

ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

500286

BEIGNIER

BAPTISTE

29/12/2002

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

500686



Né(e) le

29 / 12 / 2002

Signature

Nom

BEIGNIER

Prénom(s)

BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Ecricone

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01

17

Numéro de table

006

Exercice 1Partie A

$$1/A) PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{3I_3}$$

b) $PQ = 3I_3$ donc P est inversible et son inverse vérifie
 P^{-1} est $\frac{1}{3}Q$

$$2/A) \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}A_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}A_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } MX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}A_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}A_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$

Initialisation: $M^0 X_0 = I X_0 = X_0$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $X_n = M^n X_0$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= M X_n \\ &= M M^n X_0 \\ &= M^{n+1} X_0 \end{aligned} \quad \text{et la propriété est héréditaire}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

$$3) a) 4M - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4M - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4M - I) / (4M - 4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{O_3}$$

b) On voit que $(4M - I) / (4M - 4I) = O_3$

Ainsi $(4M - 1) / (4M - 4)$ est un polynôme annulateur de la matrice M . Ses racines sont $\frac{1}{4}$ et 1 .

On a dit que les valeurs propres possibles de M sont $\frac{1}{4}$ et 1 .

4) a) On a D une matrice diagonale, P une matrice inversible et P^{-1} son inverse telles que $M = PDP^{-1}$.
Ainsi $D = P^{-1}MP$.

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{2}{12} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P D^n P^{-1}$ avec D une matrice diagonale

$$c) M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0$

$$\text{On } M^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$
 et $b_n = c_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$

Numéro d'inscription

5 0 0 2 8 6



Né(e) le

29 / 12 / 2002

Signature

Nom

B E I G W I E R

Prénom(s)

B A P T I S T E G E O R G E S

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 /

15

Numéro de table

006

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{4^n} = 1 \quad \text{donc par produit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ainsi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{4^n} = 1 \quad \text{donc par produit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ainsi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

$$5) \quad a = 1; \quad b = 0$$

$$\text{while } a <= 0,334 \quad \text{and} \quad b >= 0,333$$

$$n = n + 1$$

$$a = 1/3 * (1 + 2/4^n)$$

$$b = 1/3 * (1 - 1/4^n)$$

end

disp (n)

Partie B

$$6) P(A_0) = 1 ; P(B_0) = 0 \text{ et } P(C_0) = 0$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2} ; P(B_1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(C_1) = \frac{1}{4}$$

Chaque joueur a $\frac{1}{4}$ chance de tirer un chiffre k dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ et pour rester sur la même case au round 1, il doit tirer 0 ou 3. Ainsi $P(A_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

7/A) $P_{Am}(A_{m+1}) = \frac{1}{2}$ car si l'on suit le raisonnement explicite dans la question précédente le joueur doit tirer le chiffre 0 ou 3 pour rester sur la même case. Il vient donc, par équiprobabilité, $P_{Am}(A_{m+1}) = \frac{1}{2}$

$$P_{Bm}(A_{m+1}) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{Cm}(A_{m+1}) = \frac{1}{4}$$

b) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $\{A_m, B_m, C_m\}$:

$$\begin{aligned} P(A_{m+1}) &= P(A_m)P_{Am}(A_{m+1}) + P(B_m)P_{Bm}(A_{m+1}) + P(C_m)P_{Cm}(A_{m+1}) \\ &= P(A_m) \times \frac{1}{2} + P(B_m) \times \frac{1}{4} + P(C_m) \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$= P(A_n) \frac{1}{4} + P(B_n) \frac{1}{2} + P(C_n) \frac{1}{4}$$

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) P_{C_n}(C_{n+1})$$

$$= P(A_n) \frac{1}{4} + P(B_n) \frac{1}{4} + P(C_n) \frac{1}{2}$$

c) On remarque que $P(A_{n+1}) = A_{n+1}$ avec $P(A_n) = A_n$,
 $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$. Idem pour $P(B_{n+1}) = b_{n+1}$
 et $P(C_{n+1}) = c_{n+1}$.

On peut donc en déduire que $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$
 sont données par les valeurs de A_n , b_n et c_n .

8) Le résultat obtenu en 4) et indique qu'au n -ième
 moment, on a autant de chances de se trouver sur la
 case 1, 2 ou 3.

Exercice 2

$$1/A) \lim_{n \rightarrow -1^+} 1+n = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \quad (\text{par composition})$$

$$\text{Par produit} \quad \lim_{n \rightarrow -1^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow -1^+} n h(1+n) = +\infty$$

On en déduit qu'en -1 , la courbe de f admet une asymptote verticale.

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} n h(1+n) = +\infty \quad (\text{par produit})$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$$

c) On admet que la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

1/A) $\forall n \in]-1; +\infty[$, $f(n) = n h(1+n)$ et $f(n)$ est dérivable.

$$f'(n) = n h'(1+n) + n \times \frac{1}{1+n} = \boxed{h'(1+n) + \frac{n}{1+n}}$$

Numéro d'inscription

500266



Né(e) le

29/11/2002

Signature

Nom

BEIGNIER

Prénom(s)

BAPTISTE GEORGES

20/20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09/19

Numéro de table

006

b) On a, $\forall m \in \mathbb{J}^{-1}; +\infty$, $f'(h) = h(1+m) + \frac{m}{1+m}$
 et $f'(h)$ est dérivable

$$\text{Dérivée } f''(h) = \frac{1}{1+m} + \frac{1+m - m}{(1+m)^2} = \frac{1+m+1}{(1+m)^2} = \boxed{\frac{m+2}{(1+m)^2}}$$

m	-1	$+\infty$
$(1+m)^2$		+
$m+2$		+
$f''(h)$		+
$f'(h)$		$\nearrow$

$$3) a) f'(0) = h(1+0) + \frac{0}{1+0} = h(1) = 0$$

Ainsi $f'(h) \leq 0$ si $m \in \mathbb{J}^{-1}; 0$ et $f'(h) \geq 0$ si $m \geq 0$

a	-1	0	$+\infty$
$f''(h)$		-	+
$f'(h)$		$\searrow$	$\nearrow$

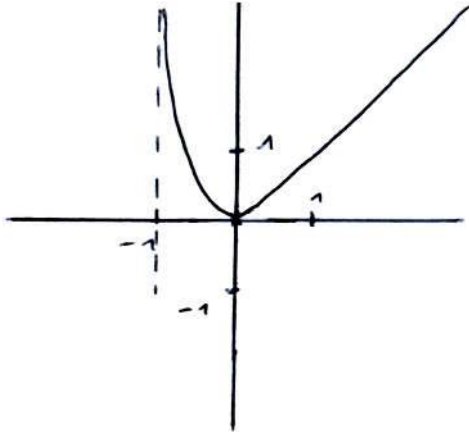
$$f(0) = 0 \quad h(0+1) = 0$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

h)



$$5) I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

Il existe deux fonctions $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$ qui sont dérivables et dérivées continues sur $[0; 1]$ telles que $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v'(x) = x$

$$\text{donc } I = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2 \ln(1+x)}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)} dx \\ = \left[\frac{1 \ln(2)}{2} - \frac{0 \ln(1)}{2} \right] - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$$

$$\boxed{I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \forall m \in [0; 1], \quad m^{-1} + \frac{1}{m+1} &= \frac{m(m+1) - (m+1) + 1}{m+1} \\
 &= \frac{m^2 + m - m - 1 + 1}{m+1} \\
 &= \frac{m^2}{m+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \text{Ainsi } \int_0^1 \frac{m^2}{m+1} dm &= \int_0^1 m^{-1} + \frac{1}{m+1} dm \\
 &= \left[\frac{m^2}{2} - m + \ln(m+1) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - \left(\frac{0}{2} - 0 + \ln(1) \right) \\
 &= \ln(2) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad \text{On a } I &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{m^2}{m+1} dm \\
 &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} \\
 I &= \boxed{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad y &= x * \log(m+1) \\
 \text{for } m &= [1; n] \\
 \text{plotted } & \quad \quad \quad , 50
 \end{aligned}$$

7/A) On peut voir que la courbe de I_n admet une asymptote verticale en 1.

b) Grâce au graphique, on peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

0/A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq n+1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow h(1) \leq h(n+1) \leq h(2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq h(n+1) \leq h(2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^n h(n+1) \leq x^n h(2)$$

b) Par comparaison d'intégrales, $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n h(n+1) dx \leq \int_0^1 x^n h(2) dx$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq h(2) \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{On } h(2) \int_0^1 x^n dx = h(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = h(2) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} \right) \\ = \frac{h(2)}{n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{h(2)}{n+1}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(2)}{n+1} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Numéro d'inscription

560686



Né(e) le

29/12/2002

Signature

Nom

BEIGNIER

Prénom(s)

BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

13 / 19

Numéro de table

006

Exercice 3

1) f est continue sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]2A ; +\infty[$ (Constante)
 f est continue sur $[0; 2A]$ (fraction rationnelle).

$$\text{D plus } \lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n}{2n^2} = 0$$

$$f(0) = \frac{0}{2n^2} = 0$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = f(0) = \lim_{n \rightarrow 0^+} f(n)$ et f est continue en 0.

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow 2A^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 2A^-} \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{A}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow 2A^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 2A^+} 0 = 0$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow 2A^-} f(n) \neq \lim_{n \rightarrow 2A^+} f(n)$ donc f n'est pas continue

en $2A$.

Cependant f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2) On a $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2A; +\infty[$.

De plus si $x \in [0; 2A]$ alors $\frac{x}{2A^2} \geq 0$ et $f(x) \geq 0$

Donc $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{2A} f(x) dx + \int_{2A}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{linéarité})$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{2A} \frac{x}{2A^2} dx + \int_{2A}^{+\infty} 0 dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2} \int_0^{2A} x dx + 0$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2A}$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left(\frac{(2A)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2A^2} \times 2A^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

On peut donc en déduire que f est une densité de probabilité.

$$3) \text{a)} \quad F(m) = \int_{-\infty}^m f(n) \, dn$$

1^{er} cas. Soit $m < 0$,

$$\int_{-\infty}^m f(n) \, dn = \int_{-\infty}^m 0 \, dn = 0$$

2^{ème} cas. Soit $0 \leq m \leq 2A$.

$$\int_{-\infty}^m f(n) \, dn = \int_{-\infty}^0 0 \, dn + \int_0^m \frac{n}{2A^2} \, dn$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2} \int_0^m n \, dn$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left[\frac{n^2}{2} \right]_0^m$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left(\frac{m^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= \frac{m^2}{4A^2}$$

3^{ème} cas. Soit $m > 2A$

$$\int_{-\infty}^m f(n) \, dn = \int_{-\infty}^0 0 \, dn + \int_0^{2A} \frac{n}{2A^2} \, dn + \int_{2A}^m 0 \, dn$$

$$= 0 + 1 + 0$$

$$= 1$$

$$\text{Ainsi } F(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ \frac{m^2}{4A^2} & \text{si } 0 \leq m \leq 2A \\ 1 & \text{si } m > 2A \end{cases}$$

$$b) P_{[X > \frac{A}{2}]}(X \leq A) = \frac{P(\frac{A}{2} \leq X \leq A)}{P(X > \frac{A}{2})} = \frac{F(A) - F(\frac{A}{2})}{1 - F(\frac{A}{2})}$$

$$= \frac{\frac{A^2}{4A^2} - \frac{\frac{A^2}{4}}{4A^2}}{1 - \frac{\frac{A^2}{4}}{4A^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}}$$

$$\boxed{P_{[X > \frac{A}{2}]}(X \leq A) = \frac{1}{5}}$$

$$4) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \frac{1}{2A^2} \int_0^{2A} x^2 dx + \int_{2A}^{+\infty} 0 \cdot x dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2A} + 0$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left(\frac{(2A)^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2A^2} \times \frac{8A^3}{3}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{4A}{3}}$$

Numéro d'inscription

50066



Né(e) le

29/12/2002

Signature

Nom

BEIGNIER

Prénom(s)

BAPTISTE GEORGES

20/20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

17

19

Numéro de table

006

5) D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(x) = E(x_2) - (E(x))^2$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 0 dx + \frac{1}{2A^2} \int_0^{2A} x^3 dx + \int_{2A}^{+\infty} x^2 0 dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{2A} + 0$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left(\frac{(2A)^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2A^2} \times 4A^4$$

$$E(x^2) = 2A^2$$

Donc $V(x) = 2A^2 - \left(\frac{4A}{3} \right)^2$

$$= 2A^2 - \frac{16A^2}{9}$$

$$= \frac{18A^2 - 16A^2}{9}$$

$$V(x) = \frac{2A^2}{9}$$

17/19

$$6) a) \forall m \in \mathbb{R}, G(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m^2 < 0 \\ \frac{m}{4A^2} & \text{si } 0 \leq m^2 \leq 4A^2 \\ 0 & \text{si } m^2 > 4A^2 \end{cases}$$

b) On en déduit donc que Y suit une loi uniforme sur $[0, 4A^2]$. $Y \sim U(0, 4A^2)$

c) la commande `rand() * 4 * A^2` simule le choix d'un réel aléatoire entre 0 et $4A^2$.

d) le script ci-dessous permettant de simuler la variable aléatoire X est `rand() * 2 * A`.

$$7) a) b(m) = E(T_m) - A$$

$$\text{On } E(T_m) = E\left(\frac{3}{4m} \sum_{k=1}^m X_k\right)$$

$$= \frac{3}{4m} \sum_{k=1}^m E(X_k) \quad (\text{linéarité})$$

$$= \frac{3}{4m} \times \sum_{k=1}^m \frac{4A}{3}$$

$$= \frac{3}{4m} \times \frac{4Am}{3}$$

$$E(T_m) = A$$

Donc $b(m) = A - A = 0$

Ainsi, T_m est un estimateur sans biais de A .

b) Puisque le biais est égal à 0, le risque quadratique de T_m est égal à $V(T_m)$.

$$\begin{aligned} V(T_m) &= V\left(\frac{g}{4m} \sum_{k=1}^m X_k\right) \\ &= \frac{g}{16m^2} \sum_{k=1}^m V(X_k) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \frac{g}{16m^2} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_A^2}{g} \\ &= \frac{g}{16m^2} \times \frac{\sigma_A^2 m}{g} \end{aligned}$$

$$V(T_m) = \frac{\sigma_A^2}{8m^2}$$

Ainsi $R(m) = \frac{\sigma_A^2}{8m^2}$

c) $T_m = (3/4 + m) * \text{sem}(X)$
disp (m)

