Code sujet : 295

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 4 Mai 2022, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, défini par :

$$\text{pour tous } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.$$

On confond les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

on a, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $\qquad \langle x, y \rangle = {}^{\mathrm{t}}X\, Y.$

Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on note $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Enfin, on rappelle qu'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque P est inversible et que $P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P$.

PARTIE A : Mise en place d'un exemple

On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = {}^{\mathrm{t}}A\, A.$$

1. **a.** La matrice A est-elle inversible ? Déterminer le rang de A.

b. Calculer les matrices A^2 et A^3 et vérifier : $\qquad A^3 - A^2 + A = 0.$

c. En déduire les valeurs propres réelles de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. **a.** Justifier que la matrice B est diagonalisable.

b. On pose : $\qquad R = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

i. Vérifier que la matrice R est orthogonale.

ii. Montrer que la matrice ${}^{\mathrm{t}}R\, B\, R$ est diagonale.

****

Dans toute la suite du problème, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \mathrm{rg}(M)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

PARTIE B : Valeurs singulières d'une matrice

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice ${}^tM$ et $h = g \circ f$.

3. Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, g(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, h(x)\rangle = \|f(x)\|^2$.

4. **a.** Soit x appartenant à $\mathrm{Ker}(h)$. En calculant $\langle x, h(x)\rangle$, montrer que x appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

b. En déduire : $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f)$ puis $\mathrm{rg}(h) = r$.

5. **a.** Justifier que l'endomorphisme h est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h.

b. Montrer que les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

6. Justifier que la matrice P est orthogonale et montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positifs ou nuls tels que : ${}^tM\,M = P\,D\,{}^tP$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant positifs ou nuls, on pose, pour tout i de $[\![1\,;n]\!]$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
Les réels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont appelés **les valeurs singulières de la matrice M.**

7. Dans cette question uniquement, on suppose que la matrice M est symétrique.
Déterminer, dans ce cas, les valeurs singulières de M en fonction de ses valeurs propres.

8. Justifier que la matrice D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

Dans toute la suite, on suppose que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont non nuls et donc que les réels $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ sont nuls.

9. **a.** Pour tout i de $[\![1\,;r]\!]$, justifier que $f(\varepsilon_i)$ est non nul et calculer $\|f(\varepsilon_i)\|$.

b. On pose, pour tout i de $[\![1\,;r]\!]$, $u_i = \dfrac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|}\,f(\varepsilon_i)$.
Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est une famille orthonormée.

c. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée) est :

$$\mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0).$$

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Δ la matrice $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$.

10. Justifier que la matrice Q est orthogonale et, en calculant de deux façons différentes la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée), montrer : $M = Q\,\Delta\,{}^tP$.

11. **Retour sur l'exemple :**
Déterminer deux matrices orthogonales P_1 et Q_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $A = Q_1\,\Delta_1\,{}^tP_1$.

PARTIE C : Pseudo-inverse d'une matrice et application

On reprend les notations de la partie B.

Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ tels que :

$$M = Q\,\Delta\,{}^{t}P \quad \text{avec} \quad \Delta = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0).$$

On définit la matrice M^+ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\qquad M^+ = P\,\mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right)\,{}^{t}Q.$

La matrice M^+ est appelée **la matrice pseudo-inverse de M.**

On note f^+ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M^+ et $p = f \circ f^+$.

12. Justifier que, si M est inversible, alors $M^{-1} = M^+$.

13. a. Simplifier le produit $M\,M^+$.

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

c. Montrer : $\quad \mathrm{rg}(M\,M^+) = r \quad$ puis en déduire : $\quad \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(f)$.

14. Application : Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Im}(f)$.

Il n'existe donc pas de vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.

On cherche alors à déterminer un vecteur x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\qquad \|y - f(x^*)\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|$.

a. Justifier : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|y - p(y)\| \leqslant \|y - f(x)\|$.

b. Proposer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

Montrer que, lorsque $r < n$, il existe au moins deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

15. Retour sur l'exemple : On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A et on considère $y = (1, 1, 1)$.

a. Déterminer $\mathrm{Im}(f_1)$ et vérifier que y n'appartient pas à $\mathrm{Im}(f_1)$.

b. Montrer : $\quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \|y - f_1(x)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1$.

c. En déduire deux vecteurs distincts x^* et z^* de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\|y - f_1(x^*)\| = \|y - f_1(z^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\|.$$

PROBLÈME 2

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k,n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé **le nombre de Catalan d'ordre** n, défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. Calculer les réels c_0, c_1 et c_2.

2. **a.** Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad c_n = \displaystyle\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}\, c_n$.

4. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function c = catalan(n)` qui, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de c_n.

5. **a.** Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. **a.** Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad 4\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leqslant \dfrac{c_{k+1}}{c_k} \leqslant 4\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$.

b. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{4}\dfrac{4^n}{n\sqrt{n}} \leqslant c_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{4^n}{n\sqrt{n}}$.

7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k\, c_{n-k} \quad$ et $\quad T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, c_k\, c_{n-k}$.

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad T_n = \dfrac{n}{2} S_n$

(on pourra effectuer le changement d'indice $i = n-k$ dans la somme définissant T_n).

b. Montrer à l'aide de l'égalité de la question **3.** : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4\,T_n + 2\,S_n$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = c_{n+1}$.

On a donc montré : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad c_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k\, c_{n-k}$.

8. **a.** Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n\, x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right]$: $\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n \quad$ et $\quad g(x) = 2xf(x)$.

On **admet** que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right]$.

b. Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$, $\left(\sum_{i=0}^{N} c_i\, x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} c_j\, x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k\, c_{n-k}\right)x^n$,

montrer : $\qquad \big(f(x)\big)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, x^{n-1}$.

c. En déduire : $\qquad \forall x \in \left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right],\ \ \big(g(x)\big)^2 = 2g(x) - 4x$.

d. Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1\,;1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right],\quad g(x) = 1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right[$.

e. En déduire : $\qquad \forall x \in \left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right],\ \ g(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$.

PARTIE B : Loi du demi-cercle

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2\,;2],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

9. **a.** Montrer : $\qquad \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^2\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

b. En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2\sin(t)$, la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Montrer que φ est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

11. **a.** Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad \mathbf{E}(X^{2n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X^{2n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^2 x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\qquad u_n = \mathbf{E}(X^{2n})$.

i. Calculer u_0.

ii. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3}\big(4u_n - u_{n+1}\big)$.

iii. En déduire : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = c_n$.

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0\,;1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1-p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement P-P-F-P-F-F-P-F-$\cdots$ (où P désigne Pile et F désigne Face), alors la variable aléatoire T est égale à 6.

12. a. Écrire une fonction Scilab, d'en-tête `function T = simule(p)` qui prend en argument le réel p, qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

b. On exécute le script Scilab suivant :

```
for i = 1 : 3
    L = zeros(1,3)
    for j = 1 : 3
        m = 0
        for k = 1 : 1000
            m = m + simule(i/4)
        end
        L(j) = m/1000
    end
    disp(L)
end
```

et on obtient les résultats suivants :

1.392	1.478	1.41
100.572	71.172	125.28
1.454	1.544	1.414

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

13. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(T = 2n+1) = 0.$

14. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :
- à l'issue du $(2n)$-ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours **strictement supérieur** au nombre de Face tout au long des $(2n-1)$ premiers lancers ;

et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad d_n = \mathrm{Card}(D_n)$.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :
- à l'issue du $(2n)$-ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours **supérieur ou égal** au nombre de Face tout au long des $(2n-1)$ premiers lancers ;

et on pose $\quad e_0 = 1 \quad$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad e_n = \mathrm{Card}(E_n)$.

Par exemple, $D_3 = \{\textit{P-P-P-F-F-F}\,,\ \textit{P-P-F-P-F-F}\}$

et $E_3 = \{\textit{P-F-P-F-P-F}\,,\ \textit{P-F-P-P-F-F}\,,\ \textit{P-P-F-F-P-F}\,,\ \textit{P-P-F-P-F-F}\,,\ \textit{P-P-P-F-F-F}\}$;

ainsi $d_3 = 3$ *et* $e_3 = 5$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier : $\quad d_n = e_{n-1}$.

b. **i.** Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k\, e_{n-k}$.

ii. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e_k\, e_{n-k}$.

iii. Montrer alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = c_n \quad$ où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n.

c. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = 2n) = 2\, c_{n-1}\, p^n\, (1-p)^n$.

15. **a.** Montrer que, pour tout x de $[-1\,;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(T = n)\, x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $[-1\,;1]$: $\quad G_T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)\, x^n$.

b. Montrer : $\quad p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4} \quad$ et $\quad \left(p(1-p) = \dfrac{1}{4} \iff p = \dfrac{1}{2}\right)$.

c. Montrer : $\quad \forall x \in [-1\,;1], \quad G_T(x) = \mathbf{P}(T = 0) + g\Big(p(1-p)x^2\Big)$,

où g est la fonction définie dans la question **A.8.**

d. En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer : $\quad \mathbf{P}(T = 0) = \big|2p - 1\big|$.

Interpréter ce résultat lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

16. En utilisant le résultat de la question **A.6.b**, montrer :

a. si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.

b. si $p = \dfrac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

• FIN •

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1132 – D'après documents fournis