

MATHS 1 2021 : Corrigé proposé par G. BIGNON

$$1 - (a) \quad w_m^m = \left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)^m = e^{2i\pi} = 1$$
$$(w_m^a)^m = e^{2ia\pi} = 1$$

Si $a \neq a'$, avec $a, a' \in [0, m-1]$

$$\text{alors } w_m^a = e^{\frac{2ia\pi}{m}} \text{ et } w_m^{a'} = e^{\frac{2ia'\pi}{m}}$$

$$\text{comme } a, a' \in [0, m-1] \quad \frac{2a\pi}{m} \text{ et } \frac{2a'\pi}{m} \in [0, 2\pi[$$

$$\text{donc } \arg(w_m^a) = \frac{2a\pi}{m} \neq \arg(w_m^{a'}) = \frac{2a'\pi}{m}$$

$$\text{donc } w_m^a \neq w_m^{a'}$$

Donc, comme $\forall h \in [0, m-1] \quad w_m^h$ est racine de $X^m - 1$,
et que $X^m - 1$ est de degré m , alors les $(w_m^a)_{0 \leq a \leq m-1}$

sont les racines $\neq$ de $X^m - 1$.

$$\text{Donc } X^m - 1 = 1 \times \prod_{h=0}^{m-1} (X - w_m^h)$$

$$(b) \quad \text{Si } a = km, k \in \mathbb{N} \quad w_m^{a^q} = (w_m^m)^{aq} = 1$$
$$\text{donc } \sum_{q=0}^{m-1} w_m^{aq} = \sum_{q=0}^{m-1} 1 = m$$

Si maintenant on pose $s = 2m + n$ la division euclidienne de s par m , donc ici $0 < n < m$.

$$\text{Donc } w_m^s = w_m^{2m+n} = w_m^n.$$

avec $n \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ donc $w_m^n \neq 1$ donc

$$\sum_{q=0}^{m-1} w_m^{sq} = \frac{1 - (w_m^s)^m}{1 - w_m^s} = 0.$$

$$2 - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\text{donc } A_2 \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ et } A_2^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \det(A - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 2$$

$$= (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$$

$$\text{donc } \text{Sp}(A) = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$$

donc A est diagonalisable.

$$A \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\overline{\mathbb{R}P}$.

3_ (a) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$

$w_4 = e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Un calcul donne $A_4 \overline{A_4} = 4 \cdot \mathbb{I}_4$ donc $A_4^{-1} = \frac{1}{4} \overline{A_4}$

$$A_4^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4^4 = 16 \mathbb{I}_4$$

donc $X^4 - 16$ annule A_4

(c) donc $Sp(A_4) \subset \{-2, 2, -2i, 2i\}$

(d) $F_4(e_0) = \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{j=0}^3 i^{kj} \downarrow_{j,0} \right) e_k \quad \text{où } \downarrow_{j,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \sum_{k=0}^3 i^0 e_k = e_0 \in P$$

$$F_4(e_\varepsilon) = \sum_{h=0}^3 \left(\sum_{j=0}^3 a_{hj} \times 1 \right) e_h$$

$$\left(\sum_{j=0}^3 e^{0 \times j} e_0 \right) + \sum_{h=1}^3 \left(\sum_{j=0}^3 a_{hj} \right) e_h \quad \text{par (a-b)}$$

$$= 4e_0 + 0 \in P$$

donc $P = \text{Vect}(e_0, e_\varepsilon)$ et stable.

$$\text{et } \text{Mat}_{(e_0, e_\varepsilon)}(F|_P) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C_4$$

$$\det(C_4 - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(C_4) = \{-2, 2\}$$

$$\text{et } C_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } C_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base $\overline{v_P}$ de C_4 .

$$\text{Donc } F_{4|P}(2e_0 + e_\varepsilon) = 2(2e_0 + e_\varepsilon)$$

$$\text{et } F_{4|P}(-2e_0 + e_\varepsilon) = -2(-2e_0 + e_\varepsilon)$$

donc $2_1 - 2 \in \text{Sp}(F_4)$ et

$2e_0 + e_1$ et $-2e_0 + e_1$ sont des $\bar{v}_p$ associés

(Cela vient du fait que $F_4(2e_0 + e_1) = F_4|_p(2e_0 + e_1)$
 $\in p = 2(2e_0 + e_1)$)

$$\begin{aligned} (e) \quad F_4(e_0 + e_2) &= \sum_{h=0}^3 \left(i^{h \times 0} + i^{2h} \right) e_2 \\ &= \sum_{h=0}^3 (1 + (-1)^h) e_2 = 2e_0 + 2e_2 \\ &= 2(e_0 + e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(e_1 - e_3) &= \sum_{h=0}^3 (i^{h \times 1} - i^{2 \times 3}) e_2 \\ &= (i - i^3) e_1 + (i^3 - i^9) e_3 \\ &= 2i e_1 - 2i e_3 = 2i(e_1 - e_3) \end{aligned}$$

donc $(e_0 + e_2)$ et un $\bar{v}_p$ associé à 2
 $(e_1 - e_3)$ et un $\bar{v}_p$ associé à $2i$

On vérifie aisément que $(2e_0 + e_1, 2e_0 - e_1, e_0 + e_2, e_1 - e_3)$
est une famille libre de $\mathbb{C}^4$.

Donc on a une base de $\bar{v}_p$ de F_4 .

Donc F_a est diagonalisable et $\text{Sp}(F_a) = \{2, -2, 2i\}$.

$$\begin{aligned} \chi_{-}(a)(1)F_n(e_2) &= \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jh} \times 1 \right) e_2 \\ &= e_2 \text{ d'après Q. 1-b-} \end{aligned}$$

$$(ii) F_n(x) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jh} a^j \right) e_2$$

Comme $|a| \neq 1$, $|w_n^k a| \neq 1$ donc

$$F_n(x) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{1 - (aw_n^h)^n}{1 - aw_n^h} \right) e_2$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1 - a}{1 - aw_n^h} e_2.$$

$$(iii) F_n(x) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{jh} \binom{n-1}{j} \right) e_2$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} (1 + w_n^h)^n e_2$$

Binôme de Newton

(b) Calculons :

$$\overline{y_{m-a}} = \overline{\sum_{j=0}^{n-1} w_m^{(m-a)j} x_j} \quad \text{par propriété de } \overline{}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \overline{w_m^{(m-a)j} x_j} \quad \text{car } x_j \in \mathbb{R}.$$

il suffit de remarquer que, comme $w_m^m = 1$
alors $w_m^{m-a} = w_m^{-a} = \overline{w_m^a}$

$$\text{donc } w_m^{-(m-a)j} = (w_m^j)^{-(m-a)} = (w_m^j)^a$$

$$\text{donc } \overline{y_{m-a}} = \sum_{j=0}^{n-1} w_m^{aj} x_j = y_a.$$

5_ On calcule $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, le $\text{coef}(i, j)$:

$$\overline{A_m A_m}(i, j) = \sum_{k=1}^n A_m(i, k) \overline{A_m(k, j)}$$

$$= \sum_{k=1}^n w_m^{(i-1)(k-1)} \cdot \overline{w_m^{(k-1)(j-1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^n w_m^{(k-1)(i-1+1-j)}$$

$$= \sum_{k=1}^n (w_m^{(i-j)})^{(k-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

d'après 1-b.

Donc $A_m \cdot \overline{A_m} = m I_m$ donc $A_m^{-1} = \frac{\overline{A_m}}{m}$

(b) F_m est inversible car A_m l'est et F_m^{-1} a pour matrice dans B_m : $\frac{1}{m} \overline{A_m}$ donc

$$F_m^{-1}(x) = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \overline{w_m^{hj}} x_j \right) e_h$$

$$\begin{aligned} (c) \quad {}^t(\overline{A_m X}) A_m X &= {}^t(\overline{A_m} \overline{X}) A_m X \\ &= {}^t \overline{X} {}^t \overline{A_m} A_m X \\ \text{p.s.a) } &\downarrow = {}^t \overline{X} m I_m X = m {}^t \overline{X} X. \end{aligned}$$

$$(d) \quad m ({}^t \overline{X} | X) = m (\overline{x_0} - \overline{x_{n-1}}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = m \sum_{h=0}^{n-1} |x_h|^2$$

$$\begin{aligned} {}^t(\overline{A_m} \overline{X}) A_m X &= \sum_{h=0}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \overline{(A_m X)(j)} \right|^2 \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} w_m^{hj} x_j \right|^2 \end{aligned}$$

Remarque: Pour une colonne X , $\epsilon \overline{X} X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

et ceci est une norme sur le $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}^n$.

On remarquera que $\epsilon X X$ ne définit pas une norme sur $\mathbb{C}^n$ car un carré n'est pas positif dans $\mathbb{C}$ donc on perd l'aspect défini-positif.

6 - (a) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A_m)$ et X un $\vec{v}_p$ associé.

$$\text{On a } {}^t(\overline{A_m X}) A_m X = {}^t(\overline{\lambda X}) \lambda X \\ = |\lambda|^2 {}^t \overline{X} X.$$

et d'après 5-b), on a $m {}^t \overline{X} X$ donc
comme $X \neq 0$, ${}^t \overline{X} X \neq 0$ et $m = |\lambda|^2$
ie $|\lambda| = \sqrt{m}$.

$$(b) \quad b_{k,j} = \sum_{i=0}^{m-1} A_m(k,i) \cdot A_m(i,j) \\ = \sum_{i=0}^{m-1} w_m^{ki} w_m^{ij} \\ = \sum_{i=0}^{m-1} (w_m^{k+j})^i$$

On a $w_m^{k+j} = 1$ si $k+j=m$ ou $k+j=0$ ie $j=m-k$ ou

$$k=j=0$$

$$\text{donc } b_{k,m-k} = \sum_{i=0}^{m-1} 1 = m$$

$$\text{et } b_{0,0} = \sum_{i=0}^{m-1} 1 = m$$

$$\text{Si } k \neq j, \quad b_{k,j} = \sum_{i=0}^{m-1} (w_m^{k+j})^i = 0 \text{ d'après 1-b.}$$

$$(c) \quad A_m^4(k,j) = \sum_{i=0}^{m-1} b_{k,i} \cdot b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ m^2 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Donc $A_m^4 = m^2 I_m$.

Donc $X^4 - m^2$ annule A_m

Donc $\text{Sp}(A_m) \subset \{-\sqrt{m}, \sqrt{m}, i\sqrt{m}, -i\sqrt{m}\}$.

7- (a) $F_m(e_1 + e_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_m^k + w_m^{n-1-k}) e_k$

Où a $w_m^{n-1} = w_m^{-1}$ (car $w_m^m = 1$)

donc $F_m(e_1 + e_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_m^k + w_m^{-k}) e_k$
 $= \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) e_k$ ↓ formule d'Euler
 $= 2 e \cos.$

de même $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$F_m(e_1 - e_{n-1}) = 2i e \sin.$

(b) D'après 6-b) $G_m(e_1 + e_{n-1})$
 $= F_m^2(e_1 + e_{n-1}) = m e_0 + m e_1$
 (il suffit de lire la matrice A_m^2).

$$\text{donc } F_m(e_{\cos}) = F_m\left(F_m\left(\frac{e_1 + e_{n-1}}{2}\right)\right) \\ = \frac{1}{2} G_m^2 (e_1 + e_{n-1}) = \frac{m}{2} (e_1 + e_{n-1})$$

$$\text{de même on trouve } F_m(e_{\sin}) = \frac{im}{2} (e_1 - e_{n-1}).$$

$$(c) \text{ Soient } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / \alpha(e_1 + e_{n-1}) + \beta(e_{\cos}) = 0$$

$$\text{ie } \beta e_{\cos} + \left(\alpha + \beta \cos \frac{2\pi}{m}\right) e_1 + \sum_{h=2}^{n-2} \beta \cos\left(\frac{2h\pi}{m}\right) e_h + \left(\alpha + \beta \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{m}\right)\right) e_{n-1} = 0$$

Comme $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est libre, on a d'abord $\beta = 0$

puis $\alpha = 0$. Donc la famille $(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$ est libre.

donc $\mathcal{Q}$ est un plan vectoriel.

et d'après ce qui précède $F_m(e_1 + e_{n-1}) = 2 e_{\cos} \in \mathcal{Q}$

$$F_m(e_{\cos}) = \frac{m}{2} (e_1 + e_{n-1}) \in \mathcal{Q}$$

donc $\mathcal{Q}$ est un plan stable par F_m .

$$\text{et } \text{Mat}_{(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})} (F_m|_{\mathcal{Q}}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a det} \begin{pmatrix} -\lambda & m/2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - m$$

donc cette matrice a deux $-\sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$ comme vp.

$$\text{et } \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \\ \sqrt{m} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{m}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{m}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{m}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des $\vec{vp}$ associés qui forment une base de $\vec{vp}$.

(d) On montre de même que R est de dimension 2 et qu'il est stable (d'après 7. a) et 7. b)

$$\text{Alors } \text{Mat}(F_m|_R) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i m}{2} \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

Ici les valeurs propres sont $i\sqrt{m}$ et $-i\sqrt{m}$.

L'énoncé suggère sans entendre de déterminer des $\vec{vp}$, mais on ne s'en sert pas dans la suite donc je ne m'attarde pas.

(e) Ce qu'on veut nous faire dire ici, c'est la même chose qu'en 3. d) : que les valeurs propres d'un endomorphisme induit sont aussi des vp de l'endomorphisme. Le fait évident doit quand même être vérifié :

Soit ε un vp de $F_M|_Q$, disons associé à $i\sqrt{m}$.

$$F_M(\varepsilon) = F_M|_Q(\varepsilon) = i\sqrt{m} \varepsilon.$$

donc $i\sqrt{m}$ est aussi une valeur propre de F_M .

Donc les complexes $\sqrt{m}, -\sqrt{m}, i\sqrt{m}, -i\sqrt{m}$ sont vp de F_M , et comme on sait déjà que $\text{Sp}(F_M) \subset \{\pm\sqrt{m}, \pm i\sqrt{m}\}$ d'après 6. c)

$$\text{Alos } \text{Sp}(F_M) = \{\pm\sqrt{m}, \pm i\sqrt{m}\}.$$

PARTIE II.

$$8 - (a) \begin{cases} \varphi_n(e_j) = e_{j-1} \\ \varphi_n(e_0) = e_{n-1} \end{cases} \quad j \in [1, n-1]$$

$$\begin{cases} \varphi_n^2(e_j) = \varphi_n(e_{j-1}) = e_{j-2} & j \in [2, n-1] \\ \varphi_n^2(e_0) = e_{n-2} ; \varphi_n^2(e_1) = e_{n-1} \end{cases}$$

donc $J_n^2 =$

$$(b) \text{ Si } j \in [k, n-1] \quad \varphi_n^k(e_j) = \varphi_n^{k-1}(e_{j-1}) = e_{j-k} \quad ; \text{ rien n'a pu se passer car } j-k \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } j \in [0, k-1] \quad \varphi_n^k(e_j) &= \varphi_n^{k-j}(\varphi_n^j(e_j)) \\ &= \varphi_n^{k-j}(e_0) = \varphi_n^{k-j-1}(\varphi_n(e_0)) \\ &= \varphi_n^{k-j-1}(e_{n-1}) \\ &= e_{n-k+j} \end{aligned}$$

(c) La formule ci-dessus est valable encore pour $k=n$, donc :

$$\varphi_n^n(e_j) = e_j \quad \text{donc } \varphi_n^n = \text{id}$$

(d) Donc $J_m^k = C(e_k)$ pour $k \in [0, n-1]$
 $J_m^n = C(e_0) = I_m$.

g-(a) $J_m^m - I_m = 0$ donc $X^m - 1$ annule J_m donc

$$\text{Sp}(J_m) \subset \{w_m^0, \dots, w_m^{m-1}\}.$$

(b) $\varphi_n(F_m(e_k)) = \varphi_m\left(\sum_{i=0}^{m-1} w_m^{k \cdot i} e_i\right)$
 $= \sum_{i=0}^{m-1} w_m^{k \cdot i} \varphi_m(e_i) = \sum_{i=1}^{m-1} w_m^{k \cdot i} e_{i-1} + e_{m-1}$

$i-1=i \downarrow$
 $= w_m^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} w_m^{k(i-1)} e_{i-1} + w_m^{k \cdot m} e_{n-1} \right)$
 $= w_m^k \left(\sum_{i=0}^{m-2} w_m^{k \cdot i} e_i + w_m^{k(n-1)} e_{m-1} \right)$

car $w_m^{-k} = w_m^{k \cdot m - k} = w_m^{k(n-1)}$ ($w_m^{k \cdot n} = 1$)

donc $\varphi(F_m(e_k)) = w_m^k F_m(e_k)$.

et $F_m(e_k) \neq 0$ donc (selon $\overline{v_p}$) associe à la v_p w_m^k .

(c) On a donc trouvé n valeurs propres $\neq (i.f. 21)$

Donc φ_n est diagonalisable et $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=0}^{n-1} E_{\omega_n k}(\varphi_n)$

avec $E_{\omega_n k}(\varphi_n) = \text{Vect}(F_n(e_k))$.

Donc les colonnes de A_n forment une base de $\vec{V}^p$ pour φ_n donc A_n est la matrice de passage de B_n à $(F_n(e_k))_{0 \leq k \leq n-1}$ qui diagonalise J_n :

Comme par ailleurs $A_n^{-1} = \frac{1}{n} \overline{A_n}$, on a bien

$$J_n = A_n \begin{pmatrix} \omega_n^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{n} \overline{A_n}$$

10 - $\text{Circ}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(C(e_0), \dots, C(e_{n-1}))$

donc $\text{Circ}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -v.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n / \lambda_0 C(e_0) + \dots + \lambda_{n-1} C(e_{n-1}) = 0$

donc
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{n-1} & \lambda_0 & \dots & \lambda_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_{n-1} & \lambda_0 & \dots \end{pmatrix} = 0$$

donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1}$ i.e. la famille est libre.

Donc $\dim \text{Circ}_m(\mathbb{C}) = m$.

(b) On va démontrer ce résultat à l'aide de la 11-(a)

11-(a) En 8. (b) on a vague $J_m^h = C(e_h)$

$$\text{donc } C(a) = \sum_{h=0}^{n-1} a_h C(e_h) = \sum_{h=0}^{n-1} a_h J_m^h.$$

Ce qui permet de répondre à la Q. b, en effet:

$$\begin{aligned} \text{Soient } (a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2 \quad C(a) \cdot C(b) &= \left(\sum_{h=0}^{n-1} a_h J_m^h \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i J_m^i \right) \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_h b_i J_m^{h+i} \end{aligned}$$

$$\text{et comme } J_m^n = I_m \text{ alors } J_m^{n+k} = J_m^k$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_h b_i J_m^{h+i} &\in \text{Vect}(J_m^0, \dots, J_m^{n-1}) \\ &= \text{Circ}_m(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

$$\text{donc } C(a) \cdot C(b) \in \text{Circ}_m(\mathbb{C}).$$

$$(b) \text{ Soit } P = \sum_{h=0}^{n-1} a_h X^h, \text{ comme } C(a) = P(J_m)$$

alors comme J_m est diagonalisable alors

$$C(a) \text{ aussi : } P(S_m) = P(P D_m P^{-1}) = P \underbrace{P(D_m)}_{\text{matrice diagonale}} P^{-1}$$

et les valeurs propres de $C(a) = P(S_m)$ sont les $P(\lambda)$ où $\lambda \in Sp(S_m)$ ie

$$Sp(C(a)) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_m^{ik} \mid i \in [0, n-1] \right\}.$$

(c) D'après ce qui précède, ici, $P = X + X^{n-1}$

$$\text{donc } Sp(S_m) = Sp(C(a)) = \left\{ w_m^k + (w_m^k)^{n-1} \mid k \in [0, n-1] \right\}$$

or S_m inversible $\Leftrightarrow 0 \notin Sp(S_m)$

$$\text{et } w_m^k + w_m^{k(n-1)} = 0 \Leftrightarrow w_m^k + \frac{1}{w_m^k} = 0$$

$\xrightarrow{\text{car } w_m^{n-1} = \frac{1}{w_m}}$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0 \text{ a cause } k \in [0, n-1]$$

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0 \text{ donc } 0 \notin Sp(S_m) \text{ donc}$$

S_m est inversible.

$$12 - (a) S_m C(a) = S_m \sum_{k=0}^{n-1} a_k S_m^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k S_m^{k+1}$$

$$= C(a) \mathbb{I}_m \quad \text{donc} \quad \text{Circ}_n(C) \subset \Omega.$$

(b) On a vu en 11.b. que $C(a)$ et $\mathbb{I}_m$ sont diagonalisables et possèdent une matrice de passage commune. Ainsi elles ont les mêmes $\vec{v}_p$ donc leur endomorphismes laissent invariants aussi donc $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ $F_m(e_k)$ est un $\vec{v}_p$ de $\mathcal{L}$.

$$\text{ie } \exists \lambda_k \in \mathbb{C} \mid \mathcal{L}(F_m(e_k)) = \lambda_k F_m(e_k).$$

$$(c) \quad \frac{1}{m} \overline{A_m} M A_m = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Cela vient du fait que A_m est la matrice de passage de $\mathcal{B}_m$ à $(F_m(e_0), \dots, F_m(e_{m-1}))$ et que $A_m^{-1} = \frac{1}{m} \overline{A_m}$.

$$(d) \text{ Soit } \varphi, \text{ définie par :}$$

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & D_m = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{m-1} \end{pmatrix} \mid (\lambda_i) \in \mathbb{C}^m \right\} \\ M & \longmapsto & \frac{1}{m} \overline{A_m} M A_m \end{array}$$

φ arrive bien dans D_m d'après 12. c).

φ est linéaire (évident)

φ est injective car si $\varphi(M) = 0$ alors $M = 0$ (car M semblable à 0).

donc, comme $\dim D_m = m$

alors par injectivité $\dim \Omega \leq \dim D_m = m$.

Comme $\text{Circ}_m(\mathbb{C}) \subset \Omega$ et que $\dim \text{Circ}(\mathbb{C}) = m$

On peut affirmer que $\dim \Omega = m$ et que $\Omega = \text{Circ}_m(\mathbb{C})$.

$$13- (a) [F_m(x)]_k = \sum_{j=0}^{m-1} w_m^{jk} x_j$$

$$\text{et } [F_{\frac{m}{2}}(y)]_k = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_{\frac{m}{2}}^{jk} x_{2j}$$

$$[F_{\frac{m}{2}}(z)]_k = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_{\frac{m}{2}}^{jk} x_{2j+1}$$

On décompose $[F_m(x)]_k$ selon les pairs et impairs:

$$[F_m(x)]_k = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_m^{2jk} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_m^{(2j+1)k} x_{2j+1}$$

Il suffit alors de remarquer que $w_{\frac{m}{2}} = w_m^2$!

$$\text{Ainsi } [F_m(x)]_k = [F_{\frac{m}{2}}(y)]_k + w_m^k [F_{\frac{m}{2}}(z)]_k$$

(car $w_m^{(2j+1)k} = w_m^{2jk+k} = w_m^k \cdot w_{\frac{m}{2}}^j$)

$$[F_m(x)]_{k+\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{m-1} w_m^{j(k+\frac{n}{2})} x_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_m^{2j(k+\frac{n}{2})} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_m^{(2j+1)(k+\frac{n}{2})} x_{2j+1}$$

$$\text{or } w_m^{2j(k+\frac{n}{2})} = w_m^{2jk} \times w_m^{2jn} = w_{\frac{m}{2}}^{jk} \times 1.$$

$$\text{et } w_m^{(2j+1)(k+\frac{n}{2})} = w_m^{2jk + jn + k + \frac{n}{2}} = w_m^{k+\frac{n}{2}} \cdot w_{\frac{m}{2}}^{jk}$$

et $-w_m^2 = (-1)w_m^2 = w_m^{\frac{m}{2}} \cdot w_m^2$, donc :

$$[F_m(x)]_{h+\frac{m}{2}} = [F_{\frac{m}{2}}(y)]_h - w_m^2 [F_{\frac{m}{2}}(z)]_h.$$

(b) L'algorithme calcule selon la formule récursive ci-dessous les coefficients de $F_m(x)$.

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) = ([F_m(x)]_h)_{0 \leq h \leq m-1}.$$

(c) Pour passer de $F_{\frac{m}{2}}(x)$ à $F_m(x)$, on fait une boucle répétée de $\frac{m}{2} = 2^{N-1}$ opérations

Dans chaque itération il y a 4 opérations donc $4 \times 2^{N-1} = 2^{N+1}$ opérations.

A cela s'ajoute le coût du calcul de $F_{\frac{m}{2}}$ pour y et pour z donc $2 \times V_{N-1}$

$$\text{Ainsi } V_N = 2 \times V_{N-1} + 2^{N+1}.$$

$$\begin{aligned} (d) \quad T_N &= \frac{V_N}{2^N} = \frac{2 \times V_{N-1} + 2^{N+1}}{2^N} = \frac{V_{N-1}}{2^{N-1}} + 2 \\ &= T_{N-1} + 2 \end{aligned}$$

On reconnaît une suite arithmétique :

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $V_N = 2 \times N + V_0 = 2N$

Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $V_N = 2N \times 2^N = N 2^{N+1}$.

14- (a) $[F_m(x)]_k = [F_m(y \times z)]_k$

$$\sum_{j=0}^{m-1} w_m^{jk} (y \times z)_j = \sum_{j=0}^{m-1} w_m^{jk} \left(\sum_{i=0}^j y_i z_{j-i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} w_m^{jk} y_i z_{j-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1-i} w_m^{(j+i)k} y_i z_j$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} y_i w_m^{ik} \sum_{j=0}^{m-1-i} w_m^{jk} z_j$$

or pour $i \geq \frac{m}{2}$ $y_i = 0$ donc :

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} y_i w_m^{ik} \sum_{j=0}^{m-1-i} w_m^{jk} z_j$$

et pour $j \geq \frac{m}{2}$ $z_j = 0$, donc pour $i \leq \frac{m}{2} - 1$

on a $m-1-i \geq \frac{m}{2}$, donc $\sum_{j=0}^{m-1-i} w_m^{jk} z_j = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_m^{jk} z_j$

$$\text{donc } [F_m(x)]_k = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} y_i w_m^{ik} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} w_m^{jk} z_j \\ = [F_m(\hat{y})]_k \cdot [F_m(\hat{z})]_k.$$

(b) 1^{ère} étape coûte : $N \cdot 2^{N+1} = 2 \log_2(m) \cdot m$

2^{ème} étape coûte : m opérations

3^{ème} étape coûte : autant que la première car le calcul de F_m^{-1} est équivalent au calcul de F_m :

$$\text{D'après la propriété de } A_m^{-1} = \frac{1}{m} \overline{A_m}$$

donc calculer F_m^{-1} se fait de la même manière que le calcul de F_m en substituant $\overline{w_m}$ à w_m , et en divisant tout par m .

Donc on a un coût de $2 \log_2(m) m + 1$

Coût total : $m + 4 \log_2(m) m + 1$

Remarque : Ce point est très difficile à remarquer.

(c) Le calcul de x_k de cette manière coûte :

$k+1$ produits : $y_0 z_k, y_1 z_{k-1}, \dots, y_k z_0$

k additions : $y_0 z_k + y_1 z_{k-1}$ etc.

donc un coût de :

$$\sum_{k=0}^{m-1} (k+1) + k = m(m-1) + m = m^2$$

Conclusion :

Comme $m + 4m \log_2(m) + 1 = o(m^2)$

La méthode est plus efficace (pour des grandes valeurs de m).

Remarque : Ces questions sont, à mon sens, infaisables pour qui n'a pas été initié aux questions de complexité algorithmique.