PROPOSITION DE CORRIGÉ BCE

CONCOURS D'ADMISSION 2020

prépa

Mathématiques
HEC / ESSEC BS

Option Scientifique

Mardi 30 juin 2020 de 14 h 00 à 18 h 00

Durée : 4 heures

Candidat bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8 h 00 - 13 h 20

Partie 1

1.a. Il est bien connu que

$$e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

il en résulte par composition que

$$e^{-1/t} \xrightarrow[\substack{t\to0\\t>0}]{} 0,$$

et c'est donc sans aucune indétermination que

$$u(t) \xrightarrow[\substack{t\to0\\t>0}]{} 0.$$

Pour la limite à gauche, nous rappelons la prépondérance classique

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

grâce à laquelle et *via* une composition ciselée, nous avons

$$t\,e^{-1/t} \xrightarrow[\substack{t\to0\\t<0}]{} -\infty.$$

Nous en déduisons alors que

$$u(t) \xrightarrow[\substack{t\to0\\t<0}]{} -\infty.$$

b. D'après ce qu'il est convenu d'appeler « théorèmes généraux », l'application u est assurément dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et l'on trouve alors assez facilement

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad u'(t) = \frac{1}{t(1-t)^2}\, e^{-1/t}.$$

Le bon vieux polynôme

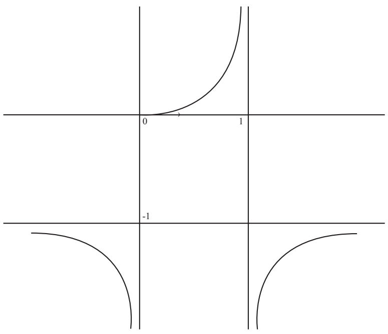
$$P = X(1-X)^2,$$

devrait définitivement faire *the job*.

c. Voici le tableau de notre affaire,

t	$-\infty$		0			1			$+\infty$
u'		$-$			$+$			$+$	
u	-1	↘	$-\infty$	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1

les limites aux bornes non envisagées dans la précédente se passant allègrement de tout commentaire. Quant à la représentation graphique, elle devrait ressembler à quelque chose du genre



2. Nous remarquons avant toute chose que, si l'on en croit le début de la toute première question, φ est le prolongement par continuité de la fonction u au *semi-ouvert* $[0,1[$. Elle est donc d'ores et déjà continue sur ce semi-ouvert et nous ne le redirons plus !

a. Il va être bon de s'organiser *un poquitín*.

▷ Prolongement oblige, nous avons déjà signalé que φ est dérivable sur l'ouvert $]0,1[$, et que

$$\forall t \in]0,1[, \qquad \varphi'(t) = \frac{1}{t(1-t)^2}\, e^{-1/t}.$$

▷ Étant donné que

$$\forall t \in]0,1[, \qquad \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \frac{1}{1-t}\, e^{-1/t},$$

c'est, encore une fois la toute première question, qui révèle que φ est dérivable en 0 et que

$$\varphi'(0) = 0.$$

▷ Il résulte ouvertement des deux premiers points qui prédèdent que φ est dérivable sur le semi-ouvert $[0,1[$, que sa dérivée y est positive ou nulle, mais qu'elle ne s'y annule qu'une seule fois. Nous sommes alors tenus de savoir que φ est *strictement* croissante sur notre semi-ouvert et comme depuis longtemps

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \varphi(t) = +\infty,$$

un certain théorème, dit de la bijection, assure que φ est une bijection de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Prolongement de u oblige, la fonction φ est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0,1[$ et compte tenu de la classique prépondérance

$$xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

nous déduisons sans peine que

$$\varphi'(t) \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t>0}]{} 0,$$

ce qui, parce que $\varphi'(0) = 0$, révèle la continuité de φ' en 0. Alors oui, la fonction φ est bel et bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur le semi-ouvert $[0,1[$.

c. Les rois de la réciprocité savent bien que l'égalité $\varphi'(0) = 0$ entraîne que φ^{-1} n'est même pas dérivable en 0. En conséquence et quant à sa classe $\mathcal{C}^1$ sur le semi-ouvert $[0,1[$, l'affaire semble très très mal engagée !

↱ Signalons cependant que, d'après le théorème de dérivation d'une réciproque, la fonction u^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'*ouvert* $]0,1[$. Nous nous en servirons plus bas.

d. *Here you are !*

```
x = [0.01 : 0.01 : 0.99] ;
y = x./(1 - x).* exp((-1)./x) ;
plot2d(y, x)
```

3.*a*. L'application φ n'est pas vraiment concernée par le contexte car, à bien y regarder, nous avons le diagramme

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\ f\ }]0,1[\xrightarrow{\ u\ } \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\ \ln\ } \mathbb{R},$$

qui montre que la fonction u est largement suffisante. Cela étant, composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ aux endroits stratégiques, la fonction $\ln \circ u \circ f$ est effectivement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, nous avons successivement

$$(\ln \circ u \circ f)' = \frac{(u\circ f)'}{u\circ f} = \frac{u'\circ f}{u\circ f}\cdot f' = \frac{f'}{f^2(1-f)},$$

la toute dernière égalité reposant sur les expressions de u et de u' rencontrées auparavant.

b. Nous allons procéder par la géniale technique de l'analyse-synthèse.

▷ ANALYSE

Si f est convenable, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme elle vérifie l'équation différentielle (1) elle devient magiquement de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est en outre à valeurs dans l'ouvert $]0,1[$ à telle enseigne que le récent a nous apprend que

$$(\ln \circ u \circ f)' = r$$

puisque, au risque de radoter, une certaine équation différentielle est au cœur du débat. Comme $\mathbb{R}$ est un *intervalle* apparaît alors une *constante* λ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \ln\big(u(f(t))\big) = rt + \lambda,$$

et comme il est enfin dit que $f(0) = a$, on a fatalement $\lambda = \ln(u(a))$. Ce n'est alors qu'une formalité *exponentialogaritmique* que de parvenir à

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u\big(f(t)\big) = u(a)rt,$$

et u réalisant une bijection de l'ouvert $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il ne fait plus aucun doute que(*)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = u^{-1}\big(u(a)e^{rt}\big).$$

↱ Cette conclusion d'analyse montre déjà qu'il y a *au plus* une fonction f convenable et règle donc le problème d'unicité de notre projet. Quant à l'existence, c'est la synthèse qui devrait s'en charger.

▷ SYNTHÈSE

C'est contre toute attente que nous proposons pour f, la fonction

$$f_a : t \mapsto u^{-1}\big(u(a)e^{rt}\big),$$

et nous avons un certain nombre de choses à contrôler.

▷ Comme u^{-1} est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans l'ouvert $]0,1[$, notre f_a est *farpaitement* définie sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $]0,1[$.

▷ On a ensuite et sans migraine

$$f_a(0) = u^{-1}\big(u(a)\big) = a.$$

▷ Il reste à s'occuper de l'équation différentielle. Nous avons déjà fait savoir que u^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est donc de même de f_a sur $\mathbb{R}$ et d'après les formules de dérivation des réciproques et des composées, nous revendiquons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_a'(t) = \frac{ru(a)e^{rt}}{u'\big(u^{-1}\big(u(a)e^{rt}\big)\big)},$$

égalité que le *physio* transforme sur-le-champ en

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_a'(t) = \frac{ru\big(f_a(t)\big)}{u'\big(f_a(t)\big)},$$

et comme nous avons ouvertement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{u(t)}{u'(t)} = t^2(1-t),$$

nous tombons bien sur notre équation différentielle.

(*) Nous nous sommes déjà expliqués en ce qui concerne notre désamour pour φ à cet endroit !

$4.a$. Nous venons d'apprendre que
$$f'_a = rf_a(1 - f_a) > 0,$$
la stricte positivité que nous ajoutons à droite profitant tout particulièrement de la récente stricte positivité de r, f_a étant à valeurs dans l'ouvert $]0, 1[$ depuis une fort belle lurette. Quant aux limites, compte tenu de tout ce que nous savons, il est très facile d'obtenir

$$\lim_{t\to-\infty} f_a(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f_a(t) = 1,$$

les raisons à évoquer, si raisons il y a, étant

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} u^{-1}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} u^{-1}(t) = 1.$$

b. Nous avons déjà fait mention de ce que la dérivabilité de f et l'équation différentielle à laquelle elle satisfait lui donnent la classe $\mathcal{C}^1$. Mais à bien y regarder, l'équation différentielle peut s'emballer *via* une récurrence de Cotonou et montrer qu'en réalité f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc deux fois dérivable et l'on trouve aisément que

$$f''_a = rf_a f'_a(2 - 3f_a).$$

Notons tout d'abord que le produit $rf_a f'_a$ ne s'annule jamais, et comme nous avons amélioré le a en brandissant la *stricte* croissance de f_a, cette dernière établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'ouvert $]0, 1[$, de sorte que f''_a s'annule en changeant de signe en un et un seul point, en l'occurrence

$$f_a^{-1}\Big(\frac{2}{3}\Big),$$

l'appartenance de $2/3$ à l'ouvert $]0, 1[$ se voyant comme le nez au milieu de la figure ! Il reste à rappeler que, pour une fonction deux fois dérivable sur un intervalle, les points d'inflexion sont précisément les annulations avec changement de signe de la dérivée seconde.

c. L'ensemble de nos points d'inflexion est exactement

$$\Big\{\Big(f_a^{-1}\Big(\frac{2}{3}\Big), \frac{2}{3}\Big) \ \Big|\ a \in]0, 1[\Big\}$$

et la tangente au point correspondant à a a pour pente le réel

$$f'_a\Big(f_a^{-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big) = \frac{4r}{27},$$

et ce, parce que
$$f'_a = rf_a^2(1 - f_a) \quad \text{et} \quad f_a\Big(f_a^{-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big) = \frac{2}{3}\cdot$$
Nos tangentes sont donc gentiment parallèles puisque leurs pentes…

Partie 2

5. Le texte semble nous faire cadeau de la véritable ouverture de la partie U. Elle n'est cependant pas très difficile à débusquer, en remerciant, assez classiquement, les théorèmes de Felix Hausdorff.

a. Les deux applications coordonnées

$$(x, y) \mapsto x \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto y$$

sont officiellement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc *a fortiori* sur l'ouvert U et le reste n'est qu'une affaire de théorèmes généraux, ne présentant aucun obstacle particulier.

b. Soit $(x, y) \in U$. Notre fréquentation des bancs de la classe de terminale suffit à justifier que

$$\partial_2(K)(x, y) = \frac{y - x}{y(1 - y)}.$$

c. Fixons momentanément x dans l'ouvert $]0, 1[$ et étudions brièvement la fonction

$$v : y \mapsto K(x, y).$$

Elle est assurément dérivable sur $]0, 1[$ et selon la précédente

$$\forall y \in]0, 1[, \qquad v'(y) = \frac{y - x}{y(1 - y)}.$$

On en déduit le tableau

y	0		x		1
v'		$-$	0	$+$	
v	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

qui nous apprend que

$$\forall (x, y) \in U, \qquad K(x, y) \geqslant 0,$$

à telle enseigne que 0 minore la fonction K, mais comme 0 est atteint en chaque point de la diagonale principale de l'ouvert U, nous avons affaire effectivement à un *genuine* minimum global. En outre, les limites $+\infty$ que nous venons de mettre en exergue dans le tableau précédent, montrent que la fonction K n'est définitivement pas majorée, ce qui s'appelle faire d'une pierre deux coups.

d. C'est le deuxième coup de la pierre !

6.*a*. Soit $(x, y) \in U$. Nous trouvons sans peine que

$$\partial_{1,1}(K)(x, y) = \frac{1}{x(1 - x)} \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}(K)(x, y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1 - x}{(1 - y)^2},$$

alors que, si l'on en croit une réflexion d'Hermann Schwarz

$$\partial_{1,2}(K)(x, y) = \partial_{2,1}(K)(x, y) = -\frac{1}{y(1 - y)}.$$

b. Soit à nouveau $(x, y) \in U$. Forme quadratique oblige il est assez clair que

$$q_{(x,y)}(1, 0) = [\,1 \quad 0\,] \times \nabla^2 K(x, y) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \partial_{1,1}(K)(x, y) = \frac{1}{x(1 - x)}$$

et comme les *pros* des variances *bernoulliennes* se doivent de savoir que

$$0 < x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4},$$

nous n'avons plus grand chose à ajouter.

7. Après avoir jeté un coup d'œil furtif sur le prochain a, il semble urgent de s'intéresser tout d'abord aux vecteurs

$$z + tw \quad \text{où} \quad t \in [0, 1],$$

et il vaudrait mieux pour eux qu'ils appartiennent à l'ouvert U, sans quoi la suite serait bien compromise ! Mais fort heureusement, en remarquant que

$$\forall t \in [0,1], \qquad z + tw = \big(tx + (1-t)y, y\big)$$

notre indispensable appartenance devrait être plus que lumineuse !

a. Nous pouvons désormais parachuter la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0,1], \qquad h(t) = K(z + tw),$$

qui fait partie de ces délicieuses composées à droite par des fonctions affines. Vu la classe de K et celle légendaire des affines, la fonction h est pour sûr de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ et nous pouvons donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 1, entre 0 et 1. Il ne fait plus alors aucun doute que

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \int_0^1 (1-t)h''(t)dt.$$

Nous avons en première instance les triviales égalités

$$h(1) = K(z+w) = K(x,y) \quad \text{et} \quad h(0) = K(z) = K(y,y) = 0,$$

mais la suite, plus délicate, passe par les théorèmes officiels de dérivation des composées à droite par des affines selon lesquels

$$\forall t \in [0,1], \qquad h'(t) = <\nabla K(z+tw)\,,\, w> \quad \text{et} \quad h''(t) = q_{z+tw}(w).$$

Nous avons donc en particulier

$$h'(0) = <\nabla K(z)\,,\, w> = 0,$$

la raison essentielle à cette dernière étant que $z = (y,y)$ est un point critique de K comme l'ont appris les *minimalistes* de la question $5.c$. C'est donc après toutes ces belles choses que nous découvrons effectivement que

$$K(x,y) = \int_0^1 (1-t)q_{z+tw}(w)dt.$$

b. Soit t appartenant au segment $[0,1]$. Nous avons quadratiquement

$$q_{z+tw}(w) = q_{z+tw}(x-y,0) = (x-y)^2\, q_{z+tw}(1,0),$$

et si l'on observe que $z+tw$ est un élément de U comme un autre, il résulte de la récente $6.b$ que

$$q_{z+tw}(1,0) \geqslant 4.$$

Nous en ressortons, au carrefour de la positivité, que

$$(x-y)^2 q_{z+tw}(1,0) \geqslant 4(x-y)^2,$$

de sorte qu'*in fine* et toujours positivement,

$$(1-t)q_{z+tw}(w) \geqslant 4(x-y)^2(1-t).$$

La linéarité et la croissance de l'intégration, puisque les bornes l'ont ainsi décidé, devraient alors nous amener à

$$K(x,y) \geqslant 4(x-y)^2 \int_0^1 (1-t)dt,$$

et comme mentalement
$$\int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2},$$
l'affaire doit bien se terminer.

$8.a$. Voici notre proposition.

```
function z = K(x, y)
z = x * ln(x/y) + (1 - x) * ln((1 - x)/(1 - y))
endfunction
x = [0 : 0.05 : 1]' ; y = x ;
z = feval(x, y, K) ;
plot3d(x, y, z)
```

b. Après avoir utilisé notre *hawk eye* notre impression est que le centre de symétrie devrait se trouver en
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
et cela se confirme haute autoritairement, parce que tout à fait mentalement, il se trouve que
$$\forall (x, y) \in U, \qquad K(1-x, 1-y) = K(x, y),$$
et que nous n'avons pas oublié les cours de géométrie analytique du lycée…

Partie 3

Nous apportons quelques précisions en ce qui concerne la suite des opérations.

▷ Tout d'abord et parce que nous trouvons cela plus *zouli* nous noterons minusculement nos deux probabilités qui deviennent donc
$$q^* \quad \text{et} \quad q.$$

▷ L'hypothèse
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q^*(\{n\}) \cdot q(\{n\}) > 0,$$
a une conséquence tout à fait remarquable. Pour une partie $A \subset \mathbb{N}$, on a les équivalences logiques
$$q(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \varnothing \quad \text{et} \quad q(A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \mathbb{N},$$
et lycée de Versailles pour q^*. Démontrons le pour q :

▷ il est bien connu que $q(\varnothing) = 0$;

▷ réciproquement, si A est non vide, il existe un naturel $n \in A$, à telle enseigne que
$$\{n\} \subset A,$$
et la croissance de la probabilité assure alors que
$$0 < q(\{n\}) \leqslant q(A).$$
Nous avons donc déjà
$$q(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \varnothing.$$
Sa cousine repose tout simplement sur un passage aux événements contraires.

↱ Pour les initiés, il apparaît entre autres que l'ensemble vide est le seul événement négligeable de notre affaire ce qui n'est pas rien.

$\triangleright$ Lorsque x appartient à $X(\mathbb{N})$, l'ensemble $[X = x]$ n'est pas vide et d'après nos récentes tribulations il est entériné que

$$q(X = x) \quad \text{et} \quad q^*(X = x)$$

sont strictement positifs et par conséquent, la seule chose qui pourra s'opposer à l'existence de $d(X)$, est la non sommabilité sur $X(\mathbb{N})$ de la famille en question.

9. Nous décidons de prendre les dispositions suivantes. Lorsque μ et ν sont deux probabilités sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et que A une partie de $\mathbb{N}$ telle que

$$\mu(A) > 0 \quad \text{et} \quad \nu(A) > 0,$$

nous posons

$$(\mu \odot \nu)(A) = \mu(A) \ln \frac{\mu(A)}{\nu(A)}\cdot$$

Ce genre de situation étant amené à se produire plusieurs fois dans la suite, nous espérons y gagner en concision.

a. Il est d'usage de considérer que les variables de Poisson prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ ce qui nous amène à annoncer tout simplement n dans $\mathbb{N}$. Dans ces conditions et vu que

$$q(X = n) = e^{-\lambda} \, \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{et} \quad q^*(X = n) = e^{-\lambda^*} \, \frac{\lambda^{*n}}{n!},$$

sont deux réels *strictement* positifs, nous donnons déjà un sens à la quantité $(q^* \odot q)(X = n)$ qui, après un calcul inoffensif, se révèle valoir

$$(q^* \odot q)(X = n) = \ln \frac{\lambda^*}{\lambda} \cdot n \, q^*(X = n) + (\lambda - \lambda^*) q^*(X = n).$$

Vu ce que nous savons par cœur des lois de Poisson et de leurs espérances, et grâce au théorème de linéarité de la théorie des séries, nous clamons la *convergence* de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} (q^* \odot q)(X = n),$$

d'où déjà l'existence de $d(X)$, ainsi que l'égalité

$$d(X) = \lambda^* \ln \frac{\lambda^*}{\lambda} + \lambda - \lambda^*,$$

qui ne peut que nous satisfaire.

b. L'inégalité de concavité classique

$$\forall u > 0, \qquad \ln u \leqslant u - 1,$$

que nous utilisons librement, conduit tout d'abord à

$$\ln \frac{\lambda}{\lambda^*} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda^*} - 1,$$

puis, *via* la multiplication par le *négatif* $-\lambda^*$, à la nouvelle venue

$$-\lambda^* \ln \frac{\lambda}{\lambda^*} \geqslant \lambda^* - \lambda,$$

et pour finir à

$$d(X) \geqslant 0.$$

Pour le « négligeable devant », nous notons $t = \lambda - \lambda^*$ et il suffit alors d'observer que

$$d(X) = \lambda^* \left[\ln\Big(1 + \frac{t}{\lambda^*}\Big) - \frac{t}{\lambda^*} \right],$$

et de ne pas avoir égaré la très officielle

$$\ln(1+u) - u \underset{u \to 0}{=} o(u).$$

10. Nous comprenons que U est à *valeurs* strictement positives et variable discrète oblige, l'espérance de U devrait avoir un *look* de genre

$$\mathsf{E}(U) = \sum_{i \in I} u_i \, \mathsf{p}(U = u_i),$$

où I est un ensemble fini ou dénombrable et où les u_i sont les différentes valeurs prises par U.

a. Les u_i sont *tous* strictement positifs et c'est également le cas de l'*une au moins* des probabilités $\mathsf{p}(U = u_i)$ puisque leur somme vaut légendairement 1. Nous en déduisons donc bien que

$$\mathsf{E}(U) > 0.$$

b. Comme ψ est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, le graphe de ψ est au dessus de la tangente à ψ au point d'abscisse strictement positive $\mathsf{E}(U)$ et, par conséquent, en prenant la fameuse tangente,

$$\forall x > 0, \qquad \psi(x) \geqslant \psi\big(\mathsf{E}(U)\big) + \psi'\big(\mathsf{E}(U)\big)\big(x - \mathsf{E}(U)\big),$$

ce qui finit par s'écrire

$$\forall x > 0, \qquad \psi(x) - \psi\big(\mathsf{E}(U)\big) \geqslant \psi'\big(\mathsf{E}(U)\big)\big(x - \mathsf{E}(U)\big).$$

c. Soit $\omega \in \Omega$. Comme il est dit que U est à valeurs strictement positives, nous pouvons choisir $x = U(\omega)$ dans la précédente et récupérer ainsi l'inégalité entre variables aléatoires que voici

$$\psi(U) - \psi\big(\mathsf{E}(U)\big) \leqslant \psi'\big(\mathsf{E}(U)\big) \times (U - \mathsf{E}(U)).$$

Comme le texte précise que $\psi(U)$ possède également une espérance, une légendaire linéarité couplée à une illustre croissance, révèlent alors sur-le-champ que

$$\mathsf{E}\big(\psi(U)\big) - \psi\big(\mathsf{E}(U)\big) \leqslant \psi'\big(\mathsf{E}(U)\big) \times (\mathsf{E}(U) - \mathsf{E}(U)) = 0,$$

et autant dire alors que véritablement

$$\mathsf{E}\big(\psi(U)\big) \leqslant \psi\big(\mathsf{E}(U)\big).$$

d. Nous n'allons utiliser, ni la concavité du logarithme, ni l'inégalité (8) — inégalité de Jensen — car il nous semble beaucoup plus simple d'avancer que

$$\forall x \in X(\Omega), \qquad q^*(X = x) \ln \frac{q^*(X = x)}{q(X = x)} = -q^*(X = x) \ln \frac{q(X = x)}{q^*(X = x)} \geqslant q^*(X = x) \times \Big(1 - \frac{q(X = x)}{q^*(X = x)}\Big),$$

la raison essentielle étant la classique

$$\forall u > 0, \qquad -\ln u \geqslant 1 - u,$$

la positivité de $q^*(X = x)$ n'étant d'ailleurs pas de reste. Il s'ensuit alors que

$$\forall x \in X(\Omega), \qquad q^*(X = x) \ln \frac{q^*(X = x)}{q(X = x)} \geqslant q^*(X = x) - q(X = x), \tag{$*$}$$

et nous faisons valoir deux choses :

- ▷ le texte précise que $d(X)$ existe ;
- ▷ lois de probabilité obligent nous savons que

$$\sum_{x\in X(\Omega)} q^*(X=x)=1 \quad \text{et} \quad \sum_{x\in X(\Omega)} q(X=x)=1,$$

à telle enseigne que par linéarité

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \big(q^*(X=x)-q(X=x)\big)=0.$$

Il reste alors à sommer membre à membre les inégalités $(*)$ sur $X(\Omega)$ pour parvenir à

$$d(X)\geqslant 0.$$

11. Avant de commencer, il nous semble opportun de mettre en exergue les quelques allégations que voilà :

▷ comme g est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble

$$\big\{g^{-1}(\{y\}) \ \mid \ y\in Y(\Omega)\big\}$$

est une partition de $X(\Omega)$ comme l'indique le fameux lemme des bergers ;

▷ nous utiliserons librement l'officiel théorème *admis* de sommation par paquets, qui nous aimons à le rappeler, est dans le cas fini — ce qui nous attend ici — finalement assez élémentaire à justifier, et nous l'appuierons principalement sur la partition du berger qui précède, pour écrire des choses du genre

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \cdots = \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} \cdots$$

▷ si y appartient à $Y(\Omega)$ et si x appartient à $g^{-1}(\{y\})$, on a très facilement

$$\big[X=x\big]\subset\big[Y=y\big]. \tag{$**$}$$

a. C'est le genre de question qui demande une solide organisation !

▷ Soit tout d'abord $y\in Y(\Omega)$ et $x\in g^{-1}(\{y\})$. Nous avons conditionnellement

$$\frac{q^*_{[Y=y]}\big([X=x]\big)}{q_{[Y=y]}\big([X=x]\big)}=\frac{q^*\big([X=x]\cap[Y=y]\big)}{q^*(Y=y)}\cdot\frac{q(Y=y)}{q\big([X=x]\cap[Y=y]\big)}=\frac{q^*(X=x)}{q^*(Y=y)}\cdot\frac{q(Y=y)}{q(X=x)},$$

la dernière égalité profitant, *a donf*, de la récente inclusion $(**)$.

▷ Soit à nouveau $y\in Y(\Omega)$ et $x\in g^{-1}(\{y\})$. La même et percutante $(**)$ nous apprend également que

$$q^*(X=x)=q^*(Y=y)\cdot q^*_{[Y=y]}(X=x),$$

et nous allons pouvoir attaquer les choses sérieuses.

Nous partons de la quantité — que nous notons Δ pour alléger — que voilà.

$$\Delta=d(X)-\sum_{y\in Y(\Omega)} q^*(Y=y)\sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} q^*_{[Y=y]}(X=x)\cdot\ln\frac{q^*_{[Y=y]}\big([X=x]\big)}{q_{[Y=y]}\big([X=x]\big)},$$

qui provient *de visu* de la différence de deux des protagonistes de notre projet. Grâce au théorème de sommation par paquets — en appui sur la partition des bergers signalée *supra* — et à ce que nous venons de raconter à l'instant, la différence Δ devrait assez facilement devenir

$$\Delta = \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} \left[q^*(X=x)\cdot \ln \frac{q^*(X=x)}{q(X=x)} - q^*(X=x)\cdot \ln \left[\frac{q^*(X=x)}{q^*(Y=y)} \cdot \frac{q(Y=y)}{q(X=x)} \right] \right],$$

ce qui, *via* nos logarithmiques souvenirs de nos *seventies* et une énorme simplification, devient *in fine*

$$\Delta = \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} q^*(X=x) \ln \frac{q^*(Y=y)}{q(Y=y)},$$

et qui peut tranquillement se récrire

$$\Delta = \sum_{y\in Y(\Omega)} \ln \frac{q^*(Y=y)}{q(Y=y)} \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} q^*(X=x).$$

Oui mais voilà, nous avons tour à tour et sans complexes

$$\sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} q^*(X=x) = q^*\big(X\in g^{-1}(\{y\}\big) = q^*\big(g(X)=y\big) = q^*(Y=y),$$

à telle enseigne que

$$\Delta = \sum_{y\in Y(\Omega)} \ln \frac{q^*(Y=y)}{q(Y=y)} \cdot q^*(Y=y),$$

ce qui, une fois réveillé, permet au *physio* de clamer que

$$\Delta = d(Y),$$

chronique d'une belle égalité avancée…

b. Soit $y\in Y(\Omega)$. Considérons la somme

$$A_y = \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} q^*_{[Y=y]}(X=x)\cdot \ln \frac{q^*_{[Y=y]}\big([X=x]\big)}{q_{[Y=y]}\big([X=x]\big)},$$

qui est quelque part sous nos yeux. Grâce encore une fois à notre sempiternelle inégalité de concavité nous avons cette fois

$$A_y \geqslant \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} \Big(q_{[Y=y]}(X=x) - q^*_{[Y=y]}(X=x) \Big),$$

mais comme, à l'évidence,

$$\forall x\in X(\mathbb{N}) \smallsetminus g^{-1}(\{y\}), \qquad q_{[Y=y]}(X=x) = q^*_{[Y=y]}(X=x) = 0,$$

nous revendiquons dans la foulée que

$$A_y \geqslant \sum_{x\in X(\mathbb{N})} \Big(q_{[Y=y]}(X=x) - q^*_{[Y=y]}(X=x) \Big).$$

Il faut alors avoir bien pris conscience de ce que $q_{[Y=y]}$ et $q^*_{[Y=y]}$ sont également des probabilités sur notre probabilisable $\big(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$, à telle enseigne que, lois de probabilité obligent, nous avons

$$\sum_{x\in X(\mathbb{N})} q_{[Y=y]}(X=x) = \sum_{x\in X(\mathbb{N})} q^*_{[Y=y]}(X=x) = 1,$$

ce qui nous apprend, pour finir, le magique
$$A_y \geqslant 0,$$
et de là à en déduire qu'effectivement
$$d(X) \geqslant d(Y),$$
il n'y a qu'un pas que nous franchissons dans la plus grande des allégresses !

$12.a$. Si cela ne dérange personne, nous allons commencer par établir l'égalité demandée. *Here we go !*

Nous avons déjà rencontré l'égalité

$$\sum_{x \in X(\mathbb{N})} \big(q^*(X=x) - q(X=x)\big) = 0,$$

qui, vu nos nouvelles dispositions, s'écrit également

$$\sum_{x \in B} \big(q^*(X=x) - q(X=x)\big) + \sum_{x \in \overline{B}} \big(q^*(X=x) - q(X=x)\big) = 0.$$

À côté de cela, nous avons *absolument*

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \big|q^*(X=x) - q(X=x)\big| = \sum_{x \in B} \big(q^*(X=x) - q^*(X=x)\big) - \sum_{x \in \overline{B}} \big(q^*(X=x) - q^*(X=x)\big),$$

ce que nous nous devons d'écrire sur-le-champ

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \big|q^*(X=x) - q(X=x)\big| = q^*(X \in B) - q(X \in B) - \big(q^*(X \in \overline{B}) - q(X \in \overline{B})\big).$$

À côté de cela, la très légendaire et déjà rencontrée

$$\sum_{x \in X(\mathbb{N})} \big(q^*(X=x) - q(X=x)\big) = 0,$$

devrait nous apprendre que

$$q^*(X \in \overline{B}) - q(X \in \overline{B}) = -\big(q^*(X \in B) - q(X \in B)\big)$$

à telle enseigne que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \big|q^*(X=x) - q(X=x)\big| = 2\big(q^*(X \in B) - q(X \in B)\big).$$

Il suffit alors d'élever au carré tout ce beau monde.

Il nous faut maintenant nous occuper de la situation des réels

$$q^*(X \in B) \quad \text{et} \quad q(X \in B).$$

Le texte a fait la simple hypothèse
$$q^* \neq q$$
mais celle-là nous semble un peu courte pour conclure. Nous allons la remplacer par

$$\exists x \in X(\Omega), \qquad q^*(X=x) \neq q(X=x). \tag{NEW}$$

Nous nous organisons.

$\triangleright$ Supposons tout d'abord par l'absurde que $q(X \in B) = 0$. Nous avons déjà signalé plus haut que dans ce cas

$$[X \in B] = \varnothing$$

à telle enseigne que $q^*(X \in B)$ est également nul et la répercussion dans l'égalité précédente conduit alors classiquement à

$$\forall x \in X(\Omega), \qquad q^*(X = x) = q(X = x),$$

ce qui contredit (NEW).

$\triangleright$ Supposons ensuite, toujours par l'absurde, que $q(X \in B) = 1$. Il va s'avérer cette fois que $[X \in B] = \mathbb{N}$ et que dans la foulée $q^*(X \in B) = 1$ également. La répercussion est encore d'actualité et contredit (NEW) derechef. Nous avons donc en conclusion

$$0 < q(X \in B) < 1,$$

et comme q et q^* jouent le même rôle, il advient également que

$$0 < q^*(X \in B) < 1,$$

b. Nous avons de *visu*

$$Y(\mathbb{N}) \subset \{0, 1\},$$

mais fort heureusement, nous venons d'apprendre que

$$0 < q(Y = 1) < 1 \quad \text{et} \quad 0 < q^*(Y = 1) < 1,$$

ce qui donne un sens à $d(Y)$ ainsi qu'à l'égalité

$$d(Y) = q^*(Y = 0) \ln \frac{q^*(Y = 0)}{q(Y = 0)} + q^*(Y = 1) \ln \frac{q^*(Y = 1)}{q(Y = 1)},$$

qui peut également se décliner en

$$d(Y) = \big(1 - q^*(Y = 1)\big) \ln \frac{1 - q^*(Y = 1)}{1 - q(Y = 1)} + q^*(Y = 1) \ln \frac{q^*(Y = 1)}{q(Y = 1)},$$

et comme

$$q^*(Y = 1) = q^*(X \in B) \quad \text{et} \quad q(Y = 1) = q(X \in B),$$

le *physio* reconnaît bien que

$$d(Y) = K\big(q^*(X \in B), q(X \in B)\big).$$

c. Nous observons que

$$Y = \mathbf{1}_{[X \in B]},$$

et si l'on en croit les questions 11.b et 7.b, il devrait en résulter tour à tour que

$$d(X) \geqslant d(Y) \geqslant 2\big(q^*(X \in B) - q(X \in B)\big)^2,$$

et la question 12.a se charge alors de terminer l'affaire.

Partie 4

13.a. Cette fonction est assurément dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve aisément que sa dérivée est nulle.

b. Comme $\mathbb{R}$ est un *intervalle*, la question précédente oblige l'existence d'un réel c tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t)e^{-V(t)} = c \quad \textit{i.e.} \quad y(t) = c\, e^{V(t)}.$$

En conséquence

▹ Si $y(0) = 0$, comme l'exponentielle n'est jamais nulle, fatalement $c = 0$ et y est effectivement la fonction nulle.

▹ Si $y(0) \neq 0$, comme l'exponentielle est à valeurs *strictement* positives, la fonction y est de signe constant strictement positif si $y(0) > 0$ ou strictement négatif si $y(0) < 0$.

14.a. La fonction y est ouvertement dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a sans sourciller

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = -\sum_{i=1}^{n} < e_i - f(t)\,,\, Rf(t) > f_i(t) = -\sum_{i=1}^{n} < e_i\,,\, Rf(t) > f_i(t) + < f(t)\,,\, Rf(t) > (1 - y(t)),$$

la dernière égalité reposant essentiellement sur la bilinéarité du produit scalaire et sur l'apparition magique de la fonction $1 - y$. Ce n'est pas fini, comme il est canoniquement dit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i,$$

cette même bilinéarité amène simplement à

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = - < f(t)\,,\, Rf(t) > + < f(t)\,,\, Rf(t) > (1 - y(t)),$$

c'est-à-dire *in fine* à

$$y'(t) = - < f(t)\,,\, Rf(t) > y(t).$$

Nous sommes alors dans le cadre de la 13.b et comme il est précisé que

$$y(0) = 1 - \sum_{i=1}^{n} f_i(0) = 0,$$

nous apprenons que y est la fonction nulle et par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 1.$$

b. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La fonction f_i est donnée dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_i'(t) = < e_i - f(t)\,,\, Rf(t) > f_i(t).$$

Nous sommes à nouveau au cœur de la 13.b, mais comme ici $f_i(0) > 0$, nous découvrons cette fois que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_i(t) > 0.$$

15. Vu ce que nous allons devoir écrire il est indispensable de vérifier que x^* et tous les $f(t)$ appartiennent à l'ensemble $]0, 1[^n$ et l'une des raisons impérieuses est l'hypothése providentielle $n \geqslant 2$ comme pourra le vérifier le lecteur consciencieux. Tout est donc sous contrôle.

a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme les deux listes

$$(x_1^*, \dots, x_n^*) \quad \text{et} \quad \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$$

sont formées de nombres positifs de somme 1, la première par hypothèse et la seconde depuis la 14, nous pouvons disposer d'une variable aléatoire réelle X sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, à valeurs dans un ensemble, mettons

$$X(\Omega) = \{u_1, \dots, u_n\},$$

telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad q^*(X = u_i) = x_i^* \quad \text{et} \quad q(X = u_i) = f_i(t),$$

et il résulte alors de la question 12, qu'effectivement

$$H\big(f(t)\big) \geqslant \frac{1}{2}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\big|f_i(t) - x_i^*\big|\bigg)^2.$$

b. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La fonction f_i est donnée dérivable sur $\mathbb{R}$, et commes elle vérifie une équation différentielle genre

$$f_i' = \mu_i f_i,$$

nous savons que sa classe explose — déjà signalé plus haut — et sa classe $\mathcal{C}^1$ est presque vraiment un minimum ! Elle est également, depuis la 14.*b*, à valeurs *strictement* positives et il ressort alors des généreux théorèmes généraux que la composée $H \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Un calcul totalement inoffensif débouche maintenant sur

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (H \circ f)'(t) = < f(t) - x^* \,,\, Rf(t) > .$$

c. D'après l'hypothèse (12) à savoir

$$\forall x \in T \setminus \{x^*\}, \qquad < x^* - x \,,\, Rx > > 0,$$

il est bilinéairement clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (H \circ f)'(t) \leqslant 0.$$

La fonction $H \circ f$ est donc décroissante sur l'*intervalle* et comme elle y est minorée par 0, au moins depuis le tout récent a, le théorème de la limite monotone lui assure une limite finie en $+\infty$, que le texte note ℓ, et nous pouvons même ajouter que

$$\ell \geqslant 0.$$

16. Soit $x \in T^*$, ce qui implique, entre autres, des hypothèses de *stricte* positivité très confortables, sur lesquelles nous ne reviendrons pas. La sempiternelle inégalité de concavité logarithmique assurant que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \ln \frac{x_i^*}{x_i} \leqslant \frac{x_i^*}{x_i} - 1 = \frac{x_i^* - x_i}{x_i},$$

la positivité des x_i^* amène déjà en douceur à

$$H(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{x_i}(x_i^* - x_i),$$

ce qui est déjà une première avancée, et vu que tout nombre est inférieur ou égal à sa valeur absolue, nous pouvons poursuivre l'avancée jusqu'à

$$H(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{x_i}|x_i^* - x_i|,$$

la positivité ambiante n'étant pas étrangère à notre réussite. Ensuite, comme à l'évidence minimaliste, nous avons

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{1}{x_i} \leqslant \frac{1}{\min(x_1, \ldots, x_n)},$$

et comme notre récente *valuation* arrive à point nommé, nous pouvons dans un premier temps nous réclamer de

$$H(x) \leqslant \frac{1}{\min(x_1, \ldots, x_n)} \sum_{i=1}^{n} x_i^* \, |x_i^* - x_i|.$$

Il reste alors à ne pas avoir égaré l'inénarrable inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, selon laquelle

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \, |x_i^* - x_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{*2}\Big)^{1/2} \times \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i|^2\Big)^{1/2},$$

et comme l'idyllique position géographique des x_i^* fait allègrement que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{*2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

nous pouvons changer de question.

$17.a$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Il ressort de la 14 que

$$f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big) \in T^*,$$

de telle manière que, selon la précédente, nous avons(*)

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f_i(t) - x_i^*\big)^2 \geqslant \big(\mathtt{min}(x_1, \dots, x_n)\big)^2 \, H^2\big(f(t)\big),$$

et comme depuis la $15.c$

$$H\big(f(t)\big) \geqslant \ell,$$

et que *lapalissadement* ici

$$\mathtt{min}(x_1, \dots, x_n) \geqslant c,$$

nous devons pouvoir changer d'âne !

b. Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. La continuité de la norme euclidienne canonique et le théorème des images réciproques de Hausdorff font que

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \|x - x^*\|^2 \geqslant p\big\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et comme le classique simplexe T est quant à lui un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, nous savons — merci Felix —que l'intersection

$$F = T \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \|x - x^*\|^2 \geqslant p\big\}$$

est déjà un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, et alors de deux choses l'une :

▹ ou bien

$$F = \varnothing,$$

auquel cas l'implication souhaitée est une tautologie, puisqu'il est bien connu de tous les logiciens que du faux, on peut déduire n'importe quoi.

▹ ou bien F n'est pas vide et la fonction

$$\pi : x \mapsto \, < x^* - x \, , \, Rx >$$

ouvertement continue sur $\mathbb{R}^n$, car polynomiale à n variables(**), admet un minimum sur le fermé borné non vide F comme en atteste l'important théorème d'optimisation de Weierstrass. Nous proposons alors

$$q = \min_F \pi,$$

et il nous reste à vérifier la stricte positivité de q. Elle provient tout bêtement de ce que, puisque p est donné *strictement* positif, nous pouvons revendiquer l'enchaînement,

$$x \in F \quad \Rightarrow \quad x \in T \smallsetminus \{x^*\} \quad \Rightarrow \quad \pi(x) > 0,$$

(*) La positivité ambiante étant ici omniprésente, nous nous autorisons à ne pas trop surcharger le discours !

(**) *Because*, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \; \pi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i^* - x_i) R_{ij} x_j$.

le dernier maillon reposant sur l'hypothèse (12). La fonction π est donc à valeurs *strictement* positives sur F et il en est donc de même de son minimum.

c. Nous savons depuis une éternité que ℓ est positif ou nul. Supposons donc par l'absurde que

$$\ell > 0.$$

On propose alors $p = c^2\ell^2$, qui est bien strictement positif, et grâce aux récents a et b, nous récupérons un réel $q > 0$, tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad < x^* - f(t) \,,\, Rf(t) > \geqslant q,$$

ce qui, à l'aide de la formule trouvée lors de la $15.b$, devient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad -(H \circ f)'(t) \geqslant q \quad i.e. \quad (H \circ f)'(t) \leqslant -q$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}_+$. La croissance de l'intégration, les bornes étant dans de bonnes dispositions, révèle alors que

$$\int_0^t (H \circ f)'(u)du \leqslant \int_0^t (-q)du,$$

inégalité que la formule de Gaston Darboux transforme en

$$(H \circ f)(t) - (H \circ f)(0) \leqslant -qt \quad i.e. \quad (H \circ f)(t) \leqslant (H \circ f)(0) - qt.$$

Comme q est *strictement* positif, nous apprenons par *squeeze* que

$$(H \circ f)(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty,$$

ce qui n'est pas très raisonnable ! Nous avons donc ainsi établi que

$$\ell = 0.$$

Soit maintenant pour finir un entier $i \in [\![1, n]\!]$. La question $15.a$ est catégorique. Elle oblige que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left|f_i(t) - x_i^*\right| \leqslant \sqrt{2(H \circ f)(t)},$$

et comme désormais

$$(H \circ f)(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

il advient à nouveau par *squeeze* que

$$f_i(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_i^*,$$

et tout le monde est ravi.

$18.a$. Remarquons tout d'abord que comme

$$x^* = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1),$$

il est lumineux que x^* appartient à T^*. Soit ensuite x appartenant à $T \setminus \{x^*\}$. Au prix d'un développement bilinéariste nous trouvons finalement et aisément que

$$< x^* - x \,,\, Rx > = < x^* - x \,,\, \lambda x + Ax > = \frac{\lambda}{n}\big(x_1 + \cdots + x_n - n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\big),$$

les raisons essentielles étant que

$$< x^* \,,\, Ax > = 0 \quad \text{et} \quad < x \,,\, Ax > = 0,$$

qui résultent très classiquement de
$$AU = 0$$
ainsi que de l'antisymétrie de A. Cela étant, la fabuleuse inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz appliquée au vecteurs x et x^* stipule que *first*
$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant n(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$
and secund, parce que nous sommes censés maîtriser les cas d'égalité de la fabuleuse, que cette inégalité est *stricte* étant donné que les vecteurs x^* et x ne sont sûrement pas colinéaires(*) *because*
$$x \neq x^*.$$

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Vu le *look* que possède ici le vecteur x^*, nous avons immédiatement
$$(H \circ f)(t) = -\ln n - \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n} f_i(t),$$
et ce, grâce notre culture logarithmique des *seventies*. Nous en ressortons alors très tranquillement que
$$f_1(t) \cdots f_n(t) = n^{-n} \times e^{-n(H \circ f)(t)},$$
et comme, depuis belle lurette, la fonction $H \circ f$ décroît…

c. Intéressons-nous au réel *strictement* positif
$$c = f_1(0) \cdots f_n(0),$$
et annonçons $t \in \mathbb{R}_+$. Notre toute fraîche croissance fait que
$$f_1(t) \cdots f_n(t) \geqslant c,$$
ce qui peut très positivement s'écrire
$$f_1(t) \geqslant \frac{c}{f_2(t) \cdots f_n(t)}.$$
Oui mais voilà, comme les $f_i(t)$ appartiennent tous à l'ouvert $]0, 1[$, nous sommes assurés de ce que
$$0 < f_2(t) \cdots f_n(t) < 1,$$
ce qui nous apprend que
$$f_1(t) \geqslant c.$$
Ce que nous venons de faire pour f_1 peut être fait *mutatis mutandis* pour toutes les f_i et la *very* fin de la question 17.*c* n'apporte que du bonheur !

(*) Il est facile de voir que deux vecteurs du simplexe T ne sont colinéaires que si, et seulement si, ils sont égaux.