ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

501065

ELION

ROMAIN

18/07/2001

Note de délibération : 18.04 / 20

Numéro d'inscription 501065

Né(e) le 18/07/2001

Signature

Nom ELION

Prénom (s) ROMAIN

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 8

Numéro de table 007

Exercice 1

On note $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ $F = \left\{ \cancel{M} \in M_3(\mathbb{R}) / \cancel{M} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$G = \left\{ M \in M_3(\mathbb{R}) / M^2 = M \right\}$

Partie I : 1)

$F = \left\{ X \in M_3(\mathbb{R}) / X = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$X = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $F = \left\{ X \in M_3(\mathbb{R}) / X = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

C'est-à-dire $\underline{F = \text{Vect}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

F est un ~~sous~~ espace vectoriel donc un sous espace vectoriel.

De plus, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

On a donc $\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right)$ une famille libre et génératrice donc une base de F à deux éléments

Donc $\underline{\dim F = 2}$.

2)

On pose $J = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+ci\\ da+ed+fg & db+e^2+fh & dc+ef+fi\\ ga+hd+ig & gb+he+hi & gc+hf+i^2\end{pmatrix}$

$G = \left\{J \in M_3(\mathbb{R}) \,/\, M^2 = M\right\}$ $J = J^2$:

$J = J^2 \iff \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+ci\\ da+ed+fg & db+e^2+fh & dc+ef+fi\\ ga+hd+ & & \end{pmatrix}$

3) a. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ On a : $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$

d'où $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ donc $\underline{A \in F}$

$A^2 = A \times A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$

$\underline{\text{d'où } A \in G}$ on a donc $\underline{A \in F \cap G}$

b. $A \in G$ donc $A^2 = A \iff A^2 - A = 0_3$.

On pose $\underline{P(X) = X^2 - X}$ P un polynôme annulateur de A.

$X^2 - X = 0 \iff X(X-1) = 0$ $\underline{\text{soit } X = 0 \text{ soit } X = 1}$

0 et 1 sont racines de P donc on en déduit que $\underline{sp(A) \subset \{0, 1\}}$

c. Si 0 est valeur propre on a A non inversible.
Si 1 est valeur propre on a $A - I_3$ non inversible.

Si 1 est valeur propre : $A - I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ toutes les lignes et colonnes sont semblables

$\underline{\text{donc } A - I_3}$ $\underline{\text{non inversible}}$

On a donc $\underline{1}$ qui est valeur propre de A

$E_1(A) = \left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, (A - I_3)X = 0_{3,1} \right\}$

$(A - I_3)X = 0_{3,1} \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \left\{ x + y + z = 0 \right. \iff x = -y - z$

$E_1(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ deux vecteurs non colinéaires donc forment une famille libre et génératrice c'est-à-dire une base de E_1 à deux éléments. $\underline{\text{D'où } \dim E_1 = 2.}$

Si 0 est valeur propre :

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$
$\quad L_3 \leftarrow 2L_2 + L_1$

$\sim \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\sim \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\underline{A \text{ est non inversible}}$ car il y a un 0 sur la réduite de Gauss obtenue

Numéro d'inscription 501065

Né(e) le 18/07/2001

Signature

Nom ELIOW

Prénom (s) ROMAIN

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 / 8

Numéro de table 007

On a 0 valeur propre de A.

$E_0(A) \left\{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0_{3,1} \right\}$

$AX = 0 \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'après les calculs précédents :

$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

d'où $E_0(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non nulle d'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille libre et génératrice donc une base de $E_0(A)$ à un élément. $\dim E_0(A) = 1$

d) A est une matrice symétrique donc diagonalisable.
De plus $\dim E_0(A) + \dim E_1(A) = 3$. $\dim M_3(\mathbb{R}) = 3$
On a donc A diagonalisable. De plus 0 est valeur propre donc

18.04 / 20

A n'est pas inversible (montré précédement)

Partie II

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$$

4a) Calculons M^2 : $M \times M = M^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$

$M \in G \Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow \begin{cases} a = a^2+2b^2 \\ b = 2ab+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a^2+2b^2 \\ 2ab+b^2-b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a^2+2b^2 \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

CQFD

b. $b(b+2a-1) = 0$ soit $b = 0$
soit $2a+b-1 = 0$

$a^2+2b^2-a = 0$
$\Leftrightarrow a(a-1)+2b^2 = 0$
$\Leftrightarrow$

5) $B = I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1-\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

si $a = b = \frac{1}{3}$ on a $B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ donc $B \in F$

On a : $A \in F$, $B \in F$ de plus, (A, B) sont non colinéaires donc forment une famille libre ~~de F~~ à deux éléments dans F qui est de dimension 2.
D'où (A, B) est une base de F.

6a. $\alpha = \frac{4a-b}{3}$ et $\beta = \frac{a+2b}{3}$

$\alpha A + \beta B = \frac{4a-b}{9}A + \frac{a+2b}{9}B = \frac{4a-b}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{a+2b}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha A + \beta B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8a-2b+a+2b & -4a+b+a+2b & -4a+b+a+2b \\ -3a+3b & 9a & -3a+3b \\ -3a+3b & -3a+3b & 9a \end{pmatrix}$

$\alpha A + \beta B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \cancel{-3a+3b}\,9a & -3a+3b & -3a+3b \\ -3a+3b & 9a & -3a+3b \\ -3a+3b & -3a+3b & 9a \end{pmatrix}$

~~Si a = 1 et b = 4 on a :~~

$$\cancel{\alpha A+\beta B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$\alpha A+\beta B = \begin{pmatrix} a & \frac{b-a}{3} & \frac{b-a}{3} \\ \frac{b-a}{3} & a & \frac{b-a}{3} \\ \frac{b-a}{3} & \frac{b-a}{3} & \frac{b-a}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{b-a}{3} = b \iff b-a = 3b$$
$$\iff -a = 2b$$
$$\iff a = -2b$$

On a $M = \alpha A + \beta B \iff a = -2b$

b.

$$AB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

B et A commutatives.

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$

· initialisation : Vérifions pour n = 0 que la proposition est vraie

$n = 0$: $M^0 = I$ $\quad \alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3$$

Numéro d'inscription 501065

Né(e) le 18/07/2001

Signature

Nom ELION

Prénom (s) ROMAIN

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3/8

Numéro de table 007

P(0) vraie car $M^0 = \alpha^0 A + \beta^0 B$

· hérédité on suppose un entier k fixé quelconque tel que $M^k = \alpha^k A + \beta^k B$ est vraie :

$M^k = \alpha^k A + \beta^k B$

$M^k M = (\alpha^k A + \beta^k B) M$

$M^{k+1} = (\alpha^k A + \beta^k B)(\alpha A + \beta B) = \alpha^{k+1} A^2 + \alpha^k \beta AB + \alpha \beta^k AB + \beta^{k+1} B^2$

Or $BA = AB = 0_3$ et $A^2 = A$, $B^2 = B$
↳ d'après 4(b)

On a donc $M^{k+1} = \alpha^{k+1} A + \beta^{k+1} B$

P(k+1) vraie

· Conclusion :

· P(0) vraie

· P(k) vraie implique P(k+1) vraie

d'où par récurrence on a $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ $\forall n \in \mathbb{N}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

7a)

Partie III -

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$

8. $I - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$

10) On pose $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$L = TL + Y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3x + y + z + 1 \\ x + 3y + z - 1 \\ x + y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + z + 1 = x \\ x + 3y + z - 1 = y \\ x + y + 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + z = 1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ x + y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ 3y + z = 3 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ 3y + z = 3 \\ 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{donc } L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -Y$$

11. $X_{m+1} - L = TX_m + Y - L$

Or $L = TL + Y$ $\qquad X_{m+1} - L = TX_m + Y - TL - Y$

et $\qquad X_{m+1} - L = T(X_m - L)$

Montrons par récurrence $X_n - L = T^m (X_0 - L)$

- initialisation : on vérifie la propriété pour $n=0$

$$X_0 - L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T^0 (X_0 - L) = I_3 (X_0 - L) = X_0 - L$$

$P(0)$ vraie

- hérédité : on suppose un entier k fixé quelconque tel que $P(k)$ vrai

$Or\ -L = Y$

$$X_k - L = T^k (X_0 - L)$$

$$\Leftrightarrow T(X_k - L) = TT^k (X_0 - L)$$

$$\Leftrightarrow TX_k - TL = T^{k+1} (X_0 - L)$$

$TL = L - Y$ $\qquad \Leftrightarrow X_{k+1} + Y = T^{k+1} (X_0 - L)$

$\Leftrightarrow TX_k - L + Y = T^{k+1} (X_0 - L) =$ Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = T^n (X_0 - L)$

Numéro d'inscription 501065

Né(e) le 18/07/2001

Signature

Nom ELIOW

Prénom (s) ROMAIN

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 / 18

Numéro de table 007

Exercice 2

$\forall x > 0, \quad g(x) = e^{\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)} = e^{2\ln x - \frac{\ln x}{x}}$

Partie I:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$ par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ par composée, $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0^-$ par inverse $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

Par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} 2-\frac{1}{x} = -\infty$ par produit $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$

Par composée $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

2) $\forall x > 0, \ h(x) = \ln(x) + 2x - 1$

h est dérivable par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

$h'(x) = \frac{1}{x} + 2$

$x > 0$ donc $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 2 > 0$
$\Leftrightarrow h'(x) > 0$

On a h strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

b. On a h dérivable donc ~~cont~~ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
h strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
et $h(]0;+\infty[) =]\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[$
$=]-\infty ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0$

Par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$
~~$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln$~~

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

De plus, $0 \in]-\infty ; +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, l'equation $h(x) = 0$ admet une unique solution de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ notée α

$h(1) = 1$ $\qquad h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln 2$
Or $-\ln 2 < 0$

On a donc $h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 < h(1)$

$\Leftrightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1)$

$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$ car la bijection réciproque est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

c.

g est dérivable par composé et produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$

$g(x) = e^{\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}$ on pose $t(x) = \left(2-\frac{1}{x}\right)(\ln(x))$ t dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

$u(x) = 2-\frac{1}{x}$ $v(x) = \ln x$

$u'(x) = \frac{1}{x^2}$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$t'(x) = \frac{1}{x^2}\ln x + \left(2-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}$

$t'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{2x-1}{x^2} = \frac{\ln x + 2x - 1}{x^2}$

$g'(x) = t'(x)e^{t(x)} = \frac{\ln x + 2x - 1}{x^2}e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x}$

$\underline{\text{d'où } g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x) \quad \forall x > 0}.$

$g(x) > 0$ car $e^X > 0$

~~h(x)~~ $\frac{1}{x^2} > 0$

d'où $\underline{g'(x) \text{ est du signe de } h(x)}$.

Rappel : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $h(\alpha) = 0$

On a :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$		$+$		
$h(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

donc $h(x) < 0$ et $h(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x < \alpha$ $\Leftrightarrow x \geqslant \alpha$ Bijection réciproque strictement croissante.

On en déduit :

x	0	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$	1 $\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$

$g(\frac{1}{2}) = e^0 = 1$
$g(1) = e^0 = 1$

3. $\dfrac{g(x) - x^2}{-x \ln x} = \dfrac{e^{(2 - \frac{1}{x})\ln x} - x^2}{-x \ln x} = \dfrac{e^{2\ln x - \frac{\ln x}{x}} - x^2}{-x \ln x} =$

Partie II

$u_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et u_n existe

- initialisation : on vérifie la proposition pour $n = 0$

u_0 existe car u_0 est définie

de plus $u_0 > 0$ donc $P(0)$ vraie

- hérédité : on suppose un entier k fixé quelconque tel que $u_k > 0$ vraie

$u_k > 0 \qquad g(u_k) = e^{(2-\frac{1}{u_k})\ln(u_k)}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{u_k} < 0$

$\Leftrightarrow$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

~~6.) $(x-1)\ln x$ on pose $j(x) = (x-1)\ln x \quad \forall x > 0$~~

~~j est dérivable par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$~~

~~$j'(x) = \ln x + \frac{(x-1)}{x} = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$~~

~~$j'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 - \frac{1}{x} \geqslant 0$~~

~~$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} \geqslant -1 \Leftrightarrow \frac{x\ln x - 1}{x} \geqslant -1$~~

6a) $\forall x > 0, (x-1)\ln x = j(x)$

Sur $]0;1[$, $x-1 < 0$ et $\ln x < 0$

donc $(x-1)\ln x > 0$

Sur $[1;+\infty[$, $x-1 \geqslant 0$ et $\ln(x) \geqslant 0$ donc $(x-1)\ln x \geqslant 0$

On a donc $\forall x > 0,\ j'(x) \geq 0$

b) $g(x) = e^{\left((2-\frac{1}{x})\ln x\right)} = e^{\frac{(2x-1)\ln x}{x}}$

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{e^{(2-\frac{1}{x})\ln x}}{x}$$

c. Si $g(x) \geq x$ on travail sur l'ensemble $[\alpha ; +\infty[$
car sur cet interval $g(x)$ est strictement croissant
donc $g(x) \geq x$

Sur $[\alpha ; +\infty[$, $g(x)$ est continue
$g(x)$ est strictement croissant
et $g([\alpha ; +\infty[) = [g(\alpha) ; +\infty[$ donc $x \in [\alpha ; +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution

7. D'après 6c), on a $g(u_n) = u_n$
$g(u_{n+1}) = u_{n+1}$
donc g u_n suit les mêmes variations que g

~~Soit u~~

8. $u_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

a) · initialisation : Vérifions $n=0$, $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

$u_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ P(0) vraie

· hérédité : On suppose un entier k fixé quelconque tel que P(k) vraie :

$\frac{1}{2} \leq u_k \leq 1$ Faux

$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \geq u_{k+1} \geq g(1)$ car g est décroissante sur

$\Leftrightarrow 1 \geq u_{k+1} \geq 1$ donc $u_{k+1} = 1 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

· Conclusion : P(0) vraie
P(k) vraie implique P(k+1) vraie

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

b. On a montré que u_n était une suite constante donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

9. $u_0 > 1$

a) · initialisations Vérifions $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ pour $n=0$

$u_0 > 1$ P(0) vrair

Numéro d'inscription 5C1065

Né(e) le 18 / C7 / 2001

Signature

Nom ELIAN

Prénom (s) ROMAIN

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 / 8

Numéro de table 007

· Hérédité : On suppose un entier k fixé quelconque tel que $P(k)$ soit vraie

P $u_k > 1$

$\Rightarrow g(u_k) > g(1)$

$\Rightarrow g(u_k) > 1$ car g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

$\Rightarrow u_{k+1} > 1$

· Conclusion : $P(0)$ vraie

$P(k)$ vraie implique $P(k+1)$ vraie

donc $\forall n \in [0;+\infty[$, $u_n > 1$

b. u_n est croissante et non majorée sur $]1;+\infty[$

Donc d'après le théorème de convergence monotone, u_n diverge donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

10.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie 3

11) $f(x,y) = e^{(y-\frac{1}{x})\ln x} = e^{y\ln x - \frac{\ln x}{x}}$

$(x,y) \mapsto (y-\frac{1}{x})$ fonction rationnelle C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x$ fonction coordonnée C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln x$ fonction logarithme népérien C^2 sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto e^x$ fonction exponentielle C^2 sur $\mathbb{R}$

Par composée, $(x,y) \mapsto \ln(x)$ C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Par produit $(x,y) \mapsto (y-\frac{1}{x})\ln x$ C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$

Par composée

$(x,y) \mapsto f(x,y)$ C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

12) $\partial_2(f)(x,y) = \ln x \, e^{y\ln x - \frac{\ln x}{x}} = \ln x \, f(x,y)$

$\partial_1(f)(x,y) = \frac{y}{x} - \left(\frac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2}\right) e^{y\ln x - \frac{\ln x}{x}} = \frac{y}{x} - \frac{1-\ln x}{x^2} f(x,y)$

$\partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln x + yx - 1}{x^2} f(x,y)$

13) f admet un point critique $\Leftrightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

f admet un unique point critique au point $A(1,1)$

14) $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \dfrac{\left(\frac{1}{x} + y\right)x^2 - (\ln(x) + xy - 1)2x}{x^4} \times \partial_1 f(x,y)$

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \dfrac{1 + xy - 2\ln x - 2xy - 2}{x^3} \partial_1 f(x,y)$

14. On admet $H = \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. Calculons $(H - \lambda I_3)$ non inversible

C'est-à-dire $\det(H - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow -(2-\lambda)\lambda - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \qquad \Delta = 4 + 4 = 8 \quad \Delta > 0$

$x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \qquad x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

Numéro d'inscription 501065

Né(e) le 18 / 07 / 20C1

Nom FIJOW

Prénom (s) RCMAIW

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 7 / 8

Numéro de table 007

Signature

$\sqrt{2} \approx 1,3$ donc $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$

donc f n'admet pas d'extremum local ni d'extremum global

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Numéro d'inscription 501065

Né(e) le 18 / 07 / 2001

Nom ELIOW

Prénom (s) ROMAIN

Signature

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 8 / 8

Numéro de table 007

Exercice 3

Partie 1

1)

X_m le nombre de jetons dans l'urne 1.

X_m ~~est une~~ est une épreuve de Bernoulli de succès "il y a un jeton en plus dans l'urne1". Cette épreuve est répété m fois de façon indépendante et X_m compte le nombre de succès.

On a donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \frac{1}{3})$ $\frac{1}{3}$. la chance équiprobable d'obtenir un jeton dans une des trois urnes

On en déduit par le même raisonnement que Y_n et Z_n suivent la même loi que X_m mais pour les urnes 2 et 3.

b) $P(X_m = 0) =$ la probabilité de n'avoir aucun jetons dans l'urne à la fin de l'épreuve.

On a $p(X_n = 0) = p(\bigcap_{k=1}^{m} \overline{X}_m)$. les lancées sont indépendants

$= p(\overline{X}_m)^m = \left(\frac{2}{3}\right)^m$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

On peut aussi dire : $p(X=k) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{m-k}$

d'où $p(X=0) = \binom{m}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^m = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

En suivant cette méthode, $p(X=m) = \binom{m}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{m-m} = \left(\frac{1}{3}\right)^m$

$p(X_n = \cancel{m}) = p(Y_n = 0) = p_1(Z_n=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

~~$p(X_m = m) = p(A$~~ $p(X_m = m)$ toutes les boules sont dans l'urne 1. Il y a donc 0 boule dans l'urne 2 et 3.
Soit $p(\cancel{X}=0) \cap p(\cancel{Z}=0)$

d'où ~~$p(X_m = m) = p(Y=0) \cap p($~~
$p(X_m = m) = p((Y=0)\cap(Z=0))$
donc $(X_m = m) = (Y=0)\cap(Z=0)$

~~d) $V_m = ((X_m=0)\cap(Y_m=k)\cap(Z_m=i)) \cup ((X_m=k)\cap(Y_m=0)\cap(Z=i))$~~
~~avec $k+i=m$ $\cup((X_m=k)\cap(Y=i)\cap(Z=0))$~~

~~e) $p(V_n) = p((X_n=0)\cap(Y_n=k)\cap(Z_m=k)\cup((X_m=k)\cap(Y_m=0)\cap(Z=i))\cup(X_n=k)\cap(Y=i)\cap(Z=0))$~~
~~Evenements disjoints et indépendants~~.

~~$p(V_n) = 3\left(p(X_i=0)\times p(Y_m=k)\times p(Z=i)\right)$~~

~~$= 3\left(\left(\frac{1}{3}\right)^m\right.$ $3\left(\right.$~~

$(V_m) = \left(\left(X_m=0\right)\cap\left(Y_m+Z_m=m\right)\right)\cup\left(\left(X_m=0\right)\cap\left(\right.\right.$

e. On affirme le résultat donné.

2. $V = \sum_{k=1}^{+\infty} V_m$

~~$p(V_m) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(V_m)$~~

~~$p(V) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = 3\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$~~

~~On reconnait depuis le début les termes généraux de deux séries géométriques de paramètres $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ convergents.~~

~~On pose $S_m = \sum_{k=1}^{m}$~~

~~On a : $p(V) = 3\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 3\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$~~

~~$p(V) = 3\times 3 - 3\times\frac{2}{3} = 9-2 = 7.$~~

Faux

$$p(V) = \lim_{n \to +\infty} p(V_m) = \lim_{n \to +\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^m - 3\left(\frac{1}{3}\right)^m$$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = 0$ car $\frac{2}{3} \in]0;1[$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{3} \in]0;1[$

donc par produit et différence

$\lim_{n \to +\infty} p(V_m) = 0 = p(V)$

3.

4. $T(\Omega) = [\![3; +\infty[$ Om peut obtemin um jetoms dans chaque urnes au bout de 3 tirages ou biem me jamais obtemin ~~obtem~~ en jetons dans chaque une

c