

ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

500143

TOUSCH

AXEL

11/11/2001

Note de délibération : 18.5 / 20

Numéro d'inscription

5 0 0 1 4 3



Né(e) le

11 / 11 / 2001

Signature

Tousch.

Nom

T O U S C H

Prénom (s)

A X E L

18.5 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques T.

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 /

06

Numéro de table

0 0 2

Exercice 1:

Partie A:

$$1a) PQ: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

→ pour justifier, j'ai calculé le résultat souligné en faisant l'opération: $1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 3$.

$$1b) PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{3I}.$$

→ Donc $PQ = 3I$. ainsi, on a $P \times \frac{Q}{3} = I$.
alors $P \times \frac{1}{3}Q = I$.

→ La fonction P est inversible car multipliée à ^{matrice} ~~inverse~~ (ici $\frac{1}{3}Q$), le résultat est I . On sait aussi que.

$$P \times P^{-1} = I, \text{ ainsi, } \boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} Q}$$

2a) D'après l'énoncé, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on a donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}$
 (en remplaçant les valeurs de X_{n+1})

$$\Rightarrow \text{et } P X_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix} = \underline{X_{n+1}}$$

→ pour calculer ce résultat, il a fallu:
 $\frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{4} \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n = \underline{\frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n}$

2b). On pose $P(n) : X_n = M^n X_0$.

Initialisation: Au rang $n = 0$, $M^0 X_0 = M^0 X_0 = I X_0 = X_0$.
 $\rightarrow P(0)$ est donc vraie.

Hérédité: On suppose qu'à un certain rang n , $X_n = M^n X_0$.
Montrons que $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$.

D'après (2a), on a $X_{n+1} = M X_n$;

Et d'après (HR), $X_n = M^n X_0$.

On a alors: $X_n = M^n X_0$.

$$M \times X_n : M \times M^n X_0.$$

$$M X_n : M^{n+1} X_0.$$

$$\underline{X_{n+1} = M^{n+1} X_0}.$$

$\rightarrow P(n)$ entraîne $P(n+1)$.

Conclusion: $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est héréditaire, donc pour tout n , $\underline{X_n = M^n X_0}$.

$$3a) * 4M - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* 4M - 4I : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

→ ainsi, $(4M - I)(4M - 4I) =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0} \quad / (4M - I)(4M - 4I) \text{ est bien la matrice nulle.}$$

3b) Ainsi, les valeurs propres possibles de M sont calculées par:

1 et 4. $\circ 4X - 1 = 0 \Rightarrow 4X = 1 \Rightarrow X = \frac{1}{4}$ $\circ 4X - 4 = 0 \Rightarrow 4X = 4 \Rightarrow X = 1$

Les valeurs propres de M sont $\frac{1}{4}$ et 1

4a) soit $M = PDP^{-1}$.

$$P^{-1}M = P^{-1}PDP^{-1}$$

$$P^{-1}MP = DP^{-1}P$$

$$D = P^{-1}MP$$

→ donc $D = \frac{1}{3} Q \times M \times P$.

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

500243



Né(e) le

11/11/2004

Signature

Nouch.

Nom

TOUSCH

Prénom(s)

AXEL

18.5 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques T.

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02

/ 06

Numéro de table

002

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4b). On a $M = PDP^{-1}$, où :
 • P est une matrice inversible.
 • D est une matrice diagonale.

→ ainsi, $M^n = P D^n P^{-1}$.

4c)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$ donc $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{u}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{u}\right)^n \end{pmatrix}$.

→ ainsi, on a: $PD^n P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{u}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{u}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{u}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{u}\right)^n & \left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{u}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n \end{pmatrix}$$

→ pour calculer ce résultat,
il a fallu: $1 \times 1 - 2 \times -\left(\frac{1}{u}\right)^n$
 $= 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n$

4d). On a d'après (2b) ; $X_n = M^n X_0$.

→ on a ainsi ; en calculant $M^n X_0$:

$$\text{car } X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{a_n} = \frac{1}{3} \times \left(1 + 2 \times \left(\frac{1}{u}\right)^n \right) = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \times \frac{1}{u^n} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{u^n} \right)$$

$$\underline{b_n} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{u^n} \right)$$

$$\text{et } \underline{c_n} = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{u}\right)^n \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{u^n} \right) = \underline{b_n}$$

$$\text{4e) } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{u^n} \right)$$

$$\rightarrow \text{on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{u^n} = 1.$$

$$\rightarrow \text{Par } \text{somme produit}, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

$$\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{u^n} \right).$$

$$\rightarrow \text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{u^n} = 1.$$

par produit, on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n} = \frac{1}{3}$

5) /.

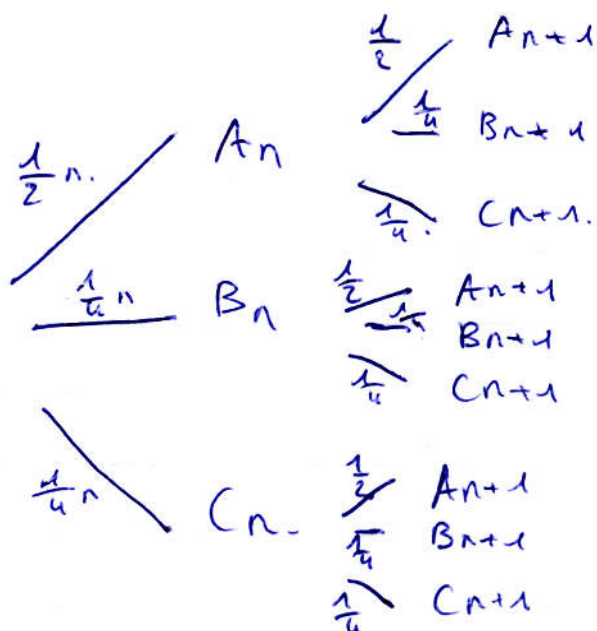
Partie B :

$$6). P(A_0) = \boxed{1} / P(B_0) = \boxed{0} / P(C_0) = \boxed{0}$$

$$\text{et } P(A_n) = \boxed{\frac{1}{2}} / P(B_n) = \boxed{\frac{1}{n}} / P(C_n) = \boxed{\frac{1}{n}}$$

(car si l'on tire 0, on tombe sur la case 0, et si l'on tire 3, on tombe sur la case 0.).

7a) : on a :



$$\rightarrow \text{ainsi, } P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{P(A_n \cap A_{n+1})}{P(A_n)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Numéro d'inscription

500143



Né(e) le

11 / 11 / 2001

Signature

Dorsch

Nom

T O U S C H

Prénom(s)

A X E L

18.5 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques I

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 /

06

Numéro de table

002

7b) : On a donc : A_n :

→ Pour calculer A_{n+1} : $\{A_n; B_n; C_n\}$ forme un système complet d'événements ; on calcule la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8} = \frac{2n}{8} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8} = \frac{4n}{8} = \frac{n}{2} = \boxed{\frac{1}{2}n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= P(\overset{A_n}{A_n} \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16} = \frac{2n}{8} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8} = \frac{4n}{8} = \frac{n}{2} = \boxed{\frac{1}{4}n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16} = \boxed{\frac{1}{4}n} \end{aligned}$$

7c) : D'après (4d), $a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

→ on a ainsi $P(A_n) = \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3}$

↑
on répète
n fois de
même
tirage.

↑
1 correspond
3 au nombre
de cases dans
la roue.

→ j'admetts donc que $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$ sont données par la Partie A, tels que $P(A_n) = a_n, P(B_n) = b_n, P(C_n) = c_n$.

$P(B_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4^n} = P(C_n)$

8) Ainsi, la limite de la probabilité de A_n sera $\boxed{\frac{1}{3}}$ tout comme celle de $\underline{P(B_n)}$ et $\underline{P(C_n)}$, en $+\infty$.

Exercice 2 :

1a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x \ln(1+x).$

$\rightarrow$ on a : $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$.

$\rightarrow$ par produit, on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \boxed{+\infty}$.

Donc la courbe C_f admettra une asymptote verticale de tel que $\gamma = -1$.

1b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+x)$

$\rightarrow$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

par produit,
on peut déduire
que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

1c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \boxed{0}$.

$\rightarrow$ donc C_f admet une branche parabolique de direction $x = 0$.

2a). $f(x) = x \ln(1+x)$

$\hookrightarrow f(x)$ est sous la forme : $x \times \ln(\overset{x+1}{x})$
donc $u \times v$.

$\rightarrow$ on sait que : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

ainsi, on calcule u' et v' : $u = x / u' = 1$.

$v = \ln(1+x) / v' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{1+x}$.

$\rightarrow$ on a finalement $f'(x) = \boxed{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$.

2b): $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$; $f'(x)$ est sous la forme :
 $u + v$.

$\rightarrow$ on sait que : $(u+v)' = u' + v'$.

on calcule u' et v' : $u = \ln(1+x) / u' = \frac{1}{1+x}$.

$v = \frac{x}{1+x} / v' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.

$\rightarrow$ ainsi, $(u+v)' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1(1+x) + 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x+1}{(1+x)^2}$.

$\boxed{\frac{x+2}{(1+x)^2}}$

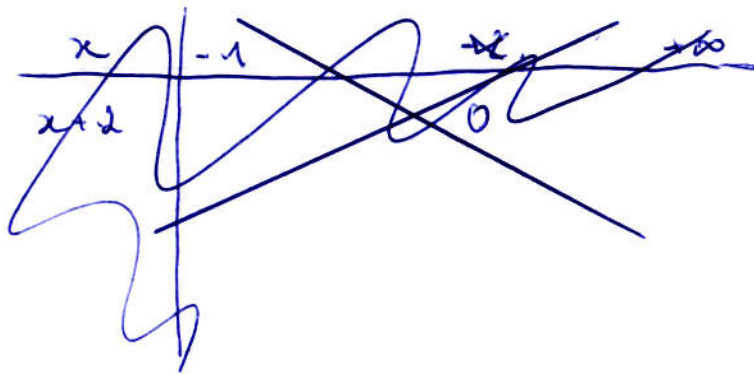
⊕ 2a) :

x	-1	0	$+\infty$
3b). $\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$	-	0	+
variations de f	$+\infty$	0	$+\infty$

$\rightarrow f'(0) = 0$.

(je me suis trompé de question, les variations de $f'(x)$ se trouvent après cette question)

~~2a). $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} / f'(0) = \ln(1) + 0 = 0$~~ 0



~~$\rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$~~

~~$\rightarrow (x+1)^2 = 0$~~

~~$x^2 + 2x + 1 = 0$~~

~~$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$~~

~~$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$~~

2c).	x	-1	$+\infty$
	$x+2$		+
	$(1+x)^2$		+
	$f''(x)$		+
	$f'(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\rightarrow$

$\rightarrow x+2 > 0$ quand $x \geq -1$.

$\rightarrow (1+x)^2 > 0$ car c'est un carré.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \underbrace{\ln(1+x)}_{-\infty} + \underbrace{\frac{x}{1+x}}_0 = \boxed{-\infty}$ (par somme).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\ln(1+x)}_{+\infty} + \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\frac{1}{2}} = \boxed{+\infty}$ (par somme)

~~Pour la convexité f est convexe~~

Numéro d'inscription

5 0 0 1 4 3



Né(e) le

1 1 / 1 1 / 2 0 0 4

Signature

Nom

T O U S C H

Prénom (s)

A X E L

18.5 / 20

Ecricone

Épreuve :

Mathématiques T

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

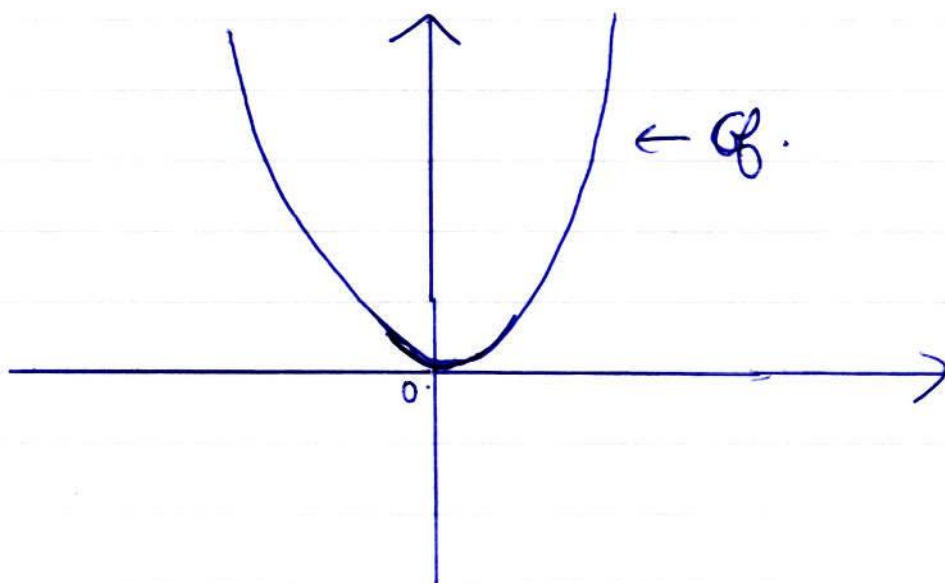
0 4

/ 0 6

Numéro de table

0 0 2

4).



$$5). \quad \square = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \ln(1+x) dx.$$

$$\text{on pose : } u' = x, \quad u = \frac{x^2}{2}, \quad v = \ln(1+x), \quad v' = \frac{1}{1+x}.$$

$$\text{ainsi : } \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2+2x} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \times \ln(1+1) - (0) - \int_0^1 \frac{x^2}{2+2x} dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

$$\text{5b). } x-1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x-1(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x-x-1+1}{x+1} \\ = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\text{5c). } \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 x-1 dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx.$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[\ln(x+1) \right]_0^1.$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1 - 0 \right) + \ln 2 - \ln(1) = -\frac{1}{2} + \ln(2) = \boxed{\ln(2) - \frac{1}{2}}$$

$$\text{5d). } \pm = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

6). function y = f(x)
y = x^n * log(1-x).

end function.

for n = [1; 5; 10; 20; 50].

x = linspace(0, 1, 100).

fplot2d (y, 0, 100).

end.

7a). On constate que I_n est une fonction qui, lorsque n augmente, tendra vers $+\infty$ plus rapidement.

7b). grâce au graphique, on déduit, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

8a). $\rightarrow$ on a: $0 \leq x \leq 1$. $\swarrow +1$
 $1 \leq 1+x \leq 2$. $\swarrow$
 $\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$ $\swarrow$ on ajoute la fonction $\ln$.
 $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$.
 $x^n 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$ $\swarrow$ on multiplie par x^n .
 $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$

8b). on a: $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$. $\swarrow$ on intègre entre 0 et 1
 $\int_0^1 dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx$

$$0 \leq \int_0^1 I_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx$$

$$\rightarrow \text{on calcule } \int_0^1 x^n \ln(2) dx = \ln(2) \int_0^1 x^n dx = \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= \ln(2) \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) = \boxed{\frac{\ln(2)}{n+1}}$$

on a donc bien $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \Rightarrow$ ~~donc~~ on voit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0, \text{ par } \underline{\text{croissance}} \\ \underline{\text{comparée}}.$$

$\rightarrow$ en appliquant le théorème des gendarmes, on

$$a \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1}$$

$$\rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$

Exercice 3 :

1). $\rightarrow$ sur $]-\infty; 0[$, f est nulle, donc continue.

$\rightarrow$ sur $[0; 2a]$, $f(x) = \frac{x}{2a^2}$, c'est un quotient d'une fonction affine et d'une constante, qui sont des deux continues.

de plus, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 0 = 0$ / $f(0) = \frac{0}{2a} = 0$.

$\rightarrow$ comme la limite en 0 et $f(0) = 0$, on a donc alors que f est continue en 0.

pour la continuité en $2a$:

$\rightarrow$ sur $[0; 2a]$, f est continue (d'après (1))

$\rightarrow$ sur $]2a; +\infty[$, $f(x) = 1$, donc elle est continue.

~~de plus, on a $\lim_{x \rightarrow 2a} 1 = 1$ / $f(2a) = \frac{2a \cdot x}{2a^2}$.~~

Numéro d'inscription

500143



Né(e) le

11 / 11 / 2001

Signature

Bousch

Nom

TOUSCH

Prénom(s)

AXEL

18.5 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques T.

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05

/ 06

Numéro de table

002

de plus, on a : $\lim_{x \rightarrow 2a} a = 0$ / $f(2a) = \frac{2ax}{2a^2} = \frac{1}{2a}$

→ f est continue par morceaux en $2a$.

2) ① Montrons que f est continue : d'après (1), f est continue par morceaux.

② Montrons que f est positive :

→ sur $]-\infty; 0[$, f est nulle donc positive.

→ sur $[0; 2a]$, $f(x) = \frac{x}{2a^2}$ et pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

→ sur $[2a; +\infty[$, $f(x) = 0$, donc positive.

alors f est positive sur $\mathbb{R}$.

③ Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2} dx + \int_{2a}^{+\infty} 0 dx$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

$$\rightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx = 0, \quad \text{et } \int_{2a}^{+\infty} 0 dx = 0.$$

$$\rightarrow \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2} dx = \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} x \cdot \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2a}.$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{(2a)^2}{2} \right) = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{4a^2}{2} \right) = \frac{4a^2}{4a^2} = \boxed{1}$$

$$\rightarrow \text{donc } \underbrace{f(x)}_{\text{converge et vaut}} = 0 + 1 + 0 = \boxed{1}$$

f est une densité de probabilité.

$$3a). F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\rightarrow \text{si } x < 0, F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = \boxed{0}.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{si } 0 \leq x \leq 2a, F(x) &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{t}{2a^2} dt \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x^2}{2} \right) = \boxed{\frac{x^2}{4a^2}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{si } x > 2a, F(x) = \boxed{1}$$

→ on a bien :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$$

$$3b). P_{[x > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{P(\frac{a}{2} < X \leq a)}{P(X > \frac{a}{2})}.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{on a : } P(\frac{a}{2} < X \leq a) &= F(a) - F(\frac{a}{2}) = \\ &= \frac{a^3}{4a^2} - \frac{(\frac{a}{2})^3}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{a^3}{8}}{\frac{4a^2}{1}} = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{16a^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{et } P(X > \frac{a}{2}) = 1 - F(\frac{a}{2}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\text{alors } P_{[x > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{16 \times 3}{16 \times 5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$4) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{2a} x \cdot \frac{x}{2a^2} dx + \int_{2a}^{+\infty} 0 dx$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} x^2 = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{(2a)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{8a^3}{3} \right) = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{4a^3}{3a^2} = \boxed{\frac{4a}{3}}$$

$$5) V(X) = E(X^2) - E(X)^2:$$

$$\rightarrow \text{on a : } E(X) = \frac{4a}{3}, \text{ donc } E(X)^2 = \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{16a^2}{9}}$$

$$\rightarrow \text{pour calculer } E(X^2), \text{ on fait calculer : } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{2a} x^2 \times \frac{x}{2a^2} dx + \int_{2a}^{+\infty} 0 dx.$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} \cancel{x^2} x^3 = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{(2a)^4}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{16a^4}{4} \right) = \frac{16a^4}{8a^2} = \frac{2a^4}{a^2} = \boxed{2a^2} = E(X^2)$$

$$\rightarrow \text{on peut calculer } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$= 2a^2 - \frac{16a^2}{9} = \frac{18a^2 - 16a^2}{9}$$

$$= \frac{2a^2}{9} \boxed{\frac{2a^2}{9}}$$

$$6). a) \text{ Soit } G(X) = P(X \leq x), \text{ on a :}$$

$$P(X^2 \leq x) \Leftrightarrow P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}).$$

~~$\rightarrow \text{on a, pour } x < 0,$~~

$$G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \text{ et comme } \cancel{F(-\sqrt{x})} < 0, G(x) = F(\sqrt{x}).$$

$$\text{ainsi : } \rightarrow \text{sur si } x < 0, G(x) = 0.$$

$$\rightarrow \text{si } 0 \leq x \leq 4a^2, G(x) = \frac{x}{4a^2}.$$

$$\rightarrow \text{si } x > 4a^2, G(x) = 1.$$

donc.

$$\rightarrow G(x) = \frac{x}{4a^2} \text{ sur } [0, 4a^2].$$

Numéro d'inscription

500143



Né(e) le

11/11/2004

Signature

Nom

T O U S C H

Prénom (s)

A X E L

18.5 / 20

Ecricone

Épreuve :

Mathématiques T.

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 /

06

Numéro de table

002

6b) Y suit une loi uniforme.

6c) La commande $\text{rand}() \cdot 4 \cdot a^2$ simule ~~un réel~~ la fonction de répartition d'un réel située sur l'intervalle $[0, 1]$, lorsque $0 \leq x \leq 4a^2$.

7a) $\mathbb{E}X_k$ $b(T_n) = E(T_n) - a$.

$$\text{et } E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^n E(X_k) \text{ (par linéarité)}$$

$$= \frac{3}{4n} \times E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{3}{4n} \times \frac{4a}{3} n.$$

$$= \frac{3}{4n} \times \frac{4na}{3} = \frac{3a}{3} = a.$$

$\rightarrow b(T_n) = a - a = 0$, donc T_n est un estimateur sans biais de A .

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

