

ECRICOME PREPA 2022 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique Mathématiques

501740

OSSOLA

AGATHE

13/11/2002

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

501740



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

Nom

OSSOLA

Prénom (s)

AGATHE

20 / 20



Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 /

Numéro de table

057

Exercice 1a). Soit $u \in \mathbb{N}^*$

$$t_u(x) = \frac{x^u}{u!}$$

$$= \frac{x^u + x}{u(u-1)!}$$

$$= \frac{x}{u} t_{u-1}(x)$$

b) fonction $s = f(n, x)$ $t = 1 \quad \parallel \quad t = t - O(n)$ $s = 1 \quad \parallel \quad s = f(0, x)$ for $u = 1:n$ $t = t * (x/u)$ $s = s + t$

end

end fonction

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• f_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale

$$\begin{aligned} \text{• } f_n \text{ est dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k x^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'_n(x) \geq 0$ donc f_n est strictement croissante car elle s'annule en un nombre fini de points.

• De plus: $f_n(0) = 1$ avec la convention $0^0 = 1$.

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

comme $a > 1$ alors $a \in [1; +\infty[$.

d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists ! \, u_n \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(u_n) = a$$

3a).

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

comme $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

alors f_n est croissante.

Déterminons la limite de f_n .

On sait que f_n est une fonction polynomiale

de plus elle est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone elle admet une limite soit finie soit infinie.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} + \dots + 1 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

2b). D'après 2a on sait que.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

soit $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$. en particulier
 $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$ car $f_n(u_n) = f_{n+1}(u_{n+1}) = e$.

d'où par croissance de f . on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad u_n \geq u_{n+1}$$

Bilan: $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

c). D'après 2 $u_n \geq 0$.

de plus $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge

4a) Soit $n \geq 1$.

D'où $\forall n \geq 1 \quad \ln(a) \leq u_n$.

4b)

4c) d'après 4a et 4b.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(a) \leq u_n \leq \ln(b).$$

Par théorème d'encadrement: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.

5a). On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \ln(b)$ par définition de la limite

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Numéro d'inscription

301740



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

A

Nom

OSSOLA

Prénom(s)

AGATHE

20 / 20



Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

2 /

Numéro de table

057

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$5b). |R_n(u_n)| = \left| \int_0^u \frac{e^{t(u_n-t)} t^n}{n!} dt \right|.$$

$$\forall t \in [0; u_n] \quad et \leq 2u \quad \text{or } u_n \leq n.$$

$$\text{donc } et \leq e^n.$$

$$|R_n(u_n)| \leq e^n \left| \int_0^u \frac{(u_n-t)^n}{n!} dt \right|.$$

$$\leq e^n \int_0^u \frac{|u_n-t|^n}{n!} dt \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

$$\leq e^n \left[-\frac{|u_n-t|^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^u.$$

$$\leq e^n \frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\underline{|R_n(u_n)| \leq e^n \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}}$$

5c). On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ par croissance comparée

$$\text{or } |R_n(u_n)| \leq e^n \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

d'où $R_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

6a). Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ entre 0 et x
 D'après l'égalité de Taylor avec reste intégral à l'ordre
 appliqué à h en 0 :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{h^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

or $\forall k \in \mathbb{N}, h^{(k)}(0) = e^0 = 1.$

et $h^{(n+1)}(t) = e^t.$

d'où $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$

$e^x = f_n(x) + R_n(x)$

6b) En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n$
 on a : $e^{u_n} = a + R_n(u_n).$

$$e^{u_n} = a + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En appliquant le logarithme (strict car $a > 1$)

$$u_n = \ln\left(a + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$u_n = \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

7a). Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant pareillement qu'en 6a l'égalité de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$

et en rappelant que $f^{(n+1)}(t) = e^t$ on a :
 $\forall u \in [0; n+1] \quad f^{(u)}(0) = 1.$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-0)^k}{k!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

$$e^x = f_{n+1}(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

b). d'après 7a, en particulier pour $x = u_n$.

$$e^{u_n} = f_{n+1}(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

$$= a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

or $\forall t \in [0; u_n] \quad (u_n - t) \leq u_n$

$\forall t \in [0; u_n] \quad (u_n - t)^{n+1} \leq u_n^{n+1}$ par croissance de $t \mapsto t^{n+1}$

$\forall t \in [0; u_n] \quad \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \leq \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} e^t$ sur $\mathbb{R}_+$

par croissance de l'intégrale donnée

$$\int_0^{u_n} \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \leq \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} e^{u_n}$$

$$\text{or } \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} e^{u_n} =$$

c) on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$ d'après 4c.

donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a)$.

or. $u_n^{n+1} = \ln(a)^{n+1} + o(\ln(a)^{n+1})$.

$$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ par croissance comparée

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

+ d). n. après 6b.

$$u_n - \ln(a) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

or d'après 6b. $o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$

d'où $u_n -$ et $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$

Numéro d'inscription

501740



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

Nom

O S S O L A

Prénom (s)

A & A T H E

20 / 20

Ecricome

Épreuve : mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

/

Numéro de table

057

Exercice 2.101. Soit $X \in \mathbb{N}_3(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = -x \\ 2y = -y \\ x + 4y - 2z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\text{E}_1(f) = \text{vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.Comme le sous-espace propre est non-nul, -1 est valeur propre de f .
Le sous-espace propre associé $\text{E}_{-1}(f) = \text{vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 2x \\ 2y = 2x \\ x + 4y - 2z = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y - 2x \\ y = x \\ x = 4y + 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y - 2x \\ x = 4(y - 2x) - 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y - 2x \\ x = -8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

donc $E_2(f) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ le vecteur étant non-nul 2 est
valeur propre de f .

b). On a $\text{tr}(A) = 0$.

si f est diagonalisable, alors A est semblable à une
matrice diagonale ayant les valeurs propres de A
sur sa diagonale, notée D .

Or deux matrices semblables ont même trace.

donc $-2 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Or 1 n'est pas valeur propre de f .

On peut aboutir au fait que f n'est pas diagonalisable.

2). Soit $\lambda \in \text{Ker}(f + \text{id})$.

soit $f(\lambda) = -\lambda$.

$$(f + \text{id})\lambda = 0.$$

En composant par $f + \text{id}$

$$(f + \text{id})^2 \lambda = 0.$$

donc $\lambda \in \text{Ker}(f + \text{id})^2$

3). D'après 1b. $\dim \ker(f - 2id) = 2$.

et $\dim \ker(f + id)^2 = 2$.

car $\dim \ker(f + id) \leq \dim(\ker(f + id))^2 \leq 3$. et $\dim \ker(f + id)^2 \neq 1$
et $\neq 3$
d'où $\dim \ker(f - 2id) + \dim \ker(f + id)^2 = \dim \mathbb{R}^3$

D'après 2. $\ker(f - 2id) \neq \ker(f + id)^2$.

montrons que $\ker(f - 2id) \cap \ker(f + id)^2 = \{0\}$.

$$f(x) = 2x$$

$$(f + id)^2(x) = 0.$$

$$f^2(x) + 2f(x) + x = 0$$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) + 4x + x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4x + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

donc $\ker(f - 2id) \cap \ker(f + id)^2 = \{0\}$.

D'où la décomposition des deux espaces dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2id) \oplus \ker(f + id)^2$$

41. soit $x \in \ker(f - 2\text{id})$

$$f(x) = 2x$$

$$f^2(x) = 2f(x)$$

$$(f - 2\text{id}) f(x) = 0$$

donc $f(x) \in \ker(f - 2\text{id})$

Bilan: f est stable par f

soit $x \in \ker(f + \text{id})^2$.

$$(f + \text{id})^2(x) = 0 \Leftrightarrow f^2 + 2f + \text{id} = 0$$

$$\Rightarrow f(f^2 + 2f + \text{id})(x) = 0$$

$$\Rightarrow (f + \text{id})^2(f(x)) = 0$$

donc $f(x) \in \ker(f + \text{id})^2$.

Bilan: b est stable par f .

5).

Numéro d'inscription

501740



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

Nom

OSSOLA

Prénom (s)

AGATHE

20 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

4 /

Numéro de table

057

6). Comme $(f + id)^2 \circ (f - 2id) = 0$ d'après
alors $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

de plus comme f et l'identité commutent
Ainsi les endomorphismes π_1 et π_2 commutent!

7e). on a $\pi_2 \circ \pi_1 = -\frac{1}{9} (f + 4id) \circ (f - 2id) \circ \frac{1}{9} (f + id) = 0$

car $(x+1)^2 (x-4)$ est un polynôme annulateur de f

2f) Ainsi on a $\text{Im}(\pi_1) \subset \ker(\pi_2)$

car $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

0e). $\pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{9} (f + id)^2 - \frac{1}{9} (f + 4id) \circ (f - 2id)$

comme f et id commutent:

$$= \frac{1}{9} f^2 + \frac{2}{9} f + \frac{1}{9} id - \frac{1}{9} (f^2 - 2f + 4f - 8id)$$

$$= \frac{1}{9} f^2 + \frac{2}{9} f + \frac{1}{9} id - \frac{1}{9} f^2 - \frac{2}{9} f + \frac{8}{9} id$$

d'où $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}$

- si $x \in \ker(\pi_2)$ alors $\pi_2(x) = 0 \Rightarrow (\text{id} - \pi_1)(x) = 0$
 $\Rightarrow \pi_1(x) = x$.

donc $x \in \text{Im}(\pi_1)$

on a donc $\ker(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$

81. D'après 7b et 8b on a $\ker(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$
 (on a les deux inclusions)

- D'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes π_1 et π_2 .
 $\dim \ker(\pi_1) + \dim \text{Im}(\pi_1) = \dim E$

$$\dim \ker(\pi_2) + \dim \text{Im}(\pi_2) = \dim E$$

$$\text{or } \ker(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$$

$$\text{donc } \dim \ker(\pi_1) = \dim \text{Im}(\pi_2)$$

- de plus si $x \in \ker(\pi_1)$ $\pi_1(x) = 0 \Rightarrow (\text{id} - \pi_2)(x) = 0$
 $\Rightarrow \pi_2(x) = x$.

donc $x \in \text{Im}(\pi_2)$. D'où l'inclusion $\ker(\pi_1) \subset \text{Im}(\pi_2)$.

Par inclusion et égalité de dimensions $\ker(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)$

82. D'après 7a et 8a) on a $\begin{cases} \pi_2 \circ \pi_1 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = \text{id} \end{cases}$

de plus π_1 et π_2 commutent, on retrouve ici la définition

de projecteurs associés. vérifions que π_1 et π_2 sont des projecteurs
 de plus on a bien $\pi_1 \circ \pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_1 \circ (\text{id} - \pi_1) = 0$
 $\Rightarrow \pi_1^2 = \pi_1.$

de même on obtient : $\pi_2^2 = \pi_2.$

Comme π_1 et π_2 sont des endomorphismes on a bien

π_1 et π_2 sont des projecteurs

1).

π_2 est le projecteur sur $\text{Im}(\pi_2)$ parallèlement à $\ker(\pi_2)$ par définition d'un projecteur

• or d'après 3. $\text{Im}(\pi_2) = \ker(\pi_1)$

$$\begin{aligned} \text{et } \ker(\pi_1) &= \ker\left(\sum (f + i\alpha)^2\right) \\ &= \ker(f + i\alpha)^4 \\ &= G \end{aligned}$$

• de plus. $\ker(\pi_2) = \ker\left(\sum (f + 4i\alpha)(f - 2i\alpha)\right).$

$$= \ker(f - 2i\alpha) \text{ car } F = \ker(f - 2i\alpha)$$

est stable par F d'après 4.

donc π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F .

Comme π_1 est le projecteur associé et sur $\ker(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)$
 $\uparrow$
 $\text{Im}(\pi_2) = \ker(\pi_1)$

alors π_1 est le projecteur sur F parallèlement à G .

12)

Comme $h = f - g$.

et que g est un polynôme de l'endomorphisme f .

Alors h est un polynôme de l'endomorphisme f .

Comme g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f ils commutent.

Numéro d'inscription

501740



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

Nom

O S S O L A

Prénom (s)

A G A T H E

20 / 20

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐ 5☐

Numéro de table

057

$$\begin{aligned}
 14). (f - 2ia) \circ \pi_1 + (f + ia) \circ \pi_2 &= (f - 2ia) \circ (f + ia)^2 + (f + ia) \\
 &\quad - f \circ (f + 4ia) \circ (f - 2ia) \\
 &= (f - 2ia) [f \circ (f + ia)^2 - f \circ (f + 4ia) \circ (f + ia)] \\
 &= (f - 2ia) \pi_1 + \pi_2 (f + ia) \\
 &= f \circ \pi_1 - 2\pi_1 + f \circ \pi_2 + \pi_2 \\
 &= f \circ (\pi_1 + \pi_2) - (2\pi_1 - \pi_2).
 \end{aligned}$$

$$(f - 2ia) \circ \pi_1 + f \circ \pi_2 = f - g$$

on a donc démontré l'égalité

$$\begin{aligned}
 \text{car } \pi_1 + \pi_2 &= ia \\
 2\pi_1 - \pi_2 &= g.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h^2 &= ((f - 2ia) \circ \pi_1 + (f + ia) \circ \pi_2)^2 \\
 &= (f - 2ia)^2 \pi_1 + 0 + (f + ia)^2 \circ \pi_2 \\
 &= 8\pi_1 \circ \pi_2 + 0.
 \end{aligned}$$

car $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$
 $\pi_1^2 = \pi_1$ $\pi_2^2 = \pi_2$

$$h^2 = 0.$$

15). Comme $h \neq 0_{A(E)}$ et que $h^2 = 0$, donc h est nilpotent.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

De plus g est diagonalisable.

Enfin g et h commutent.

Conclusion: $f = h + g$. On a bien montré que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ qui commutent avec l'un diagonalisable et l'autre nilpotent.

Problème.

Partie 1.

1a). $f_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ étant que composé de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \mu, a = \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

on obtient alors la dérivée seconde

$$f'_{\mu,a} = \frac{1}{a^2} e^{-e^{\frac{\mu-x}{a}}} e^{\frac{\mu-x}{a}} (e^{\frac{\mu-x}{a}} - 1).$$

b). On a donc le tableau suivants

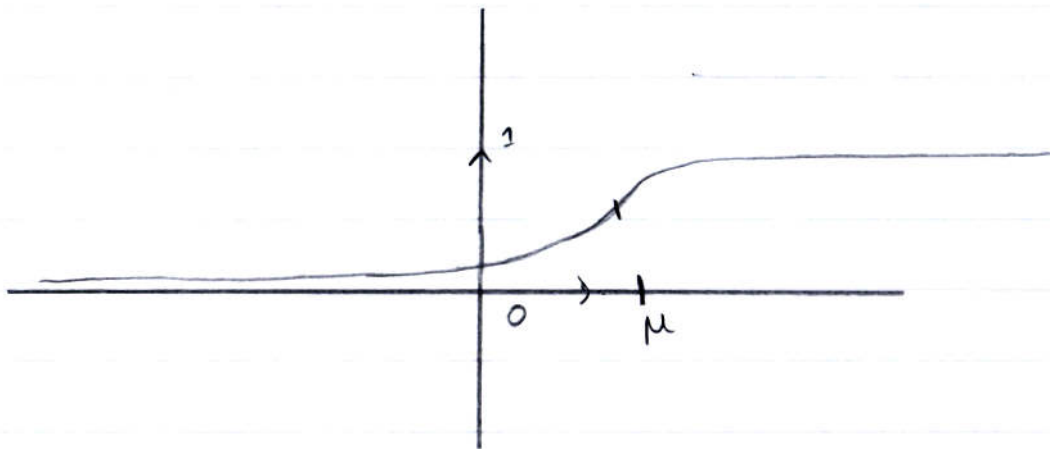
	x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'_{\mu, \sigma}$			+
variation de $F_{\mu, \sigma}$		0	1

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu, \sigma}(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu, \sigma}(x) = 0$.

		$-\infty$	μ	$+\infty$
signe de $f''_{\mu, \sigma}$		+	ϕ	-
convexité de $F_{\mu, \sigma}$		convexe		concave

Le point d'inflexion est μ .

(j'ai placé μ arbitrairement car $\mu \in \mathbb{R}$).



c). $F_{\mu, \sigma}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall \mu, \sigma$ est strictement positif d'après b).

de plus. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu, \sigma}(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu, \sigma}(x) = 0$.

D'après le théorème de la bijection, $F_{\mu, \sigma}$ réalise une bijection

de $\mathbb{R}$ sur $(0;1]$.

Notons G la réciproque de $f_{0,1}$

$$f_{0,1} = e^{-e^{-x}}$$

Soit $y \in]0;1]$ et $x \in \mathbb{R}$

$$y = e^{-e^{-x}}$$

$$\ln(y) = -e^{-x}$$

$$-\ln(y) = e^{-x}$$

$$\ln(-\ln(y)) = -x$$

$$-\ln(-\ln(y)) = x.$$

Donc $G: y \mapsto -\ln(-\ln(y))$ est la fonction réciproque de $f_{0,1}$.

2). $f_{\mu,a}$ est définie et positive sur $\mathbb{R}$

$f_{\mu,a}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Sous réserve de convergence on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-t}{a}} e^{-e^{-\frac{\mu-t}{a}}} dt$$

$$= \left[\exp(-\exp(\frac{\mu-t}{a})) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

or $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{\mu,a}(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f_{\mu,a}(t) = 0$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt = 1$.

Ainsi $f_{\mu,a}$ est une densité.

La fonction de répartition associée est $\int_0^x f_{\mu,a}(t) dt$

Numéro d'inscription

501740



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

Nom

OSSOLA

Prénom(s)

AGATHE

20 / 20

Ecricome

Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

6 /

Numéro de table

057

Donc $F_{\mu, a}$ est la fonction de répartition associée

3). Soit $Y \in (0, 1)$.

$X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Soit $x \in X(\Omega)$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(aZ + \mu \leq x) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{a}\right) \quad \text{car } a > 0. \\ &= \end{aligned}$$

$$P(X \leq x) = \exp(-\exp(-\frac{x - \mu}{a}))$$

$$F_X(x) = \exp(-\exp(-\frac{x - \mu}{a})).$$

donc X suit une loi de Gumbel de paramètre μ, a

4a). Soit $U \in \mathcal{U}(0, 1)$.

on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}$

Soit $x \in Y(\Omega)$

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(-\ln(-\ln(U)) \leq x) \\ &= P(\ln(-\ln(U)) \geq -x) \end{aligned}$$

$$= P(- \ln(u) \geq e^{-x})$$

$$= P(\ln(u) \leq -e^{-x})$$

$$F_Y(x) = P(u \leq e^{-e^{-x}}).$$

par croissance de la fonction exponentielle.

$$\text{or } F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

donc

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-e^{-x}} < 0 \\ e^{-e^{-x}} & \text{si } e^{-e^{-x}} \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } e^{-e^{-x}} > 1 \end{cases}$$

or $e^{-e^{-x}} < 0$ n'est jamais vrai et $e^{-e^{-x}} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} < 0$ qui est toujours faux

$$\text{or si } F_Y(x) = e^{-e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ainsi Y suit une loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$

à fonction $G = \text{gumbel}(\mu, \sigma)$.

$$Y = -\log(-\log(\text{rand}()))$$

$$g = a * Y + \mu.$$

end fonction.

5a). La fonction intégrée est continue sur $]0; +\infty[$.

L'intégrale admet donc deux impropres en 0.

$$e^{-u} \ln(u) \sim_0 \ln(u)$$

$$= o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

car $\lim_{u \rightarrow 0} \sqrt{u} \ln(u) = 0$ par croissance comparée

or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}$ du converge d'après le critère de Riemann ($d = \frac{1}{2} < 1$)

Par comparaison d'intégrales. $\int_0^1 e^{-u} \ln(u)$ du converge.

en $+\infty$

$$e^{-u} \ln(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

$$\text{car } \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u} \ln(u) = 0$$

par produit de croissance comparées

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}$ du converge d'après le critère de Riemann.

Par comparaison d'intégrales: $\int_1^{+\infty} e^{-u} \ln(u)$ du converge

Bilan: $\int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(u)$ du converge.

5b) Posons $t = e^{-u}$ de sorte que t est strictement monotone sur $[A, B]$. ($A, B \in \mathbb{R}^+$).

$$\begin{aligned} \int_A^B \ln(-\ln(t)) dt &= \int_{-\ln(A)}^{-\ln(B)} \ln(u) \cdot e^{-u} du \\ &= \int_{-\ln(B)}^{-\ln(A)} \ln(u) e^{-u} du \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $A \rightarrow 0$ et $B \rightarrow 1$.

$$\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt = \int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du.$$

d'après 5a l'intégrale de droite converge donc l'intégrale de gauche aussi.

$$\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt \text{ converge}$$

c). Sous-échange de convergence on a:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \mathbb{1}_{0,1}(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t} e^{-e^{-t}} dt$$

Posons $u = e^{-e^{-t}}$ de dans $\mathbb{C}^1$ strictement monotone sur $[A, B]$ et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_A^B t e^{-t} e^{-e^{-t}} dt = \int_{\ln(-\ln(A))}^{\ln(-\ln(B))} \ln(-\ln(u)) du.$$

En passant à la limite quand $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t} e^{-e^{-t}} dt = \int_0^1 \ln(-\ln(u)) du.$$

Cette intégrale converge d'après 5b

Donc Z admet une espérance et $E(Z) = \gamma$.

Numéro d'inscription

5 0 1 7 4 0



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

Nom

B S S O L A

Prénom (s)

A G A T H E

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Naths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐ 7☐

Numéro de table

0 5 7

a) or $X = az + \mu$. Comme z admet une espérance, X en admet une
par linéarité de l'espérance

$$E(X) = aE(Z) + \mu$$

$$\underline{E(X) = a\tau + \mu}$$

6). a). $-Z(\Omega) = \mathbb{R}$

Soit $x \in -Z(\Omega)$.

$$P(-Z \leq x) = P(Z \geq -x)$$

$$= 1 - P(Z \leq -x).$$

Comme Z est une variable à densité alors $-Z$ l'est aussi!
 Une densité s'obtient par dérivation.

$$g(x) = P(Z \leq -x).$$

$$\underline{g(x) = e^x e^{-e^x}} \text{ car } Z \sim \mathcal{Y}(0,1).$$

6b) la fonction intégrée est continue sur $[0; +\infty[$.

en $+\infty$.

$$u e^{-(e^{-x}+1)} u = o\left(\frac{1}{u}\right) \text{ car } \lim_{u \rightarrow +\infty} u^3 e^{-(e^{-x}+1)} u = 0.$$

Par comparaison avec le critère de Riemann:

$$\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du \text{ converge.}$$

Déterminons sa valeur.

Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } h: t \mapsto & -\frac{1}{(e^{-x}+1)} e^{-(e^{-x}+1)t} \\ v: t \mapsto & t \end{aligned} \quad \text{continues sur } [0; A]$$

Par intégration par parties on a:

$$\int_0^A u e^{-(e^{-x}+1)u} du = \left[\frac{t}{(e^{-x}+1)} e^{-(e^{-x}+1)t} \right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{(e^{-x}+1)} e^{-(e^{-x}+1)t} dt$$

$$= -\frac{A e^{-(e^{-x}+1)A}}{(e^{-x}+1)} + \int_0^A \frac{e^{-(e^{-x}+1)t}}{(e^{-x}+1)} dt$$

$$= -\frac{A e^{-(e^{-x}+1)A}}{e^{-x}+1} + \left[-\frac{e^{-(e^{-x}+1)t}}{(e^{-x}+1)^2} \right]_0^A$$

en passant à la limite quand $A \rightarrow +\infty$

$$\text{on a: } \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{A e^{-(e^{-x}+1)A}}{e^{-x}+1} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{e^{-(e^{-x}+1)A}}{(e^{-x}+1)^2} = 0.$$

$$\text{d'où } \int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$$

c). Posons $u = e^t$ de dans $\mathbb{R}^2$ sur $[A, B]$ ($A, B \in \mathbb{R}^2$)

$$\int_A^B e^{-(x-t)} e^{-e^{-(x-t)}} e^t e^{-e^t} dt = \int e^{-x+2t} e^{-(e^{-x}+1)e^t} dt$$

$$e^{-x} \int_A^B e^{2t} e^{-(e^{-x}+1)e^t} dt = \int_A^B \frac{u^2}{u} e^{-(e^{-x}+1)u} du$$

par passage à la limite on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

a) Y et $-Z$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes d'après le lemme des conditions.

d'après la formule de convolution la variable aléatoire

$Y-Z$ est à densité de densité. $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt$

Cette intégrale converge d'après c).

Donc $Y-Z$ est une variable aléatoire continue

$$\text{et } f_{Y-Z}(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

18

Partie II.

tel. supposons que $V_n \xrightarrow{P} V$ et $W_n \xrightarrow{P} W$.

alors $\alpha V_n \xrightarrow{P} \alpha V$ et $\beta W_n \xrightarrow{P} \beta W$ par définition de la limite en probabilité.

De plus, d'après le théorème de Slutsky.

$$\underline{\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow{P} \alpha V + \beta W.}$$

Numéro d'inscription

3 0 1 7 4 0



Né(e) le

13 / 11 / 2002

Signature

A

Nom

O S S O L A

Prénom (s)

A U A T H E

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Maths

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐ 8☐

Numéro de table

057

7b). n correspond à la moyenne empirique.

Comme les $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont indépendantes admettent la même espérance et une variance.

D'après le loi faible des grands nombres

$$\underline{n \xrightarrow{P} E(X_1)}.$$

- Comme les $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont indépendantes, par lemme des variables les $(X_i^2)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont indépendantes et elles admettent une même espérance et une variance.
- D'après le loi faible des grands nombres.

$$\underline{cn \xrightarrow{P} E(X_1^2)}.$$

$$7d). \frac{\sqrt{cn - n^2}}{\sqrt{n}} \text{ converge en probabilité vers } \frac{\sqrt{E(X_1^2) - E(X_1)^2}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{soit } \frac{V(X_1)}{\sqrt{n}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

7 dl. $n_n - A_n \delta$

8b) D'après le graphique que on peut conclure que l'estimateur A_n converge en probabilité ou en loi vers 1.

