ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

501040

LEJON

VICTOR

01/05/2002

Note de délibération : 19.1 / 20

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Nom LEJON

Prénom (s) VICTOR

Signature

19.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option économique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 10

Numéro de table 006

Exercice 1

Partie 1:

1) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \right\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Donc F s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs les vecteurs de F

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. $(*)$

or les deux vecteurs sont libres:

en effet, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons $a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

. Alors $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Il vient $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc la famille $(*)$ est libre et de ~~de~~ dimension 2.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

Or $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 3 avec $2 \leq 3$.
Libre et génératrice de F, $\left(\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0 \end{pmatrix}\right)$ est une base

de F.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une base de F est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0 \end{pmatrix}\right)$
avec $\dim(F) = 2$.

2) Montrons que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord, $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Ensuite, si l'on considère $M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Alors $M^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
  Donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in G$.
- Enfin, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
  Soit $(M, N) \in G$.
  Alors on a $\alpha M + \beta N =$

Ainsi, d'après ce qui précède, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

*Déterminons une base de G.

3) a) On a $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $A \in F$ si l'on considère $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{-1}{3}$

3) b) D'après 3) a) $A \in F \cap G$.
Donc en particulier $A^2 = A$.
Donc $A^2 - A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Donc $\boxed{X^2 - X \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

3) c). D'après 3) b), $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Donc 0 et 1 sont les valeurs propres éventuelles de A.

* Déterminons si 0 est valeur propre de A.
Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

~~On a $AX = 0X$~~

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Signature

Nom LEJON

Prénom (s) VICTOR

19.1 / 20

écricome Épreuve : Maths option économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/10

Numéro de table 006

On a $AX = 0.X$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c = 0 \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c = 0 \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ -a + 2b - c = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ -a - b + 2c = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases}$ $(3 \neq 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ 2a - b - c = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-a + b + 3c = 0} \quad -a - b + 2c = 0 \\ \cancel{b + c = 0} \quad 3b - 3c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+2c=0 \\ 3b-3c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+2c=0 \\ b=c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+c=0 \\ b=c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=a \\ b=c \end{cases}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc 0 est valeur propre car il existe au moins une solution à l'équation et $E_0(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ qui est une base ~~en tant~~ car $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de vecteur réduite à un unique vecteur non nul.

* Déterminons si 1 est valeur propre.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On a $AX = 1 \cdot X \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c = a \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c = b \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 3a & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ -a + 2b - c = 3b & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ -a - b + 2c = 3c & L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases} \qquad (3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b - c = 0 \\ -a - b - c = 0 \\ -a - b - c = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -a - b - c = 0$

$\Leftrightarrow a = -b - c$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc 1 est valeur propre car il existe une solution non nulle à l'équation et de plus $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Supposons que $a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

Alors $\begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-b\\0\\b\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

Donc $\begin{pmatrix}-a-b\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

Donc la famille est libre dans $E_1(A)$
Libre et ~~de dimension~~ composé de $\underline{2}$ vecteurs
alors que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Donc par théorème, c'est une base de $E_1(A)$.

Ainsi, $\boxed{\begin{array}{l} Sp(A) = \{0,1\} \\ E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\ E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \end{array}}$

3) d) D'après 3) c) $0 \in Sp(A)$
Donc par théorème $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$
Cependant, ${}^tA = A$
Donc d'après le théorème spectral, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Nom LEJON

Prénom (s) VICTOR

Signature

19.1 / 20

Écricome Épreuve : Maths option économique

Sujet ☐1 ou ☐2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/10

Numéro de table 006

PartieII.

~~4)a)~~ 5) $B = I_3 - A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que (A,B) est une base de F.

Tout d'abord $\begin{cases} A \in F \text{ d'après } 3)a) \\ B \in F \end{cases}$

~~Ensuite, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,~~ De plus, la base trouvée pour F en Partie I) 1) est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

or $A = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

A et B étant ~~des~~ réécritures de la base trouvée et la famille (A,B) étant libre.

$\boxed{(A,B) \text{ est une base de } F.}$

6) a) $\alpha A + \beta B = \frac{4a-b}{3} A + \frac{a+2b}{3} B$

$$= \frac{4a-b}{3} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{a+2b}{3} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8a-2b & -4a+b & -4a+b \\ -4a+b & 8a-2b & -4a+b \\ -4a+b & -4a+b & 8a-2b \end{pmatrix} + \frac{a+2b}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \left[\begin{pmatrix} 8a-2b & -4a+b & -4a+b \\ -4a+b & 8a-2b & -4a+b \\ -4a+b & -4a+b & 8a-2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ a+2b & a+2b & a+2b \\ a+2b & a+2b & a+2b \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9a & 3a+3b & 3a+3b \\ 3a+3b & 9a & 3a+3b \\ 3a+3b & 3a+3b & 9a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{matrix}$$

b) $AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}}$

$BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}}$

c) ~~Soit $n \in \mathbb{N}$~~. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: " $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ " est vraie en raisonnant par récurrence.

- Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie :
  D'une part, $M^0 = I_3$.
  D'autre part $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B$
  $= A + (I_3 - A)$ d'après 5)
  $= I_3$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie
  Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$M^{n+1} = M^n M$

$= (\alpha^n A + \beta^n B) M$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B)$ d'après 6) a)

$= \alpha^{n+1} A^2 + \beta\alpha^n AB + \alpha\beta^n BA + \beta^{n+1} B^2$

$= \alpha^{n+1} A^2 + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})} + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})} + \beta^{n+1} B^2$ d'après 6) b)

$= \alpha^{n+1} A^2 + \beta^{n+1} B^2$

$= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$ car $(A, B) \in F^2$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

- Conclusion : En vertu du principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B}$

7) a) Montrons que M est inversible $\Leftrightarrow (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

- Supposons M inversible.

  Alors $\alpha A + \beta B$ est inversible

  Or si $(\alpha, \beta) = (0,0)$

  on a $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ inversible ce qui est impossible

  Donc nécessairement $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

- Supposons $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

  Alors $M = \alpha A + \beta B$ d'après 6) a)

  Donc $M = \alpha A + \beta(I_3 - A)$ d'après 5)

  Donc $M = \alpha A + \beta I_3 - \beta A$

  Donc $M = (\alpha - \beta) A + \beta I_3$

Seulement la première implication a été montrée.

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Signature

Nom LESON

Prénom (s) VICTOR

19.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option économique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 10

Numéro de table 006

7)b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: " $M^{-n} = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$ " est vraie en raisonnant par récurrence.

- Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie
Même démarche qu'en 6)c) avec $0 = -0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons $\mathcal{P}_n$
Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

On a $M^{-(n)+1} = M^{-n+1}$
$= M^{-n} M$
$= (\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B) M$ d'après l'hypothèse de récurrence
$= (\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B)(\alpha A + \beta B)$ d'après 6)a).
$= \alpha^{-n+1}A^2 + \beta\alpha^{-n}AB + \beta^{-n}\alpha BA + \beta^{-n+1}B^2$
$= \alpha^{-n+1}A^2 + \beta^{-n+1}B^2$ d'après 6)b)
$= \alpha^{-n+1}A + \beta^{-n+1}B$ car $(A, B) \in F^2$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

- Conclusion : En vertu du principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^{-n} = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

Partie III.

8) $I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \frac{4 \times (-2) - (-1)}{3} A + \frac{(-2) + (2 \times (-1))}{3} B$ d'après 6)a)

$= \boxed{\frac{-7}{3} A + \frac{-4}{3} B}$

9) $(I_3 - T)^{-1} = \left(\frac{-7}{3}\right)^{-1} A + \left(\frac{-4}{3}\right)^{-1} B$ d'après 7.

$\boxed{= \frac{-3}{7} A + \frac{-3}{4} B}$

10) On a $J = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$J = TJ + Y$

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + b + c \\ a + 3b + c \\ a + b + 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + b + c + 1 \\ a + 3b + c - 1 \\ a + b + 3c \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} a = 3a + b + c + 1 \\ b = a + 3b + c - 1 \\ c = a + b + 3c \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + 2b + c = 1 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a + 2b + c = 1 \\ 2a + b + c = -1 \quad L_1 \Leftrightarrow L_3 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b - c = \cancel{a}1 \\ -\cancel{3}b - 3c = \cancel{a}-1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b - c = 1 \\ -4c = 0 \end{cases}$

Donc il vient $\begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = \cancel{a}-1 \end{cases}$

~~Donc $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$~~

On peut en déduire que L est unique et vaut $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

11) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$ " est vraie avec un Raisonnement par récurrence

• Initialisation : Montrons que P_0 est vraie

D'une part $X_0 + 1 - L = X_1 - L$

$=$

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Nom LESON

Prénom (s) VICTOR

19.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option économique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/10

Numéro de table 006

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ " est vraie à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

• Initialisation : Montrons que P_0 est vraie

D'une part, $X_0 - L$

D'autre part, $T^0(X_0 - L) = I_3(X_0 - L)$
$= X_0 - L$

Donc P_0 vraie

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie

Montrons P_{n+1}

$X_{n+1} - L = T(X_n - L)$ d'après 11)
$= T(T^n(X_0 - L))$ par hypothèse de récurrence.
$= T^{n+1}(X_0 - L)$

Donc P_{n+1} vraie.

• Conclusion : En vertu du principe de récurrence, P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n - L = T^n(X_0 - L)}$

12) D'après 11), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = T^n(X_0 - L)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = T^n(X_0 - L) + L$.

$\boxed{= \left(\frac{-7}{3}\right)^n A + \left(\frac{-4}{3}\right)^n B (X_0 - L) + L}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Numéro d'inscription J01040

Né(e) le 01/05/2002

Signature

Nom LEJON

Prénom (s) VICTOR

19.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option économique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 006

Exercice 2.

Partie I ~~on a~~

1) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)} = e^{2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}}$

Or $\frac{-1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

Donc $2 - \frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

De plus $\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

Donc par produit, $(2-\frac{1}{x})\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$

Or $\exp(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc par composition, $e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

$\boxed{\text{Donc } g(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty}$

On a aussi, $-\frac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

Donc $2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Or $\exp \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc par composition $\boxed{g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

2)a) Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\forall h : x \mapsto \ln(x) + 2x - 1$

Donc h est dérivable en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \frac{1}{x} + 2$

$= \frac{2x+1}{x}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2x+1}{x} > 0$

Donc h' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\boxed{\text{h est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

2)b) On a h continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable

On a h strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 2)a)

et $\begin{cases} \lim_{0^+} h = -\infty \\ \lim_{+\infty} h = +\infty \end{cases}$

Donc h réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ avec $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection et il existe donc bien $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h(\alpha) = 0$

De plus, $h(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) + \frac{2 \times 1}{2} - 1$

$= \ln(1) - \ln(2) + 1 - 1$

$= -\ln(2)$

et $h(1) = \ln(1) + 2 \times 1 - 1$
$= 1$

or $0 \in [-\ln(2), 1]$

$\boxed{\text{Donc } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1].}$

c) Soit $x > 0$.

g est dérivable comme combinaison linéaire et composée de fonctions elles-même dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Donc $g'(x) = \left[\left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \ln(x) \times \frac{1}{x^2}\right] e^{\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)}$

$= \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) e^{\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)}$

$= \frac{1}{x^2}\left(2x - 1 + \ln(x)\right) g(x)$

$\boxed{= \frac{1}{x^2} h(x) g(x).}$

d) On a $\forall x > 0$, $\begin{cases} \frac{1}{x^2} > 0 \\ g(x) > 0 \quad \text{(par propriété de exp)} \\ h(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha. \end{cases}$

Donc g' est positive sur $[\alpha, +\infty[$ et négative sur $]0, \alpha[$

$\boxed{\text{Donc } g \text{ est croissante sur } [\alpha, +\infty[\text{ et décroissante sur }]0, \alpha[.}$

PartieII.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "U_n existe et $U_n > 0$" est vraie à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

- Initialisation: Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie

  Par hypothèse, U_0 existe et $U_0 > 0$

  Donc $\mathcal{P}_0$ vraie

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$

  Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

  $U_{n+1} = g(U_n)$.

  or g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

  et l'on sait par hypothèse de récurrence que $U_n > 0$

  Donc $g(U_n)$ est correctement défini

  Donc U_{n+1} existe.

  De plus, $g(U_n) = e^{(2-\frac{1}{U_n})\ln(U_n)}$

  or par propriété de exp, $g(U_n) > 0$.

  Donc $U_{n+1} > 0$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

Conclusion: En vertu du principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \text{ existe et } U_n > 0}$

5)
```
function U = Um(U0, m)
  ~~for k~~ = c = [U0]
  for k=[1:m] do
c(k) = [c, exp((2-1/c(k-1))*log(c(k-1))]
  end  , U = c(k)
endfunction.
```

Numéro d'inscription | J 0 1 0 4 0
Né(e) le | 01 / 05 / 2002
Nom | LESON
Prénom (s) | VICTOR
Signature

19.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option economique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 10

Numéro de table 006

6) a) Soit $x > 0$.

Notons $v(x) = (x-1)\ln(x)$

~~Alors v est posi~~ $\begin{cases} (x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$ propriété de ln.

Donc V est positive sur $\mathbb{R}^*$

$\boxed{x \mapsto (x-1)\ln(x) \text{ positive sur } \mathbb{R}^*}$

6) b) Soit $x > 0$.

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)}}{x}$$

Montrons que $\frac{g(x)}{x} > 1$

Montrons alors que $\frac{g(x)-x}{x} > 0$.

On a $\left(\frac{g(x)}{x} - x\right)' = \frac{1}{x} \times g'(x) + g(x) \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) - 1$

$$= \frac{1}{x^3} h(x) g(x) \cancel{+} \frac{-g(x)}{x^2} - 1$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

6) c) Soit $x > 0$.

D'après 6)b), on a $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ car $x > 0$

$\boxed{\text{Donc } g(x) \geqslant x}$.

De plus $g(1) = e^{(2-\frac{1}{1})\ln(1)}$
$= e^{1 \times 0}$
$= e^0$
$= 1$

Donc on a bien 1 comme solution à l'équation $g(x) = x$.
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$U_{n+1} - U_n = g(U_n) - U_n$.

or d'après 6) c), $\forall x > 0$, $g(x) - x \geqslant 0$ car $g(x) \geqslant x$.

et $U_n > 0$ d'après 4).

Donc $g(U_n) - U_n \geqslant 0$

Donc $g(U_n) \geqslant U_n$

Donc $U_{n+1} \geqslant U_n$

Donc, par théorème, $\boxed{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

8) a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ " $U_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ " est vraie en raisonnant par récurrence,

- Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  on a suppose $U_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$
  Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  On a $U_{n+1} = g(U_n)$
  on $U_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ par hypothèse de récurrence
  On a $g(\frac{1}{2}) = e^{(2-\frac{1}{\frac{1}{2}})\ln(\frac{1}{2})}$
  $= e^{0 \ln(\frac{1}{2})}$
  $= e^0$
  $= 1$
  $g(1) = 1$ d'après 7) et $1 \in [\frac{1}{2}, 1]$
  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [\frac{1}{2}, 1]}$

8) b). On a $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée d'après 7) et 8)
Donc d'après le théorème de la limite monotone,
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
or $(U_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ en tant que suite extraite de U_n.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} g(U_n)$ (unicité de la limite)
Donc $\ell = g(\ell)$ par continuité de g en ℓ
Donc $\ell = 1$ d'après 7).

$\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$

9) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $U_n \geq 1$ " est vraie en raisonnant par récurrence

- Initialisation : Montrons que P_0 vraie
  Par hypothèse, $U_0 \geq 1$
  Donc P_0 vraie
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n
  Montrons P_{n+1}.

on a $U_{n+1} = g(U_n)$.
Or d'après 7) $g(U_n) \geq U_n$ et $U_n \geq 1$ d'après l'hypothèse de récurrence

Donc ~~$U_{n+1} \geq 1$~~. $U_{n+1} \geq 1$

Donc P_{n+1} vraie

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \geq 1}$

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Nom CESON

Prénom (s) VICTOR

Signature

19.1 / 20

Écricome Épreuve : Maths option économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 006

Partie III).

11) On a $(x,y) \mapsto y-\frac{1}{x}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire d'un monome et d'une composée elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$

De plus $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que composée elle-même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par produit, $(x,y) \mapsto (y-\frac{1}{x})\ln(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

et exp est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

Donc par composition, $(x,y) \mapsto \exp((y-\frac{1}{x})\ln(x))$ est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur l'ouvert } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}}$

12) D'après 11), f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
Donc f possède des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a, $\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + (y - \frac{1}{x})\frac{1}{x}\right) f(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) = \left(1 \times \ln(x) + 0(y - \frac{1}{x})\right) f(x,y) \end{cases}$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) = \ln(x) f(x,y) \end{cases}}$$

13) f possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
f admet un point critique en (x,y)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases}$ $f(x,y) \neq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par propriété de exp

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-1}{1^2} = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Donc il existe bien un unique point critique pour f en a avec $a=(1,1)$.

14) Calculons les dérivées partielles d'ordre 2 de f puisqu'elle en possède en tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'après 11).

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} \partial_{1,1}(f)(x,y) = ^* \\ \partial_{2,2}(f)(x,y) = \ln(x)^2 f(x,y) \\ \partial_{2,1}(f)(x,y) = \frac{f(x,y)}{x} + \frac{\ln(x)+xy-1}{x^2} f(x,y) \ln(x) \\ \partial_{1,2}(f)(x,y) = \partial_{2,1}(f)(x,y) \end{cases}$

d'après le théorème de Schwarz.

$* \ \partial_{1,1}(f)(x,y) = \left[\left(\frac{-1}{x^3} \times \ln(x) + xy - 1\right) + \left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+y\right)\right)\right] \times \frac{\ln(x)+xy-1}{x^2} f(x,y)$

Or $\partial_{1,2}(f)(1,1) = \frac{f(1,1)}{1} + \frac{\ln(1)+xy-1}{1^2} \times f(1,1)\ln(1)$

$= f(1,1)$

$= 1$ d'après 7) partie I).

$\partial_{2,2}(f)(1,1) = \ln(1)^2 f(1,1)$

$= 0$. par propriété de $\ln$.

$\partial_{1,1}(f)(1,1) = \left[\left(\frac{-2}{1^3} \times \ln(1) + 1\times 1 - 1\right) + \left(\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}+1\right)\right)\right] \times \frac{\ln(1)+1\times 1-1}{1^2} f(1,1)$

$= 0$ → erreur.

On trouve donc (en admettant que $\partial_{1,1}(f)(1,1) = 2$) que $D^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15) D'après 14), $\nabla^2(f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a λ valeur propre $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\Leftrightarrow g(\lambda) = 0$ avec $g : x \mapsto x^2 - 2x - 1$

On g possède au plus deux racines λ_1 et λ_2.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x - 1 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$

$= x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$

Donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Donc λ_1 et λ_2 sont de signes opposées.

$\boxed{\text{Donc } a \text{ est un point col et } f \text{ n'admet pas } \cancel{\text{de maximum}} \text{ d'extremum local en } a.}$

16) f n'ayant pas de maximum local, f n'admet pas de extremum global, par théorème.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ n'admet pas d'extremum global sur } \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}$

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002 Signature

Nom LEJON

Prénom (s) VICTOR

19.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option économique Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 09/10

Numéro de table 000

Exercice 3

Partie 1

1) a) on reconnaît 3 schémas binomiaux.

Chacune des variables aléatoires X_n, Y_n Z_n simule la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où les succès ~~est~~ "un jeton est placé dans l'urne 1" resp(2, 3) de probabilité $\frac{1}{3}$ sont comptés.

Ainsi $\boxed{\begin{array}{l} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}) \\ Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}) \\ Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}). \end{array}}$

1) b) ~~$[X_n = 0]$ est réalisé $\Leftrightarrow$ tous les jetons sont placés dans les urnes 2 et 3.~~

$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$

Donc $\forall k \in X_n(\Omega)$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{3}^k (1-\frac{1}{3})^{n-k}$

Ainsi en particulier, $P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 (1-\frac{1}{3})^{n-0}$

$= 1 \times 1 \times (1-\frac{1}{3})^n$

$= (1-\frac{1}{3})^n$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

e) $P(X_n = n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n-n}$
$= 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1$
$= \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

$$\boxed{\text{Donc } \begin{cases} P(X_n=0) = \left(1-\frac{1}{3}\right)^n \\ P(X_n=n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}}$$

1) c) $[Y_n=0] \cap [Z_n=0]$ signifie qu'il n'y a aucune des n boules dans l'urne 2 et 3.
Donc elles sont toutes dans l'urne 1. c.à.d $[X_n=n]$.

1) d) $\boxed{V_n = [X_n=0] \cup [Y_n=0] \cup [Z_n=0]}$

1) e) ~~$P(V_n) = P([X_n=0] \cup [Y_n=0] \cup [Z_n=0])$~~
~~$= P(X_n=0) + P(Y_n=0) + P(Z_n=0)$ par indépendance~~
~~$= 3P(X_n=0)$~~
~~$= 3\times$~~

$$P(U_n) = P([Z_n=0] \cup [Y_n=0] \cup [X_n=0])$$
$$\overset{(1)}{=} P(Z_n=0) + P(Y_n=0) + P(X_n=0) - P([Z_n=0]\cap[Y_n=0]) - P([Z_n=0]\cap[X_n=0]) - P([Y_n=0]\cap[X_n=0]) + P([X_n=0]\cap[Y_n=0]\cap[Z_n=0])$$
$$\overset{(2)}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0$$
$$= 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(1) d'après la formule du Crible de Poincaré.
(2) car X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi et que $P([X_n=0]\cap[Y_n=0]) = P(Z_n=0)$ d'après <u>1)c)</u>.

Donc $\boxed{P(U_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

2) $V = \bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k$

Donc $P(V) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ corollaire du théorème de la limite monotone.

$= 0$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right) \in]-1,1[$ et $\frac{1}{3} \in]-1,1[$

Donc $\boxed{P(V) = 0}$

3) a) while sum(X) < 1 & sum(Y) < 1 & sum(Z) < 1 do
liste(i) = ~~X+1~~,
t = n

b) X=[]
for k = 1 : 10000 do
a = T()
X = [X, a]
end
disp(X / length(X))

→ on a implanté une méthode de monte-Carlo

4) $T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$
- Dans le "meilleur" des cas, l'urne 1, 2 et 3 sont remplis avec les jetons 1, 2 et 3.
- Dans le "pire" des cas, l'urne 1 n'est jamais remplie et les jetons sont infiniment placé dans les urnes 2 et 3
- Tous les cas intermédiaires sont envisageable.

Ainsi $\boxed{T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![}$

6) T admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} k P(T=k)$ converge absolument

$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} k P(T=k)$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} k (P(U_{n-1}) - P(U_n))$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} k \left[\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) - \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right)\right]$

converge

Numéro d'inscription 501040

Né(e) le 01/05/2002

Signature

Nom LESON

Prénom (s) VICTOR

19.1 / 20

Écricome Épreuve : Maths approfondies économique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10/10

Numéro de table 006

Or $\forall k \in [\![3, +\infty[\![$, $k\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right] - \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right)$

$$= 3k\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right)$$

$$= 3k\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= 3k \times \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + 3k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + (-2)k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

On reconnaît le terme de deux séries usuelles de puissances $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$ et $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$ à des constantes multiplicative près.

Or $\sum_{k=3}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 - \frac{2}{3}$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{9}} - 1 - \frac{2}{3}$$

$$= 9 - 1 - \frac{2}{3}$$

$$= 8 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{22}{3}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.1 / 20

et $\sum_{k=3}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}} - 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3}$

$= 0.$

Donc d'après ce qui précède, $E(T)$ existe et vaut $\frac{22}{3} + 0 = \frac{22}{3}$.

$\boxed{\text{Donc } E(T) \text{ existe et vaut } \frac{22}{3}}$

Partie II

7) a) $P(X_2 \cap W_2) = P(X_2)$ car si X_2 est réalisé, W_2 est réalisé

$= \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$ d'après 1)b