autres boules que celles-ci portent le numéro 2. Donc on a :

   $$\boxed{P(D) = 1 - \frac{20}{100} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8.}$$

   Remarque : ce qui rend la situation particulière est qu'il n'y a pas de boules vertes portant le numéro 1 dans l'urne (on a donc $R \cap U = U$ et par conséquent : $D = \overline{U} = \overline{R \cap U}$).

   (c) On cherche $P(R)$. Il est clair que la famille (U, D) est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

   $$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap U) + P(R \cap D) \\ &= 0,2 + P(D) \times P_D(R) \quad \text{(d'après la formule des probabilités composées)} \\ &= 0,2 + 0,8 \times \frac{10}{100} \quad (*) \\ &= 0,2 + 0,8 \times 0,1 \\ &= 0,2 + 0,08 \\ &= 0,28. \end{aligned}$$

   Détail de $(*)$: d'après l'énoncé, 10% des boules portant le numéro 2 sont rouges, donc sachant qu'une boule porte le numéro 2, la probabilité qu'elle soit rouge est égale à $\frac{10}{100}$, c'est-à-dire que l'on a : $P_D(R) = \frac{10}{100}$.
   Donc on a bien :

   $$\boxed{P(R) = 0,28.}$$

2. (a) Il est clair que l'ensemble des valeurs prises par G est donné par $G(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$.
   De plus :

   $$\begin{aligned} P(G = 1) &= P(R \cap U) = \frac{1}{5} = \frac{5}{25} \quad (\textit{cf}\ \text{question 1.(a)}) \\ P(G = -1) &= P(V) = 1 - P(R) = 1 - 0,28 = 1 - \frac{28}{100} = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}. \end{aligned}$$

   Enfin, comme la famille $([G = -1], [G = 1], [G = 2])$ est un système complet d'événements, on a :

   $$P(G = 2) = 1 - P(G = 1) - P(G = -1) = 1 - \frac{5}{25} - \frac{18}{25} = \frac{25 - 5 - 18}{25} = \frac{2}{25}.$$

   Finalement, sous forme de tableau, la loi de G est donnée par :

k	-1	1	2
$P(G = k)$	$\frac{18}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$

Remarque : voici une autre façon de calculer $P(G=2)$. On a :

$$\begin{aligned} P(G=2) &= P(R\cap D) \\ &= P(D)\times P_D(R) \\ &= \frac{4}{5}\times\frac{1}{10} \\ &= \frac{4}{50} \\ &= \frac{2}{25}. \end{aligned}$$

(b) • La variable aléatoire G est finie donc admet une espérance. D'après la question précédente, celle-ci est donnée par :

$$E(G) = -1\times\frac{18}{25} + 1\times\frac{5}{25} + 2\times\frac{2}{25} = \frac{-18+5+4}{25} = \frac{-9}{25}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{E(G) = \frac{-9}{25}.}$$

• La variable aléatoire G est finie donc admet une variance. Pour l'obtenir, commençons par calculer $E\left(G^2\right)$. On a :

$$E\left(G^2\right) = (-1)^2\times\frac{18}{25} + 1^2\times\frac{5}{25} + 2^2\times\frac{2}{25} = \frac{18+5+8}{25} = \frac{31}{25}.$$

D'après la formule de Huygens, on en déduit que la variance de G est donnée par :

$$V(G) = E\left(G^2\right) - (E(G))^2 = \frac{31}{25} - \left(\frac{-9}{25}\right)^2 = \frac{775}{625} - \frac{81}{625} = \frac{694}{625}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{V(G) = \frac{694}{625}.}$$

3. (a) Comme $P(R) = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$, $P(V) = 1-P(R) = \frac{18}{25}$, $P(D) = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ et $P(U) = 1-P(D) = \frac{1}{5}$:

• $\boxed{R_n \text{ suit la loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{7}{25}\right), V_n \text{ suit la loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{18}{25}\right)}$

$\boxed{U_n \text{ suit la loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{1}{5}\right) \text{ et } D_n \text{ suit la loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{4}{5}\right)}$.

• Avec le point précédent, on obtient que R_n, V_n, U_n et D_n admettent des espérances, données par :

$$\boxed{E(R_n) = \frac{7n}{25},\ E(V_n) = \frac{18n}{25},\ E(U_n) = \frac{n}{5} \text{ et } E(D_n) = \frac{4n}{5}.}$$

(b) • La variable aléatoire $R_n + V_n$ est la somme du nombre de boules rouges obtenues et du nombre de boules vertes obtenues au cours des n tirages, donc est égale au nombre total de tirages. D'où :

$$\boxed{R_n + V_n = n.}$$

• L'événement $[R_n = 0]\cap[V_n = 0]$ est impossible car on ne peut pas tirer aucune boule rouge et aucune boule verte (si on tire aucune boule rouge c'est qu'on tire n boules vertes). D'où :

$$P\left([R_n = 0]\cap[V_n = 0]\right) = 0.$$

Or, d'après la question précédente :

$$P(R_n=0)\times P(V_n=0)=\underbrace{\binom{n}{0}\left(\frac{7}{25}\right)^0\left(1-\frac{7}{25}\right)^{n-0}}_{\neq 0}\times\underbrace{\binom{n}{0}\left(\frac{18}{25}\right)^0\left(1-\frac{18}{25}\right)^{n-0}}_{\neq 0}\neq 0$$

donc :

$$P\left([R_n=0]\cap[V_n=0]\right)\neq P(R_n=0)\times P(V_n=0)$$

ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } R_n \text{ et } V_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(R_n,V_n) &= \operatorname{cov}(R_n,n-R_n) \quad (\text{car, d'après le premier point, } R_n+V_n=n)\\
&= \operatorname{cov}(R_n,n)-\operatorname{cov}(R_n,R_n) \quad (*)\\
&= 0-V(R_n) \quad (**)\\
&= \frac{-7n}{25}\left(1-\frac{7}{25}\right) \quad \left(\text{d'après la question précédente : } R_n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n,\frac{7}{25}\right)\right)\\
&= \frac{-7n}{25}\frac{18}{25}\\
&= \frac{-126n}{625}.
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par linéarité de la covariance par rapport à la deuxième place.
Détail de $(**)$: d'après la formule de Huygens :

$$\operatorname{cov}(R_n,n)=E(R_n\times n)-E(R_n)\times E(n)=nE(R_n)-E(R_n)\times n=0.$$

Remarques :

- La non nullité de la covariance permettrait d'obtenir la non indépendance de R_n et V_n mais ce n'est manifestement pas la méthode attendue.
- Voici une autre démarche pour obtenir $\operatorname{cov}(R_n,V_n)$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(R_n,V_n) &= \frac{1}{2}\left(V(R_n+V_n)-V(R_n)-V(V_n)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(V(n)-V(R_n)-V(V_n)\right) \quad (\text{car } R_n+V_n=n)\\
&= \frac{1}{2}\left(0-V(R_n)-V(V_n)\right) \quad \left(V(n)=E\left(n^2\right)-(E(n))^2=n^2-(n)^2=0\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(0-\frac{7n}{25}\left(1-\frac{7}{25}\right)-\frac{18n}{25}\left(1-\frac{18}{25}\right)\right) \quad (\text{d'après la question précédente})\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{7n}{25}\frac{18}{25}-\frac{18n}{25}\frac{7}{25}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{126n}{25}-\frac{126n}{25}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-252n}{25}\right)\\
&= \frac{-126n}{625}.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\operatorname{cov}(R_n,V_n)=\frac{-126n}{625}.}$$

(c) On peut, dans cette question, reprendre la démarche utilisée dans la question précédente :

- La variable aléatoire $U_n + D_n$ est la somme du nombre de boules portant le numéro 1 obtenues et du nombre de boules portant le numéro 2 obtenues au cours des n tirages, donc est égale au nombre total de tirages. D'où :

$$\boxed{U_n + D_n = n.}$$

- L'événement $[U_n = 0] \cap [D_n = 0]$ est impossible car on ne peut pas tirer aucune boule portant le numéro 1 et aucune boule portant le numéro 2. D'où :

$$P\left([U_n = 0] \cap [D_n = 0]\right) = 0.$$

Or, d'après la question précédente :

$$P(U_n = 0) \times P(D_n = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(1 - \frac{1}{25}\right)^{n-0} \times \binom{n}{0}\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(1 - \frac{4}{5}\right)^{n-0} \neq 0$$

donc :

$$P\left([U_n = 0] \cap [D_n = 0]\right) \neq P(U_n = 0) \times P(D_n = 0)$$

ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } U_n \text{ et } D_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\text{cov}(U_n, D_n) &= \text{cov}(U_n, n - U_n) \quad (\text{car, d'après le premier point, } U_n + D_n = n)\\
&= \text{cov}(U_n, n) - \text{cov}(U_n, U_n)\\
&= 0 - V(U_n)\\
&= \frac{-n}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right) \quad \left(U_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{5}\right)\right)\\
&= \frac{-n}{5}\frac{4}{5}\\
&= \frac{-4n}{25}.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\text{cov}(U_n, D_n) = \frac{-4n}{25}.}$$

4. (a) On peut regrouper les n boules tirées par le joueur en trois catégories :

- Les boules vertes. Chacune de ces boules lui fait perdre 1 euro et comme il tire V_n telles boules, le gain du joueur relatif à ces boules est égal à : $-1.V_n = -V_n$.
- Les boules qui sont rouges et qui portent le numéro 1. Chacune de ces boules lui rapporte 1 euro et comme il tire U_n telles boules (rappelons qu'il n'y a pas de boules vertes portant le numéro 1 dans l'urne, donc «boules rouges qui portent le numéro 1» et «boules qui portent le numéro 1» sont la même chose), le gain du joueur relatif à ces boules est égal à : $1.U_n = U_n$.
- Les boules qui sont rouges et qui portent le numéro 2. Chacune de ces boules lui rapporte 2 euros et comme il tire $n - V_n - U_n$ telles boules (il tire n boules et ces boules sont les «autres» que les précédentes), le gain du joueur relatif à ces boules est égal à : $2(n - V_n - U_n)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
G_n &= -V_n + U_n + 2(n - V_n - U_n)\\
&= -V_n + U_n + 2n - 2V_n - 2U_n\\
&= -3V_n - U_n + 2n\\
&= -3V_n - U_n + 2(U_n + D_n) \quad (\text{car, d'après la question 3.(c), } U_n + D_n = n)\\
&= -3V_n - U_n + 2U_n + 2D_n\\
&= -3V_n + U_n + 2D_n.
\end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{G_n = U_n + 2D_n - 3V_n.}$$

(b) On a obtenu dans la question précédente :

$$G_n = U_n + 2D_n - 3V_n.$$

Comme U_n, D_n et V_n admettent une espérance (*cf* question 3.(a) : $E(U_n) = \frac{n}{5}$, $E(D_n) = \frac{4n}{5}$ et $E(V_n) = \frac{18n}{25}$), G_n admet une espérance, donnée, par linéarité de l'espérance, par :

$$E(G_n) = E(U_n + 2D_n - 3V_n) = E(U_n) + 2E(D_n) - 3E(V_n) = \frac{n}{5} + 2.\frac{4n}{5} - 3\frac{18n}{25} = \frac{5n}{25} + \frac{40n}{25} - \frac{54n}{25} = \frac{-9n}{25}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{E(G_n) = \frac{-9n}{25}}$$

Remarque : ce résultat est cohérent avec celui de la question 3.(a), car, en notant, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, T_i la variable aléatoire égale au gain de la i-ème partie, on a :

$$G_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

et donc, par linéarité de l'espérance, G_n admet une espérance, donnée par :

$$\begin{aligned}
E(G_n) &= E(T_1 + T_2 + \ldots + T_n) \\
&= E(T_1) + E(T_2) + \ldots + E(T_n) \\
&= \underbrace{E(G) + E(G) + \ldots + E(G)}_{n \text{ termes}} \\
&= \underbrace{\left(\frac{-9}{25}\right) + \left(\frac{-9}{25}\right) + \ldots + \left(\frac{-9}{25}\right)}_{n \text{ termes}} \\
&= \frac{-9n}{25}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1. Notons P_n la propriété définie par : «a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs» et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

   Initialisation :
   Comme $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = 2 > 0$, P_0 est vraie.

   Hérédité :
   Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
   Comme P_n est vraie, a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs. Par conséquent, $a_n + b_n$ est bien défini et est strictement positif. Donc $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ est bien défini et strictement positif.

   Comme a_{n+1} et b_n sont bien définis et strictement positifs, $a_{n+1}b_n$ est bien défini et strictement positif. On en déduit que $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ est bien défini et strictement positif $(*)$.
   Donc P_{n+1} est vraie.

   Conclusion :
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie. En particulier :

   $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bien définies et sont des suites de nombres réels strictement positifs.}}$

   Détail de $(*)$: $a_{n+1}b_n > 0$ donc, par stricte croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, $\sqrt{a_{n+1}b_n} > \underbrace{\sqrt{0}}_{=0}$.

2. On peut compléter le script de la façon suivante :

```
n=input('entrer une valeur pour n')
a=1
b=2
for k = 1 :  n
     a=(a+b)/2
     b=sqrt(a*b)
end
disp(a, 'a=')
disp(b, 'b=')
```

   Remarque : l'instruction `b=sqrt(a*b)` convient car on remplacé `a` par «le nouveau `a`» à l'issue de l'instruction précédente.

3. • On a :

   $$\boxed{a_1 = a_{0+1} = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.}$$

   • On a (*cf* point précédent pour la valeur de a_1) :

   $$b_1 = b_{0+1} = \sqrt{a_{0+1}b_0} = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 2} = \sqrt{3}.$$

   On a bien obtenu :

   $$\boxed{b_1 = \sqrt{3}.}$$

4. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}b_n}-a_{n+1}\\
&= \sqrt{a_{n+1}}\sqrt{b_n}-\left(\sqrt{a_{n+1}}\right)^2\\
&= \sqrt{a_{n+1}}\left(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_{n+1}}\right)\\
&= \sqrt{a_{n+1}}\frac{\left(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_{n+1}}\right)\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \qquad (\underbrace{\sqrt{b_n}}_{>0}+\underbrace{\sqrt{a_{n+1}}}_{>0}\neq 0)\\
&= \sqrt{a_{n+1}}\frac{\left(\sqrt{b_n}\right)^2-\left(\sqrt{a_{n+1}}\right)^2}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\\
&= \sqrt{a_{n+1}}\frac{b_n-a_{n+1}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\left(b_n-a_{n+1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\left(b_n-\frac{a_n+b_n}{2}\right) \qquad (\textit{cf} \text{ définition de la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}})\\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\,\frac{2b_n-(a_n+b_n)}{2}\\
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\,\frac{b_n-a_n}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n-a_n)}.$$

(b) Notons P_n la propriété définie par : «$a_n<b_n$» et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Initialisation :
On a : $a_0=1$ et $b_0=2$ et comme $1<2$, P_0 est vraie.

Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après la question précédente, on a :

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n-a_n).$$

Or, d'après la question 1. a_{n+1} et b_n sont strictement postifs, donc $\sqrt{a_{n+1}}$ et $\sqrt{b_n}$ sont strictement positifs, d'où :

$$\frac{\overbrace{\sqrt{a_{n+1}}}^{>0}}{\underbrace{2\left(\underbrace{\sqrt{b_n}}_{>0}+\underbrace{\sqrt{a_{n+1}}}_{>0}\right)}_{>0}}>0$$

Enfin, comme P_n est vraie, on a : $a_n<b_n$, d'où : $b_n-a_n>0$. Ainsi :

$$\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n-a_n)>0$$

Donc : $b_{n+1}-a_{n+1}>0$, autrement écrit :

$$a_{n+1}<b_{n+1}$$

c'est-à-dire que P_{n+1} est vraie (quand P_n l'est).

Conclusion :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ a_n < b_n.}$$

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{a_n + b_n - 2a_n}{2} = \frac{-a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Or, d'après la question précédente, $b_n - a_n > 0$. Donc :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

(d) • Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{a_{n+1}b_n}\right)^2}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}b_n}{a_{n+1}} = b_n.$$

On a bien obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}$) :

$$\boxed{b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}.}$$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= b_{n+1} - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} \quad \text{(d'après le point précédent)} \\ &= b_{n+1}\left(1 - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \\ &= b_{n+1}\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_{n+1}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1. : $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$ et d'après la question 4.(b) : $a_{n+1} - b_{n+1} < 0$.

On en déduit :

$$b_{n+1} - b_n = b_{n+1}\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_{n+1}} < 0.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

5. (a) • Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{b_n} \quad &\text{d'où} \quad \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} \\ &\text{d'où} \quad \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} < 1 \\ &\text{d'où} \quad \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} < \frac{1}{2} \quad \left(\tfrac{1}{2} > 0\right) \\ &\text{d'où} \quad \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n) < \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad (b_n - a_n > 0 \text{ d'après 4.(b)}) \\ &\text{d'où} \quad b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad \text{(d'après la question 4.(a)).} \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout n de $\mathbb{N}$) l'inégalité :

$$\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right).}$$

- Notons P_n la propriété définie par : «$b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^n}$» et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

  Initialisation :
  On a :
  $$b_0 - a_0 = 2 - 1 = 1$$
  et :
  $$\frac{1}{2^0} = \frac{1}{1}.$$
  D'où :
  $$b_0 - a_0 \leq \frac{1}{2^0} \quad \text{(on a même égalité)}$$
  c'est-à-dire que P_0 est vraie.

  Hérédité :
  Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
  Comme P_n est vraie, on a :
  $$b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}.$$
  On en déduit : $\dfrac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}$, c'est-à-dire :
  $$\frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$
  Or, d'après le point précédent : $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}\left(b_n - a_n\right)$, d'où :
  $$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$
  Donc P_{n+1} est vraie.

  Conclusion :
  Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

  Avec la question 4.(b), on peut donc conclure que :
  $$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}.}$$

(b)
- Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (*cf* question 4.(c)), on a :
  $$a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \ldots > a_1 > a_0.$$
  Or, d'après la question 4.(a) : $b_n > a_n$. Donc :
  $$b_n > a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \ldots > a_1 > a_0.$$
  En particulier :
  $$\boxed{b_n > a_0.}$$

- Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (*cf* question 4.(d)), on a :

$$b_n < b_{n-1} < b_{n-2} < \ldots < b_1 < b_0.$$

Or, d'après la question 4.(a) : $a_n < b_n$. Donc :

$$a_n < b_n < b_{n-1} < b_{n-2} < \ldots < b_1 < b_0.$$

En particulier :

$$\boxed{a_n < b_0.}$$

Remarque : en toute rigueur, ces raisonnements devraient être formalisés par des récurrences.

(c) - D'après la question 4.(c), la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et d'après la question précédente, elle est majorée (notamment par $b_0 = 2$), donc :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

- D'après la question 4.(d), la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et d'après la question précédente, elle est minorée (notamment par $a_0 = 1$), donc :

$$\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

- Notons ℓ la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ' la limite de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent d'après les deux points précédents).
On a vu dans la question 5.(a) que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \ell' - \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad (2 > 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty)$$

donc, en passant à la limite (lorsque n tend vers $+\infty$) dans l'encadrement précédent, on obtient :

$$0 \leq \ell' - \ell \leq 0$$

donc : $\ell' - \ell = 0$ *ie* :

$$\ell' = \ell.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ont même limite.}}$$

(d) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et de limite ℓ, tous les termes de cette suite sont inférieurs ou égaux à ℓ. On a donc, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$a_n \leq \ell.$$

De façon similaire, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et de limite ℓ, tous les termes de cette suite sont supérieurs ou égaux à ℓ. On a donc, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$b_n \geq \ell.$$

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n \leq \ell \leq b_n.}$$

Remarque : justifions de façon un peu plus rigoureuse que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$a_n \leq \ell.$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on obtient à l'aide d'une récurrence facile (laissée au lecteur) que, pour tout entier m de $[\![n, +\infty[\![$, on a :

$$a_n \leq a_m.$$

En passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient :

$$a_n \leq \ell.$$

6. D'après la question précédente, on a : $a_1 \leq \ell \leq b_1$ ce qui se réécrit (*cf* question 3)) :

$$\frac{3}{2} \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

Ceci élimine -*cf* valeurs approchées fournies- comme possibilités de limite : $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ qui est strictement inférieur à 1 (donc qui n'appartient pas à $\left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$), $\frac{3}{\pi}$ qui est strictement inférieur à 1 et 3 qui est strictement plus grand que $\sqrt{3}$.
La seule possibilité est que :

$$\boxed{\text{la limite commune des suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.}$$

7. (a) On peut compléter le script *Scilab* de la façon suivante :

```
n=0
a=1
b=2
while b-a>10^-3
     a=(a+b)/2
     b=sqrt(a*b)
     n=n+1
end
disp (n)
```

(b) La valeur de l'entier affiché après exécution du script *Scilab* considéré est :

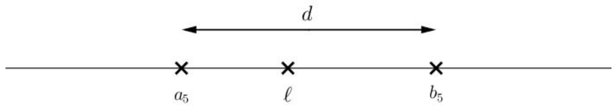
$$\boxed{\text{le plus petit rang } n \text{ pour lequel on a l'inégalité : } \frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}.}$$

Remarque : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 \leq 10^{-3}\, 2^n \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{10^{-3}} \leq 2^n \\
&\Longleftrightarrow \quad 10^3 \leq 2^n \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(1000) \leq \ln(2^n) \quad \text{(par strice croissance de la fonction ln sur }]0, +\infty[) \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(1000) \leq n \ln(2) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} \leq n
\end{aligned}$$

et comme $\frac{\ln(1000)}{\ln(2)} \approx 9,97$ la valeur de l'entier affichée est 10.

8. (a) D'après la question 5.(d) on a : $a_5 \leq \ell \leq b_5$ et aussi $b_5 - a_5 \leq 10^{-3}$ puisque 5 est la valeur affichée par le stript Scilab de la question 7.(a).
Sur un axe gradué, on est donc dans la situation suivante :



avec la distance d qui est inférieure ou égal à 10^{-3}.

Par conséquent, la distance entre a_5 et ℓ est inférieure ou égal à 10^{-3} tout comme la distance entre b_5 et ℓ.
Donc :

$$\boxed{a_5 \text{ et } b_5 \text{ sont des valeurs approchées de } \ell \text{ à moins de } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Remarque : rien n'assure en revanche que la distance entre $b_5 - a_5$ et ℓ et la distance entre $a_6 - a_5$ et ℓ soient «petites». Ces distances sont en fait «très» proches de ℓ car les valeurs de b_5 et a_5 d'une part et celles de a_6 et a_5 d'autre part sont très proches (et donc $b_5 - a_5$ et $a_6 - a_5$ sont très proches de 0).

(b) $\boxed{\text{Lorsque } n \text{ est un entier tel que } \dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}\text{, la question 5.(a) assure que l'on a : } b_n - a_n \leq 10^{-3}}$

$\boxed{\text{mais il est tout à fait possible que l'on ait } b_n - a_n \leq 10^{-3} \text{ «avant» que l'on ait } \dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}.}$

Plus précisément, il est tout à fait possible que le plus petit entier n tel que $b_n - a_n \leq 10^{-3}$ soit strictement inférieur au plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$ (c'est en l'occurence le cas -*cf* remarque de la question 7.(b)-).