

Partie 1 - Intensité de défaut

1. On suppose dans cette question que f_T est continue sur \mathbb{R}^+ .

a) L'énoncé précise bien dans le préambule, que la densité f_t est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* , et on vient de supposer qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+ .

Par stricte positivité de l'intégrale, on peut donc dire que pour tout réel positif t , la probabilité $\mathbb{P}(T > t) = \int_t^{+\infty} f_T(t)dt > 0$ (cette intégrale converge puisque f_T est une densité de probabilité).

b) On pose, pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$: $K_{T,t}(h) = \mathbb{P}_{[T>t]}(T \leq t+h)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$K_{T,t}(h) = \frac{1}{h} \cdot \frac{\mathbb{P}([T > t] \cap [T \leq t+h])}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t+h)}{h} \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} \cdot \frac{1}{1 - F_T(t)}.$$

On sait que la fonction F_T est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , où sa dérivée est la fonction f_T . La première fraction étant le taux d'accroissement de F_T au point t , et la deuxième ne dépendant pas de t , la limite de cette expression quand h tend vers 0^+ existe et vaut :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} \cdot \frac{1}{1 - F_T(t)} = F_T'(t) \cdot \frac{1}{1 - F_T(t)} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}.$$

L'énoncé notait alors $\gamma_T(t)$ le quotient $\frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$.

c) Comme $f_T(t) = F_T'(t)$, le quotient $\frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ apparaît, à un facteur (-1) près, comme un

quotient $\frac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln(|u|)$; la fonction γ_T est continue sur \mathbb{R}_+ comme quotient de fonction qui le sont, donc :

$$\forall t \geq 0, \int_0^t \gamma_T(x)dx = \left[-\ln(|1 - F_T(t)|) \right]_0^t = -\ln(1 - F_T(t)) + \ln(1) = -\ln(1 - F_T(t))$$

puisque $F_T(t) < 1$ et $F_T(0) = 0$, vu que T est une variable aléatoire à valeurs strictement positives. Dans l'égalité obtenue, on isole alors $F_T(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma_T(x)dx = -\ln(1 - F_T(t)) &\iff \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) = 1 - F_T(t) \\ &\iff F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) \quad (1) \end{aligned}$$

En reprenant le principe utilisé pour démarrer la question b), on peut aussi écrire, pour tout $t \geq 0$ et tout $\theta \geq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[T>t]}(T \leq \theta) &= \frac{\mathbb{P}(t < T \leq \theta)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{F_T(\theta) - F_T(t)}{1 - F_T(t)} \\ &= \frac{1 - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)dx\right) - 1 + \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)}{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)} \\ &= 1 - \frac{\exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)dx\right)}{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)} = 1 - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)dx + \int_0^t \gamma_T(x)dx\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_t^\theta \gamma_T(x)dx\right) \end{aligned}$$

2. On repart de la relation : $\forall t \geq 0, \int_0^t \gamma_T(x)dx = -\ln(1 - F_T(t))$.

Puisque F_T est une fonction de répartition, on sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_T(t) = 1^-$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - F_T(t) = 0^+$

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln(1 - F_T(t)) = +\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \gamma_T(x)dx$.

On a donc prouvé que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \gamma_T(x)dx$ est divergente.

On a déjà montré en 1.a) que : $\forall t > 0, \mathbb{P}(T > t) > 0 \iff 1 - F_T(t) > 0 \iff F_T(t) < 1$; de la même manière, puisque f_T est nulle sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive et continue sauf en un nombre fini de points : pour tout $t > 0, F_T(t) = \int_0^t f_T(x)dx > 0$ par stricte positivité de l'intégrale, donc pour tout $t > 0, F_T(t) \in]0; 1[$.

3. Question d'interprétation graphique : si on note respectivement γ_U, γ_V et γ_W les intensités de défaut des trois firmes étudiées : au vu des courbes tracées, il est assez clair que :

$$\int_0^1 \gamma_V(x)dx < \int_0^1 \gamma_U(x)dx < \int_0^1 \gamma_W(x)dx \iff -\int_0^1 \gamma_V(x)dx > -\int_0^1 \gamma_U(x)dx > -\int_0^1 \gamma_W(x)dx$$

$$\iff \exp\left(-\int_0^1 \gamma_V(x)dx\right) > \exp\left(-\int_0^1 \gamma_U(x)dx\right) > \exp\left(-\int_0^1 \gamma_W(x)dx\right)$$

par stricte croissance de l'exponentielle sur \mathbb{R}

$$\iff 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_V(x)dx\right) < 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_U(x)dx\right) < 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_W(x)dx\right)$$

$$\iff F_V(1) < F_U(1) < F_W(1)$$

Ce qui signifie que c'est la firme W qui a la plus faible probabilité de défaut à échéance d'une année.

La deuxième interprétation graphique consiste à comparer les probabilités conditionnelles

$\mathbb{P}_{[T>0.75]}(T \leq 1) = 1 - \exp\left(-\int_{0.75}^1 \gamma_T(x)dx\right)$ des trois firmes :

Cette fois, on peut plutôt lire :

$$\int_{0.75}^1 \gamma_W(x)dx < \int_{0.75}^1 \gamma_U(x)dx < \int_{0.75}^1 \gamma_V(x)dx$$

$$\iff 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_W(x) dx\right) < 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_U(x) dx\right) < 1 - \exp\left(-\int_0^1 \gamma_V(x) dx\right),$$

ce qui signifie que si au bout de 9 mois aucune des trois organisations n'a fait défaut, c'est le firme W qui a la plus faible probabilité de faire défaut à l'échéance des trois mois suivants.

4. On suppose dans cette question que γ_T est constante de valeur λ . La relation (1) obtenue à la question 1.c) se réécrit alors :

$$\forall t \geq 0, \quad F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda dx\right) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

Sachant que $F_T(t) = 0$ pour tout $t < 0$, on reconnaît alors la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ , loi que suit donc T (dans la question précédente, c'était le cas de l'organisation U avec $\lambda = 0.5$). On retrouve ici la propriété de cours selon laquelle la loi exponentielle est *sans mémoire* : l'intensité de défaut ne change pas en fonction de ce qui s'est passé précédemment, elle reste invariante. On rappelle alors, toujours d'après le cours, que $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$.

5. On suppose dans cette question que pour tout $t \geq 0$, $\gamma_T(t) = \lambda t$, où λ est un réel strictement positif fixé.

- a) On a toujours $F_T(t) = 0$ pour tout $t < 0$, et pour tout $t > 0$:

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda x dx\right) = 1 - \exp\left(-\lambda \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{t^2}{2}}.$$

La fonction F_T est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , sauf peut-être en 0, et une densité f_T de T est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda t e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

- b) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt$, est absolument convergente.

Comme la fonction $t \mapsto t f_T(t)$ est nulle sur \mathbb{R}^- (car f_T l'est), et positive sur \mathbb{R}_+^* , cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt$.

La fonction $t \mapsto \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right)$ est continue et positive sur \mathbb{R}^+ , donc $\int_0^1 \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt$ est bien définie et est un réel.

Pour tout $t \geq 1$: $t^3 f_T(t) = \lambda t^4 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées (et du fait que $\lambda > 0$), donc $t f_T(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$: le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t f_T(t) dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} t f_T(t) dt$ aussi, c'est-à-dire que T admet bien une espérance donnée par l'intégrale de l'énoncé de cette question.

- c) On sait qu'une densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.

Pour que le contenu de l'exponentielle corresponde à celle de la question précédente, on cherche donc σ tel que :

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \iff \sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Avec cet écart-type, la variable aléatoire normale correspondante - notons-la Y - a pour espérance 0, pour variance $\frac{1}{\lambda}$ et pour moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{\lambda}$$

d'après la formule de Koenig-Huygens. On peut donc écrire, d'après le théorème de transfert pour $\mathbb{E}(Y^2)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\lambda}t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\lambda\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{\lambda} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Or la fonction $t \mapsto \lambda t^2 \exp\left(-\lambda\frac{t^2}{2}\right)$ est clairement paire sur \mathbb{R} , donc puisque toutes les intégrales impropres concernées convergent, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \iff \mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{2\pi}{4\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

6. On suppose dans cette question que a est un entier, $a \geq 2$ et que :

$$\forall i \in \{1, \dots, a\}, \forall t \in [i-1, i[, \gamma_T(t) = \gamma_i.$$

Cela signifie donc que γ_T est une fonction en escalier :

a) La relation de Chasles permet d'écrire, pour tout $i \in \{1, \dots, a\}$ et tout $t \in [i-1, i[$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma_T(x) dx &= \int_0^1 \gamma_T(x) dx + \int_1^2 \gamma_T(x) dx + \dots + \int_{i-2}^{i-1} \gamma_T(x) dx + \int_{i-1}^t \gamma_T(x) dx \\ &= \int_0^1 \gamma_1 dx + \int_1^2 \gamma_2 dx + \dots + \int_{i-2}^{i-1} \gamma_{i-1} dx + \int_{i-1}^t \gamma_i dx \quad \text{on intègre des constantes!} \\ &= \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{i-1} + \gamma_i(t - (i-1)) \end{aligned}$$

On a sommé des aires de rectangles de largeur 1, sauf le dernier qui est de largeur $t - (i-1)$.

On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, a\}$ et tout $t \in [i-1, i[$:

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x) dx\right) = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k - \gamma_i(t - (i-1))\right) = 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right).$$

b) Pour tout réel $t \in [0, a[$, il existe un unique entier $i \in \{1, \dots, a\}$ tel que $t \in [i-1, i[$: par définition de la partie entière, c'est l'unique entier tel que $i-1 = [t] \iff i = [t] + 1$.

Il suffit alors de reprendre la formule précédente avec cette valeur de i , et on obtient bien :

$$\forall t \in [0, a[, \quad F_T(t) = 1 - \exp\left(-\gamma_{[t]+1}(t - [t])\right) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{[t]} \gamma_k\right) \quad (2)$$

c) On suppose que le vecteur Scilab `gammaTab` contient les valeurs $\gamma_1, \dots, \gamma_a$.

La fonction partie entière est connue en Scilab : c'est `floor`. Le script suivant utilise implicitement la propriété de l'exponentielle : $\exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right) = \prod_{k=1}^{i-1} \exp(-\gamma_k)$ pour construire ce produit facteur par facteur grâce à la boucle `for` :

```

1  function r = F(t,gammaTab)
2      produit = 1 // commencer par l'élément neutre pour la
multiplication
3      i = floor(t) + 1 // voir la question précédente
4      for k = 1 : (i-1)
5          produit = produit * exp(-gammaTab(k)) // chaque boucle rajoute un
facteur
6      end
7      r = 1-exp(-gammaTab(i) * (t-(i-1))) * produit
8  endfunction

```

Partie 2 - Modélisation du prix du CDS

7. a) Des données de l'énoncé qui introduit cette partie, on retient les informations suivantes qui concernent le capital U que B verse à A :
- D'abord, B ne verse quelque chose à A que si un défaut de paiement se produit *avant* l'instant m , d'où le facteur $\mathbb{1}_{[T \leq m]}$ qui vaut 1 si cet événement se produit, et 0 sinon.
 - On sait que T représentant l'instant aléatoire de défaut de paiement, A reçoit $(1 - \delta(T))$ euro de B par euro investi dans l'organisation C , et ce à l'instant T .
 - Cette somme $(1 - \delta(T))$ reçue de B à l'instant T , est alors immédiatement placée par A sur l'actif non risqué jusqu'à maturité, donc pendant un temps égal à $(m - T)$, ce qui rapporte $e^{r(m-T)}$ euros par euro placé.
- À maturité, ce capital, s'il est versé, vaut donc $(1 - \delta(T)) \cdot e^{r(m-T)}$.

On a donc bien justifié que :

$$U = (1 - \delta(T))e^{r(m-T)}\mathbb{1}_{[T \leq m]} = (1 - \delta(T))e^{r(m-T)}\mathbb{1}_{]0, m]}(T)$$

En effet, puisque T est à valeurs strictement positives : $(T \leq m) \iff T \in]0, m]$.

- b) La fonction $G : t \mapsto (1 - \delta(t))e^{r(m-t)}\mathbb{1}_{]0, m]}(t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ (car δ est continue sur \mathbb{R}_+ , de même que $t \mapsto e^{r(m-t)}$, tandis que $\mathbb{1}_{]0, m]}$ est une fonction en escaliers continue par morceaux).

D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire U qui est égale à la composée $G(T)$, admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)f_T(t)dt$ est absolument convergente.

Comme G est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ et nulle en-dehors de $]0, m]$, la convergence simple et la convergence absolue de l'intégrale sont confondues et assurées, de sorte que U admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^m (1 - \delta(t))e^{r(m-t)}f_T(t)dt = e^{rm} \int_0^m (1 - \delta(t))e^{-rt}f_T(t)dt.$$

8. a) Au prix de s euros par an, sur m années, le montant total de la prime versée à B est égal à ms ; cette prime est versée en N échéances toute identiques, les versements valent donc $\frac{sm}{N} = s\theta$ chacun.
- b) Pour tout $i \in \{1, \dots, N - 1\}$, si le défaut de paiement survient entre les $(i - 1)$ -ième et i -ième échéances : alors A a effectué le versement 1 de $s\theta$ euros à l'instant θ , qui immédiatement placé par B jusqu'à maturité, a rapporté in fine $e^{r(m-\theta)}$ euro par euro investi, donc $s\theta e^{r(m-\theta)}$ euros pour cette annuité; si $i \geq 2$, A a aussi effectué le deuxième versement de $s\theta$ euros à l'instant 2θ , qui immédiatement placé par B a rapporté $e^{r(m-2\theta)} \cdot s\theta$ euros in fine, et ainsi de suite jusqu'au i -ième

versement à l'instant $i\theta$, toujours de $s\theta$ euros, qui rapporte $e^{r(m-i\theta)} \cdot s\theta$ euros à maturité.

Tous ces gains s'additionnent à la fin, et on y rajoute aussi l'argent que A verse à B pour la période $[i\theta, (i+1)\theta]$ interrompue : le temps écoulé dans cette période avant le défaut de paiement est égal à $T - i\theta$, A verse donc $s(T - i\theta)$ euros immédiatement placés pour un temps égal à $(m - T)$, et qui rapporte donc $e^{r(m-T)}$ euros par euro investi. Tous comptes faits, la valeur à maturité du capital que A aura versé à B si le défaut de paiement intervient entre les échéances $i\theta$ et $(i+1)\theta$ est bien donné par la formule :

$$\sum_{k=1}^i s\theta e^{r(m-k\theta)} + s e^{r(m-T)}(T - i\theta) = s \cdot \left(\theta \sum_{k=1}^i e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T - i\theta) \right).$$

Lorsque $[T \leq \theta]$ est réalisé : le défaut de paiement a lieu avant même le premier versement. Dans ce cas la règle énoncé stipule que A verse à B la somme de sT euros, qui sont investis par B pendant un temps égal à $m - T$, ce qui donne un capital final de $sT e^{r(m-T)}$ euros.

Si $[T > N\theta]$ est réalisé : cela signifie que le défaut de paiement a eu lieu après le passage de la maturité, puisque $N\theta = N \cdot \frac{m}{N} = m$.

Dans ce cas, A a effectué tous ses versements auprès de B , et le capital correspondant à maturité est donné par la formule :

$$\sum_{k=1}^N s\theta e^{r(m-k\theta)}$$

- c) Dans la formule proposée par l'énoncé pour le capital V versé par A à B : si le défaut de paiement a lieu entre les échéances $i\theta$ et $(i+1)\theta$, alors dans la première somme d'indices strictement supérieurs à i sont nuls, et dans la deuxième un seul terme est non nul : celui d'indice $k = i$. Le capital a alors pour valeur :

$$s \left(\theta \sum_{k=1}^i e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T - i\theta) \right),$$

ce qui correspond bien à ce qui a été obtenu à la question précédente.

Notons que la formule est encore vraie si $[T \leq \theta]$ est réalisé : dans ce cas tous les termes de la première somme sont nuls, et de la deuxième ne subsiste que le terme pour $k = 0$. On obtient alors la valeur finale $sT e^{r(m-T)}$, qui est bien ce qui a été obtenu précédemment.

Si au contraire $[T > N\theta] = [T > m]$ est réalisé, alors on est arrivé à maturité sans connaître de défaut de paiement : dans ce cas subsistent de la formule proposée, tous les termes de la première somme, où les indicatrices valent toutes 1, et il ne reste rien de la deuxième somme. Le capital

final est donc $s\theta \sum_{k=1}^N e^{r(m-k\theta)}$, ce qui correspond bien à ce qui a été obtenu précédemment.

La formule finale pour le capital versé par A à B , est donc bien :

$$V = s \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{r(m-k\theta)} \mathbb{1}_{[T > k\theta]} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{r(m-T)}(T - k\theta) \mathbb{1}_{[k\theta < T \leq (k+1)\theta]} \right)$$

ou encore :

$$V = s e^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} \mathbb{1}_{]k\theta, +\infty[}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rT}(T - k\theta) \mathbb{1}_{]k\theta, (k+1)\theta]} \right)$$

puisque : $T > k\theta \in T \in [k\theta, +\infty[$ et $k\theta < T \leq (k+1)\theta \iff T \in]k\theta, (k+1)\theta]$.

- d) À nouveau, V est une fonction $H(T)$ de la variable T , où H est positive et continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ : toujours d'après le théorème de transfert, V admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} \mathbb{1}_{]k\theta, +\infty[}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rt}(t - k\theta) \mathbb{1}_{]k\theta, (k+1)\theta]} \right) f_T(t) dt,$$

est (absolument) convergente. La linéarité de l'intégrale ramène le problème à l'étude de chacune des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rk\theta} \mathbb{1}_{]k\theta, +\infty[}(t) f_T(t) dt = e^{-rk\theta} \int_{k\theta}^{+\infty} f_T(t) dt$: ces intégrales convergent toutes puisque f_T est une densité de probabilité, et valent chacune $e^{-rk\theta} \mathbb{P}(T > k\theta) = e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta))$.

On doit aussi étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rt} (t - k\theta) \mathbb{1}_{]k\theta, (k+1)\theta[}(t) f_T(t) dt = \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt$: il s'agit bien d'une intégrale convergente, puisqu'on intègre sur un segment une fonction continue par morceaux.

Toutes les intégrales convergent, donc V admet une espérance qui vaut bien, par linéarité :

$$\mathbb{E}(V) = se^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt \right).$$

9. Si on veut que la prime annuelle soit équitable pour A et B , il faut que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{V}$: en moyenne, A verse à B autant qu'il reçoit en retour.

On a bien :

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V)$$

$$\iff e^{rm} \int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt = s \cdot e^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt \right)$$

$$\iff s = \frac{\int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt} \quad (3)$$

10. a) Une pure question de cours ! Si g est une fonction continue sur le segment $[0, m]$, alors d'après le théorème sur les *sommes de Riemann* :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N g\left(k \frac{m}{N}\right) = \int_0^m g(t) dt.$$

b) La fonction $g : t \mapsto e^{-rt} (1 - F_T(t))$ est bien continue (car F_T et \exp le sont) sur l'intervalle $[0, m]$, donc en application directe du théorème précédent :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N e^{-rk \frac{m}{N}} (1 - F_T(k \frac{m}{N})) = \int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt.$$

c) Pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$ et pour tout $t \in [k\theta, (k+1)\theta]$, en rappelant que $\theta = \frac{m}{N}$, on a :

$$-rt \leq 0 \text{ donc } 0 < e^{-rt} \leq 1 \text{ et } k \frac{m}{N} \leq t \leq (k+1) \frac{m}{N} \iff 0 \leq t - k \frac{m}{N} \leq \frac{m}{N},$$

donc par produit d'inégalités de même sens entre facteurs positifs :

$$0 \leq e^{-rt} \left(t - k \frac{m}{N} \right) \leq \frac{m}{N} \iff 0 \leq e^{-rt} \left(t - k \frac{m}{N} \right) f_T(t) \leq \frac{m}{N} f_T(t)$$

puisque la densité f_T est positive sur \mathbb{R}_+ . Les fonction concernées sont continue (par morceaux) sur l'intervalle $[k\theta, (k+1)\theta]$, et $k\theta < (k+1)\theta$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} \left(t - k \frac{m}{N} \right) f_T(t) dt \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \frac{m}{N} f_T(t) dt = \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt$$

Le passage à la somme dans ces inégalités quand k varie de 0 à $N - 1$ donne alors :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt \leq \frac{m}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt.$$

Grâce à la relation de Chasles, on peut réécrire le même de droite sous la forme :

$$\frac{m}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt = \frac{m}{N} \int_0^{N\theta} f_T(t) dt = \frac{m}{N} \int_0^m f_T(t) dt = \frac{m}{N} \underbrace{\mathbb{P}(T \leq m)}_{\leq 1} \leq \frac{m}{N}.$$

Puisque $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m}{N} = 0$, le théorème d'encadrement assure bien que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt = 0.$$

En reprenant la formule (3) obtenue à la question 9., et grâce à 10.b) où $\frac{m}{N} = \theta$, on a bien :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt} = \frac{\int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}.$$

d) Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ et si δ est une fonction constante, alors :

$$\int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt = (1 - \delta) \int_0^m e^{-rt} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda(1 - \delta) \int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt$$

$$\text{et } \int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt = \int_0^m e^{-rt} \cdot e^{-\lambda t} dt = \int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt$$

Et donc, sans avoir besoin de calculer explicitement cette intégrale qu'on retrouve deux fois et qu'on peut donc simplifier dans la fraction :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N = \lambda(1 - \delta).$$

Partie 3 - Cotation du CDS et intensité de défaut

11. D'après les hypothèses faites dans cette partie : pour tout $t \in [0; 1[$,

$$\gamma_T(t) = \gamma_1 \iff \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \gamma_1 \iff f_T(t) = \gamma_1(1 - F_T(t)),$$

$$\text{de sorte que : } s_1 = (1 - \delta) \frac{\int_0^1 e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^1 e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt} = (1 - \delta) \frac{\gamma_1 \int_0^1 e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}{\int_0^1 e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt},$$

$$\text{donc : } s_1 = (1 - \delta) \gamma_1 \iff \gamma_1 = \frac{s_1}{1 - \delta}.$$

12. a) En reprenant la formule obtenue à la question 6.a), encore valide ici vues les hypothèses faites dans cette partie : pour tout $i \in \{1, \dots, a\}$ et pour tout $t \in [i-1; i[$,

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right) = 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \prod_{k=1}^{i-1} \exp(-\gamma_k) \\
 &= 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \exp(-\alpha_k - r) \\
 &= 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \exp(-(i-1)r) \prod_{k=1}^{i-1} \frac{A_k}{A_{k-1}} \\
 &= 1 - \exp(-(\alpha_i - r) \cdot (t - (i-1)) - (i-1)r) \frac{A_{i-1}}{A_0} = 1 - A_{i-1} \exp(-\alpha_i(t - (i-1)) + rt) \\
 &= 1 - A_{i-1} \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) \cdot e^{rt}
 \end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $e^{-rt}(1 - F_T(t)) = A_{i-1} \exp(-\alpha_i(t - (i-1)))$.

- b) De ce qui précède et de la définition de s_k , on déduit que pour tout $k \in \{1, \dots, a\}$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^k e^{-rt} f_T(t) dt &= \frac{s_k}{1-\delta} \int_0^k e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt \\
 \iff \sum_{i=1}^k \int_{i-1}^i e^{-rt} (1 - F_T(t)) \gamma_T(t) dt &= \frac{s_k}{1-\delta} \sum_{i=1}^k \int_{i-1}^i A_{i-1} \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) \\
 \iff \sum_{i=1}^k \int_{i-1}^i A_{i-1} \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) \gamma_i dt &= \frac{s_k}{1-\delta} \sum_{i=1}^k \int_{i-1}^i A_{i-1} \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) \\
 \iff \sum_{i=1}^k A_{i-1} \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i \right) \int_{i-1}^i \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) dt &= 0.
 \end{aligned}$$

- On pose, pour $k \in \{1, \dots, a\}$, $w_k = r + \frac{s_k}{1-\delta}$ et $\theta_k = \frac{1}{w_k}$.

- c) Pour tout entier $i \in \{1, \dots, a\}$:

$$\int_{i-1}^i \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) dt = \left[-\frac{1}{\alpha_i} \exp(-\alpha_i(t - (i-1))) \right]_{i-1}^i = \frac{-\exp(-\alpha_i) + 1}{\alpha_i},$$

donc la relation finale obtenue à la question précédente se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \left(\frac{s_k}{1-\delta} - \gamma_i \right) \cdot \frac{A_{i-1} - A_{i-1} \exp(-\alpha_i)}{\alpha_i} = 0 &\iff \sum_{i=1}^k (w_k - r - \gamma_i) \cdot \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = 0 \\
 &\iff \sum_{i=1}^k (w_k - \alpha_i) \cdot \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = 0.
 \end{aligned}$$

En séparant en deux la somme par développement du premier facteur de son terme général, on remarque alors que cette dernière relation se réécrit :

$$\sum_{i=1}^k w_k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} - \sum_{i=1}^k (A_{i-1} - A_i) = 0 \iff w_k \sum_{i=1}^k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} - (A_0 - A_k) = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \frac{1 - A_k}{w_k}$$

Ce qui donne bien, puisque $\theta_k = \frac{1}{w_k}$: $\theta_k(1 - A_k) = \sum_{i=1}^k \frac{A_{i-1} - A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k A_{i-1} \cdot \frac{1 - \exp(-\alpha_i)}{\alpha_i}$

puisque $A_i = A_{i-1} \exp(-\alpha_i)$.

d) En utilisant la relation : $A_k = A_{k-1} \exp(-\alpha_k)$ dans le membre de gauche de l'égalité précédente, et en isolant le dernier terme de la somme du membre de droite, on obtient finalement, pour tout $k \in \{2, \dots, a\}$:

$$\theta_k(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} A_{i-1} \frac{1 - e^{-\alpha_i}}{\alpha_i}}_{=\theta_{k-1}(1 - A_{k-1})} + A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} \iff \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}) - A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}).$$

13. Si pour un $k \in \{2, \dots, a\}$, $s_{k-1} = s_k$, alors pour ce même k :

$$r + \frac{s_k}{1 - \delta} = r + \frac{s_{k-1}}{1 - \delta} \iff w_k = w_{k-1} \iff \frac{1}{w_k} = \frac{1}{w_{k-1}} \iff \theta_k = \theta_{k-1},$$

de sorte que la relation de la question précédente se réécrit :

$$\theta_k(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}) - A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_k(1 - A_{k-1}) \iff \theta_k \cdot A_{k-1}(1 - e^{-\alpha_k}) = A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k}$$

Puisque A_{k-1} est un produit d'exponentielles, et puisque $\alpha_k = r + \gamma_k$ est strictement positif, alors $e^{-\alpha_k} < 1 \iff 1 - e^{-\alpha_k} > 0$ donc on peut simplifier l'égalité précédente par les facteurs communs A_{k-1} et $1 - e^{-\alpha_k}$, ce qui donne :

$$\theta_k = \frac{1}{\alpha_k} \iff w_k = \alpha_k \iff r + \frac{1}{1 - \delta} = r + \gamma_k \iff \gamma_k = \frac{s_k}{1 - \delta}, \quad CQFD$$

• On définit, pour tout $k \in \{1, \dots, a\}$, la fonction φ_k sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi_k(t) = \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-t}) - A_{k-1} \cdot \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

14. a) La fonction φ_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient et somme de fonctions de référence qui le sont, avec :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0; +\infty[, \quad \varphi'_k(t) &= \theta_k \cdot A_{k-1}e^{-t} - A_{k-1} \cdot \frac{e^{-t} \cdot t - (1 - e^{-t}) \cdot 1}{t^2} = \frac{A_{k-1}}{t^2} \cdot (t^2\theta_k e^{-t} - te^{-t} + 1 - e^{-t}) \\ &= \frac{A_{k-1}}{t^2} \cdot ((\theta_k t^2 - t - 1) \cdot e^{-t} + 1), \quad CQFD \end{aligned}$$

b) La fonction $h : t \mapsto 1 - (t + 1)e^{-t}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, avec :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad h'(t) = 0 - (1 \cdot e^{-t} + (t + 1) \cdot (-e^{-t})) = te^{-t} > 0$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et comme $h(0) = 1 - e^0 = 0$, alors on peut écrire que :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad h(t) > 0 \iff 1 - (t + 1)e^{-t} > 0.$$

En remarquant alors que : $\forall t \in]0; +\infty[, \quad \varphi'_k(t) = \frac{A_{k-1}}{t^2} \cdot (\theta_k t^2 + h(t))$, où A_{k-1} et θ_k sont des paramètres strictement positifs, on en déduit que $\varphi'_k(t) > 0$ pour tout $t > 0$, donc que φ_k est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) Limite en 0^+ : $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle en zéro.

D'autre part, l'équivalent classique $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donne, puisque $\lim_{t \rightarrow 0} (-t) = 0$:

$e^{-t} - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \iff 1 - e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1$, de sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_k(t) = \theta_k(1 - A_{k-1}) - A_{k-1}.$$

Limite en $+\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow 0} 1 - e^{-t} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 0$, de sorte que par opérations sur les limites :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_k(t) = \theta_k.$$

t	0	$+\infty$
φ_k	$\theta_k(1 - A_{k-1}) - A_{k-1}$	θ_k

15. a) L'énoncé disait en préambule de la partie 3, que $s_{k-1} \leq s_k$ pour tout $k \in \{2, \dots, a\}$, donc puisque $r > 0$ et $0 \leq \delta < 1 \implies 1 - \delta > 0$:

$$r + \frac{s_{k-1}}{1 - \delta} \leq r + \frac{s_k}{1 - \delta} \iff w_{k-1} \leq w_k \iff \frac{1}{w_{k-1}} \geq \frac{1}{w_k} \iff \theta_{k-1} \geq \theta_k.$$

On a alors :

$$\varphi_k(w_k) = \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-w_k}) - A_{k-1} \frac{1 - e^{-w_k}}{w_k} = \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-w_k} - A_{k-1}(1 - e^{-w_k})) = \theta_k(1 - A_{k-1}),$$

donc on a bien : $\varphi_k(w_k) \leq \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$ puisque $0 < A_{k-1} < 1 \implies 1 - A_{k-1} > 0$.

b) Il suffit de remplacer t par α_k dans l'expression de φ_k pour obtenir le membre de gauche de l'égalité démontrée en 12.d) : pour tout $k \in \{2, \dots, a\}$,

$$\varphi_k(\alpha_k) = \theta_k(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}) - A_{k-1} \frac{1 - e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}).$$

Or comme on l'a vu dans le tableau de la fonction φ_k , strictement croissante sur $]0; +\infty[$: sa limite en $+\infty$ vaut θ_k et est par conséquent un majorant strict de la fonction sur tout son domaine : $\forall t \in]0; +\infty[, \varphi_k(t) < \theta_k$. En particulier : pour tout $k \in \{2, \dots, a\}$,

$$\varphi(\alpha_k) < \theta_k \iff \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) < \theta_k.$$

Au vu du résultat de 15.a), on remarque aussi que :

$$\varphi_k(w_k) \leq \varphi_k(\alpha_k) \iff w_k \leq \alpha_k \iff r + \frac{s_k}{1 - \delta} \leq r + \gamma_k \iff \frac{s_k}{1 - \delta} \leq \gamma_k.$$

La première équivalence a été obtenue grâce à la stricte croissance de φ_k sur $]0; +\infty[$ (les antécédents par φ_k sont rangés dans le même ordre que les images).

c) Réciproquement, pour tout $k \in \{2, \dots, a\}$, δ et r étant donnés : si on a déterminé $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ alors

$A_{k-1} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1} (r + \gamma_i)\right)$ est connu et strictement positif : on a toujours $\theta_k(1 - A_{k-1}) - A_{k-1} \leq \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) < \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$, donc la condition $\theta_k > \theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$ suffit pour affirmer que $\theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$ appartient à l'intervalle-image $\varphi_k(]0; +\infty[)$, où φ_k est strictement croissante et continue sur $]0; +\infty[$, et dont l'expression ne dépend que de paramètres connus : le théorème de la bijection assure alors que α_k est bien défini comme unique antécédent de $\theta_{k-1}(1 - A_{k-1})$ par φ_k .

Ainsi $\alpha_k = r + \gamma_k$ est uniquement déterminé : il en est donc de même de $\gamma_k = \alpha_k - r$.

16. a) Avec l'approximation de e^{-t} par $1 - t$ pour obtenir la relation (4), le réel γ_k est "contenu" dans le terme $\alpha_k = r + \gamma_k$, qu'on cherche donc à isoler :

$$\theta_k(1 - A_{k-1}(1 - \alpha_k)) - A_{k-1} = \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) \iff 1 - A_{k-1}(1 - \alpha_k) = \frac{\theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) + A_{k-1}}{\theta_k}$$

soit :

$$\frac{\theta_k - \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) - A_{k-1}}{\theta_k} = A_{k-1}(1 - \alpha_k) \iff \alpha_k = 1 - \frac{\theta_k - \theta_{k-1}(1 - A_{k-1}) - A_{k-1}}{A_{k-1}\theta_k}$$

Soit :
$$\gamma_k = \frac{(1 - A_{k-1})(\theta_k - \theta_{k-1}) + A_{k-1}}{A_{k-1}\theta_k} - r.$$

b) Le script Scilab suivant réalise le calcul de proche en proche des γ_k , en "remplissant" l'une après l'autre les cases d'un vecteur-ligne Gamma de longueur a (fourni par l'utilisateur et paramètre de la fonction) :

```

1  function G = gam(a,r,delta,S) // le vecteur S contient les valeurs s1,...,sa
2      Gamma = zeros(1,a)
3      Gamma(1) = S(1)/(1-delta) // d'après 11.
4      A = exp(-r-Gamma(1)) // initialisation de la suite (A_i)
5      for k = 2 : a
6          thetak = 1/(r+S(k)/(1-delta))
7          thetakmoinsun = 1/(r+S(k-1)/(1-delta))
8          Gamma(k) = ((1-A)*(thetakmoinsun - thetak) + A)/(A*thetak)-r
9          A = A*exp(-r-Gamma(k)) // on définit A_k pour le calcul suivant
10     end
11     G = Gamma
12 endfunction

```

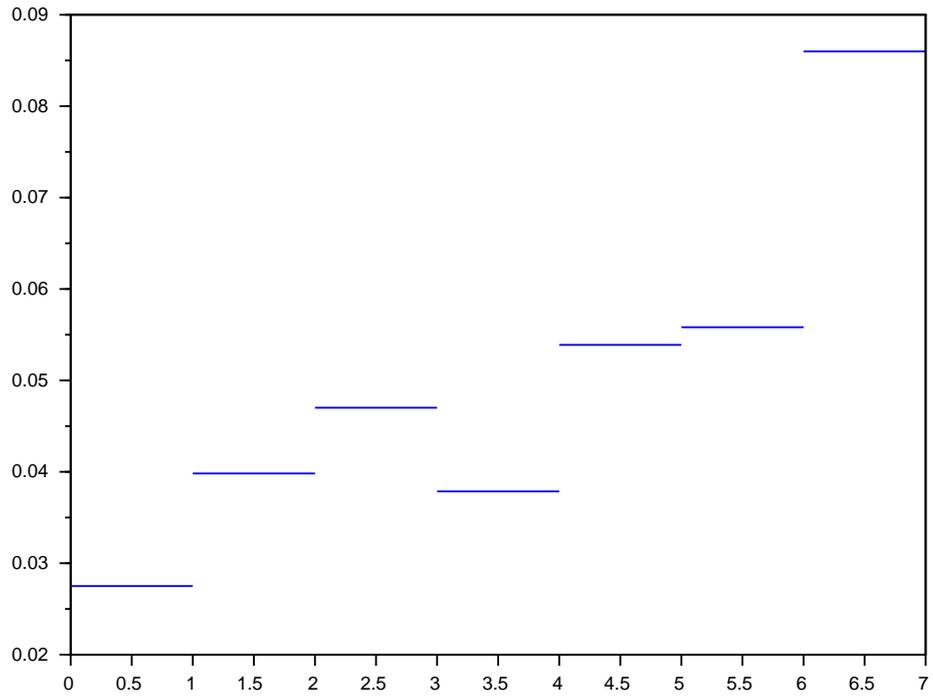
Les commandes supplémentaires ci-dessous permettent de tracer la fonction γ_T , qui est donc ici une fonction en escalier, les $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 7}$ prenant les valeurs suivantes :

$$\gamma_1 = 0.0275, \gamma_2 = 0.0398208, \gamma_3 = 0.0470109, \gamma_4 = 0.0378571, \gamma_5 = 0.0538863, \gamma_6 = 0.0558182, \gamma_7 = 0.08599$$

```

1  G = gam(7,0.03,0.3,[0.01925,0.0235,0.0265,0.0265,0.0285,0.03,0.0335])
2  for i=1:7
3      plot([i-1,i],[G(i),G(i)])
4  end

```



* * * **FIN DU SUJET** * * *