



# **Classes préparatoires aux grandes écoles**

**Filière économique**

**Voie technologique  
ECT**

**Programmes de mathématiques - informatique**

**1<sup>ère</sup> année**

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>1 Objectifs généraux de la formation</b>	<b>3</b>
<b>2 Compétences développées</b>	<b>3</b>
<b>3 Architecture des programmes</b>	<b>3</b>
<b>ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE</b>	<b>6</b>
<b>I - Outils mathématiques</b>	<b>6</b>
1 - Raisonnement . . . . .	6
2 - Ensembles, applications . . . . .	6
a) Ensembles, parties d'un ensemble . . . . .	7
b) Applications . . . . .	7
3 - Calculs numériques et algébriques . . . . .	7
4 - Polynômes à coefficients réels . . . . .	8
5 - Fonction valeur absolue . . . . .	8
<b>II - Suites réelles</b>	<b>8</b>
<b>III - Fonctions réelles d'une variable réelle</b>	<b>8</b>
1 - Généralités . . . . .	9
2 - Limites . . . . .	9
3 - Continuité . . . . .	9
4 - Dérivabilité . . . . .	9
5 - Convexité . . . . .	10
<b>IV - Probabilités sur un univers fini</b>	<b>11</b>
1 - Espaces probabilisés finis . . . . .	11
a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements . . . . .	11
b) Probabilité . . . . .	11
c) Probabilité conditionnelle . . . . .	11
d) Indépendance en probabilité . . . . .	11
2 - Variables aléatoires réelles . . . . .	12

<b>ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE</b>	<b>13</b>
<b>I - Systèmes linéaires et introduction au calcul matriciel</b>	<b>13</b>
1 - Systèmes linéaires . . . . .	13
2 - Calcul matriciel . . . . .	13
<b>II - Compléments d'analyse</b>	<b>13</b>
1 - Suites réelles . . . . .	13
2 - Continuité sur un intervalle . . . . .	14
3 - Fonctions logarithme et exponentielle . . . . .	14
<b>III - Probabilités sur un univers fini</b>	<b>15</b>
1 - Coefficients binomiaux . . . . .	15
2 - Lois usuelles finies . . . . .	15
<b>IV - Intégration sur un segment</b>	<b>15</b>
1 - Définition . . . . .	16
2 - Premières propriétés de l'intégrale . . . . .	16
3 - Application . . . . .	16
 <b>ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET D'ALGORITHMIQUE</b>	 <b>17</b>
<b>I - Éléments d'informatique et d'algorithmique</b>	<b>17</b>
1 - Langage Python . . . . .	17
a) Types de base . . . . .	17
b) Structures de contrôle . . . . .	18
c) Utilisation de bibliothèques . . . . .	18
2 - Liste de savoir-faire exigibles en première année . . . . .	19
<b>II - Liste de thèmes</b>	<b>19</b>
1 - Suites . . . . .	19
2 - Statistiques descriptives univariées . . . . .	19
3 - Bases de données . . . . .	20
a) Commandes exigibles . . . . .	21
b) Commandes non exigibles . . . . .	21
4 - Probabilités . . . . .	21

# INTRODUCTION

## 1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

## 2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise à développer en particulier chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates** : savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser** : savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter** : être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter** : savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques** : savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement** : comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

## 3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie technologique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale sciences et technologies du management et de la gestion. Le programme

se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière STMG.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- Une approche de l'algèbre linéaire est présentée en première année par le biais des systèmes d'équations linéaires et l'introduction du calcul matriciel, qui sera poursuivi en seconde année.
- L'analyse en 1<sup>ère</sup> année, vise à mettre en place l'ensemble des outils usuels autour des suites et des fonctions. L'aspect opératoire et l'interprétation graphique sont privilégiés. Aucune difficulté théorique n'est soulevée.
- Les probabilités et les statistiques s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le cadre principal est celui des univers finis pour lesquels le langage abstrait des probabilités est mis en place.
- L'analyse de données sous forme descriptive ou l'utilisation d'une base de données relationnelles permettent d'aborder différents aspects de la manipulation de données volumineuses.
- L'utilisation d'un langage de programmation et de certaines de ses fonctionnalités est enseignée tout au long de l'année au service du programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités, par exemple, permettent d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté ; en revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur y conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.


Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités, ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

La pratique des automatismes installée au lycée dans l'objectif d'acquérir des connaissances, des mé-

thodes et des stratégies immédiatement mobilisables peut être poursuivie sous différentes formes, en accord avec le contenu du cours.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole  indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

# ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

Le premier semestre doit permettre la consolidation des notions étudiées jusqu'en terminale tout en les approfondissant.

## I - Outils mathématiques

*Ce chapitre présente quelques points de vocabulaire, quelques notations, ainsi que des modes de raisonnements indispensables pour avoir la capacité d'argumenter rigoureusement sur un plan mathématique. Ces outils ne doivent pas faire l'objet d'un exposé théorique, les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée et à l'aide d'exemples nombreux et variés issus des différents chapitres étudiés, et pourront être renforcées au delà, en fonction de leur utilité.*

### 1 - Raisonnement

*On confrontera les étudiants à divers modes de raisonnements (démontrer une implication, une équivalence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence) à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés.*

Les étudiants doivent savoir :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde ;
- raisonnement par récurrence (récurrence simple).

Notations :  $\exists$ ,  $\forall$ .

Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

### 2 - Ensembles, applications

*L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications. On s'appuiera sur des représentations graphiques.*

## a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance.  
Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble vide. Réunion. Intersection. Ensembles disjoints. Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.  
Ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ .  
Lois de Morgan.  
Produit cartésien.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).  
Le complémentaire d'une partie  $A$  de  $E$  est noté  $\bar{A}$ .

On introduira les notations  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^n$ .

Cardinal d'un ensemble fini.  
Si  $A$  et  $B$  sont disjoints :  
 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ .  
Formule de Poincaré pour deux ensembles.  
 $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ .

La notion de cardinal est introduite pour son application au calcul des probabilités (uniquement dans le cas de l'équiprobabilité). Tout exercice de dénombrement pur est exclu.

## b) Applications

Définition.  
Image, antécédent.  
Composition.  
Bijection, application réciproque.

Ces notions seront introduites sur des exemples simples.  
La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

## 3 - Calculs numériques et algébriques

*Il s'agit de rappeler les notations  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ , les propriétés des opérations arithmétiques, les règles de calcul, le traitement des égalités et des inégalités.*

Puissances entières de 10.  
Puissances entières d'un réel.  
Développement, factorisation d'expressions algébriques.  
Racine carrée d'un réel positif. Propriétés.  
Identités remarquables.

On attend en particulier la maîtrise des formules  $(xy)^n = x^n y^n$ ,  $x^{n+m} = x^n x^m \dots$   
On manipulera également des quotients.

Les attendus se limitent aux formules suivantes :  
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  ;  
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Manipulation des inégalités.  
Notion d'intervalle.  
Intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert.  
Résolution d'équations et d'inéquations simples.  
Résolution de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Il s'agit d'une reprise des types d'équations et d'inéquations abordées dans les classes antérieures et pratiquées en gestion.



## 4 - Polynômes à coefficients réels

*Toute étude théorique sur les polynômes est exclue. On identifie polynôme et fonction polynomiale.*

Racines et signe d'un polynôme du premier et du second degré. Discriminant.

Somme et produit des racines

Illustration graphique. ▶

Factorisation d'un trinôme du second degré de discriminant positif ou nul.

Polynômes de degré quelconque.

Somme, produit de polynômes.

Factorisation d'un polynôme par  $(x - a)$  si  $a$  est racine de ce polynôme.

Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. ▶

Application à l'étude d'équations et d'inéquations.

Illustration graphique.

## 5 - Fonction valeur absolue

Définition, notation, propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance dans  $\mathbf{R}$ .

## II - Suites réelles

*On présentera des exemples de suites issus du monde économique (capital et taux d'intérêt, emprunt à annuités constantes).*

*Les notions de comportement et de limite ne seront abordées qu'au second semestre.*

*Ce chapitre fournira l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence et donnera l'occasion de consolider les connaissances du lycée de programmation en Python.*

Suites constantes, suites arithmétiques, suites géométriques.

Calcul du  $n$ -ième terme. ▶

Savoir montrer qu'une suite est constante, arithmétique ou géométrique.

Suites arithmetico-géométriques

Calcul du  $n$ -ième terme. ▶

Une formule explicite pourra être donnée, mais on introduira la méthode sur des exemples.

Terme général d'une suite.

Sur des exemples, application à la recherche du terme général d'autres suites à l'aide des suites usuelles.

Aucune étude générale de suites  $u_{n+1} = f(u_n)$  n'est au programme.

Somme des  $n$  premiers nombres entiers naturels et somme des  $n$  premiers termes de la suite  $(q^k)$ .

Notation  $\sum$ .

Somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique, somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique.

Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques. Transformation de

$$\sum_{i=1}^n au_i \text{ et } \sum_{i=1}^n (u_i + v_i). \quad \blacktriangleright$$

## III - Fonctions réelles d'une variable réelle

*Il s'agit de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et les notions nécessaires à leur représentation graphique. Les fonctions logarithme et exponentielle*

*n'étant étudiées qu'au second semestre, il convient donc ici d'utiliser des fonctions qui se déduisent simplement des fonctions polynomiales, rationnelles, valeur absolue ou racine carrée. On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits.*

## 1 - Généralités

Vocabulaire : ensemble de définition, image, antécédent, représentation graphique d'une fonction.

Fonctions paires, impaires.

Fonctions monotones, strictement monotones.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Somme, produit, quotient de fonctions, composée de fonctions.

Introduction de la notion de fonction bijective, fonction réciproque.

Illustration avec les fonctions usuelles connues : carré, cube, inverse, racine carrée, valeur absolue.

Lien avec l'équation  $f(x) = c$ .

## 2 - Limites

*La définition formelle d'une limite est hors programme. Toute étude théorique sur les limites est exclue. Les résultats seront énoncés sans démonstration et illustrés par des représentations graphiques.*

Limite d'une fonction en un point.



Limite à droite, limite à gauche.

Extension de la notion de limite finie en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

Notion de limite infinie en un point, en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

Opérations algébriques sur les limites.

Limite d'une fonction composée.

Limites des fonctions polynomiales et rationnelles en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Les limites sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou leur quotient.

Interprétation graphique des limites : droites asymptotes, asymptotes parallèles aux axes.



Toute recherche systématique des branches infinies est hors-programme.

## 3 - Continuité

Continuité d'une fonction en un point.


Continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues. Composition de deux fonctions continues.

Une fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f(x)$  admet pour limite  $f(a)$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

Le prolongement par continuité est hors programme.

## 4 - Dérivabilité

Dérivabilité d'une fonction en un point, nombre dérivé.

Interprétation graphique. 

Équation de la tangente en un point.

Approximation affine au voisinage d'un point. ▶

Fonction dérivée.

Notation  $f'$ .

Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.

Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.

Résultat admis.

Principe de Lagrange : Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $f' \geq 0$  sur  $I$ , ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Tableau de variation.

Sur des exemples, application à l'étude d'équations et d'inéquations, à l'obtention de majorations et de minorations.

Extremum local d'une fonction dérivable.

Une fonction  $f$ , dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ , admet un extremum local en un point de  $I$  si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

Dérivée seconde, notation  $f''$ .

La notion de fonction de classe  $C^p$  ou  $C^\infty$  est hors programme.

Représentation graphique de fonctions.

## 5 - Convexité

*Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Les fonctions étudiées sont au moins de classe  $C^2$ . Tous les résultats de ce paragraphe seront admis et illustrés par des représentations graphiques. L'inégalité de la convexité n'est pas un attendu. La notion de convexité sera abordée principalement pour préciser des représentations graphiques de fonctions.*

Définition d'une fonction convexe.

Une fonction est convexe (respectivement concave) si la courbe est au-dessous (respectivement au-dessus) des cordes. ▶

Position d'une courbe par rapport aux tangentes dans le cas où la fonction est convexe et dérivable.



Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Si la dérivée d'une fonction convexe  $f$  de classe  $C^2$  sur un intervalle ouvert s'annule en un point,  $f$  admet un minimum en ce point.

Caractérisation d'un point d'inflexion si  $f$  est deux fois dérivable.



Représentation graphique des fonctions convexes.

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.

Allure locale du graphe.

Exemples d'étude de points d'inflexion.

## IV - Probabilités sur un univers fini

L'objectif est de mettre en place dans le cas fini, un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique. On fera le lien avec l'emploi des arbres pondérés préconisé durant le cycle terminal du lycée.

### 1 - Espaces probabilisés finis

#### a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire.

Univers  $\Omega$  des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires.

Système complet d'événements finis.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.

On se limitera aux systèmes complets d'événements de type  $A_1, \dots, A_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) où les  $A_i$  sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à  $\Omega$ .

#### b) Probabilité

Une probabilité est une application  $P$  définie sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  vérifiant  $P(\Omega) = 1$  et pour tous  $A$  et  $B$  incompatibles de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux événements.

Cas de l'équiprobabilité.

#### c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.

Si  $P(A) \neq 0$ ,  $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ .

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Formule de Bayes.

Notation  $P_A$ .

Si  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$  alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Si  $A_1, \dots, A_n$  est un système complet, alors pour tout événement  $B$  on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

#### d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si  $P(A) \neq 0$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P_A(B) = P(B)$ .

Indépendance mutuelle de  $n$  événements.  
 Si  $n$  événements  $A_i$  sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements  $B_i$ , avec  $B_i = A_i$  ou  $\bar{A}_i$ .

## 2 - Variables aléatoires réelles

*On rappelle que l'univers  $\Omega$  considéré est fini. Toutes les définitions qui suivent concernent ce seul cas.*

Une variable aléatoire est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}$ .

Système complet associé à une variable aléatoire.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ .

Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Espérance d'une variable aléatoire finie.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Variable aléatoire  $Y = g(X)$  lorsque  $g$  est une fonction à valeurs réelles.

Théorème de transfert.

Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Formule de Kœnig-Huygens.

Variables centrées, centrées réduites.

On adoptera les notations habituelles telles que  $[X = x]$ ,  $[X \leq x]$ , etc.

$$F_X(x) = P([X \leq x]).$$

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.

$$E(X) = \sum_i x_i P([X = x_i]).$$

Linéarité de l'espérance.

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P([X = x_i]). \text{ Théorème admis}$$

Notations  $V(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Notation  $X^*$  pour la variable aléatoire centrée réduite associée à  $X$ .

# ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

## I - Systèmes linéaires et introduction au calcul matriciel

*Ce chapitre sera repris, en deuxième année, avec une étude plus spécifique des matrices carrées. Tout développement théorique est hors programme.*

### 1 - Systèmes linéaires

Résolution.

Méthode du pivot de Gauss.

On présentera la méthode du pivot de Gauss à l'aide d'exemples numériques et on se limitera à des systèmes de trois équations à trois inconnues.

On prendra les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes :

$L_i \leftrightarrow L_j$  ;  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$  avec  $i \neq j$  ;

$L_i \leftarrow \alpha L_i$  avec  $\alpha \neq 0$  ;  $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$  avec  $i \neq j$  et  $\alpha \neq 0$ .

### 2 - Calcul matriciel

*L'objectif est d'introduire les matrices qui seront utilisées en seconde année. On s'appuie sur des exemples numériques de matrices réelles. La notation des coefficients sous la forme  $m_{i,j}$  n'est pas un attendu du programme. Le programme exclut toute notion de structure.*

Définition d'une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ .

Matrices lignes, matrices colonnes.

Opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, somme, produit de deux matrices.

Les définitions des opérations sur les matrices seront présentées à l'aide d'exemples issus de situations concrètes. Les propriétés des opérations seront admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.

Écriture matricielle d'un système.

## II - Compléments d'analyse

*En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.*

*Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Les étudiants doivent pouvoir traiter les situations qui s'y ramènent.*

*Toute étude théorique sur les limites (suites ou fonctions) est exclue. On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits. Les résultats seront énoncés sans démonstration.*

### 1 - Suites réelles

*Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur le raisonnement par récurrence. On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en*

particulier pour illustrer la notion de convergence. ►

Suite monotone, minorée, majorée, bornée.

Limite d'une suite, définition des suites convergentes.

Généralisation aux limites infinies.

Unicité de la limite.

Opérations sur les limites.

Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Existence d'une limite par encadrement.

Théorème de la limite monotone.

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbf{R}$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient les  $u_n$  pour tous les indices  $n$  sauf pour un nombre fini d'entre eux.



On étendra sans démonstration tous les résultats connus sur les limites de fonctions de la variable réelle aux suites.

Le théorème de composition de limite d'une suite convergente par une fonction continue est hors-programme.

Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

Toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

## 2 - Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Caractère bijectif.

Corollaire (TVI et bijection).

Ces énoncés seront admis.

On utilisera ce résultat pour étudier des équations du type  $f(x) = k$ . ►

On admettra la continuité de la fonction réciproque.

Représentation graphique de la fonction réciproque.

Toute étude théorique sur les fonctions réciproques est exclue.

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  et  $f(a)f(b) < 0$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]a, b[$ . Extension au cas des autres intervalles, éventuellement en considérant les limites au bord.

Application à la dichotomie. ►

## 3 - Fonctions logarithme et exponentielle

*Les fonctions hyperboliques sont hors programme.*

Fonction logarithme népérien.

Dérivée, limites, représentation graphique.

Propriétés algébriques du logarithme.

La fonction logarithme est introduite comme primitive de la fonction inverse sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .

Fonction exponentielle.  
 Dérivée, limites, représentation graphique.  
 Propriétés algébriques de l'exponentielle.

Fonctions puissances (exposant réel).

Croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de l'infini et au voisinage de 0.

La fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme.  
 $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ .  
 Notation  $e^x$ .

Pour  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^\alpha \ln x)$ .  
 Pour  $n$  entier naturel non nul,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$ .

### III - Probabilités sur un univers fini

#### 1 - Coefficients binomiaux

On donne dans ce paragraphe l'interprétation combinatoire de ces coefficients mais on évitera toute technicité dans les exercices.

Factorielle, notation  $n!$ .

Parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

Coefficients binomiaux, notation  $\binom{n}{k}$ .

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Relation  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Interprétation de  $n!$  en tant que nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments.  $\blacktriangleright$

On pourra faire le lien entre les parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant  $k$  succès pour  $n$  répétitions.

Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle.

La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul pour le calcul numérique des coefficients.  $\blacktriangleright$

#### 2 - Lois usuelles finies

Chacune de ces lois sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise. Les étudiants doivent savoir reconnaître ces lois à partir de situations concrètes.

Loi certaine. Espérance et variance.

Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Espérance et variance.

Loi de Bernoulli. Espérance et variance.

Loi binomiale. Espérance et variance.

Application : formule du binôme de Newton.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .  $\blacktriangleright$

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

Notation  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .  $\blacktriangleright$

Lorsque  $a$  et  $b$  sont strictement positifs, lien avec la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  pour  $p = \frac{a}{a+b}$ . La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.

### IV - Intégration sur un segment

Pour le calcul d'intégrales à partir des primitives, on se limitera à des exemples simples. Les changements de variable sont hors programme.



## 1 - Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où  $f$  est affine positive, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet  $f$  pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle  $y$  admet au moins une primitive  $F$ .

Admis.

Sur un intervalle si  $F$  est une primitive de  $f$  alors toute autre primitive est de la forme  $F + c$  où  $c$  est une constante.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition :  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ . Cette définition est indépendante du choix de la primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ .

## 2 - Premières propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles.

Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue positive.

Sur des exemples, illustration à l'aide de la méthode des rectangles. ▶

## 3 - Application

Introduction de la notion de variable aléatoire à densité : exemple de la loi uniforme sur un segment.

Simulation. ▶

# ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET D'ALGORITHMIQUE

## I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

*L'objectif est de poursuivre la formation initiée au lycée concernant l'algorithmique et l'utilisation de l'outil informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.*

*L'utilisation de l'outil informatique se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.*

Le programme d'informatique s'articule autour de trois thèmes : études de suites ; statistiques descriptives univariées, bases de données relationnelles.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites en préambule lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

### 1 - Langage Python

*Le langage Python propose un grand nombre de bibliothèques logicielles, avec des utilités variées. Les bibliothèques jugées nécessaires sont listées, chacune avec une liste restreinte de fonctions essentielles que les étudiants devront avoir manipulées. Seules celles dans la colonne de gauche sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques.*

#### a) Types de base

Affectation : `nom = expression`

L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (`ndarray`) ou chaîne de caractères.

# permet d'insérer un commentaire

+	-	*	/	**
---	---	---	---	----

==	>	<	>=	<=	!=
----	---	---	----	----	----

True	False	and	or	not
------	-------	-----	----	-----

from ... import \*, import ... as

On insiste sur l'importance de l'ajout judicieux de commentaires.

Opérations arithmétiques de base.

Comparaison, test.

Logique.

Importation d'une bibliothèque.

## b) Structures de contrôle

*On réinvestit les notions de compteurs et d'accumulateurs vues au lycée. La maîtrise des structures de programmation de base (if, while, for) constitue l'un des objectifs majeurs de l'informatique en première année.*

Instruction d'affectation : =.

Instruction conditionnelle if, elif, else.

Boucle for ; Boucle while.

Définition d'une fonction :

```
def f(p1, ..., pn)
```

```
return.
```

## c) Utilisation de bibliothèques

*Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.*

from ... import \*, import ... as

Importation d'une bibliothèque.

— Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.e`, `np.pi`

`np.exp`, `np.log`, `np.sqrt`, `np.abs`,

`np.floor`

`np.array`.

`np.dot`

+	-	*	/	**
---	---	---	---	----

`np.sum`, `np.min`, `np.max`, `np.mean`,

`np.cumsum`, `np.median`, `np.var`, `np.std`

Constantes e et  $\pi$ .

Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. Création de tableaux ou matrices.

`np.zeros`, `np.ones`, `np.eye`, `np.arange`,  
`np.linspace`, `np.reshape`.

Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne du tableau.

Multiplication matricielle.

On pourra utiliser `a, b = np.shape(M)` pour obtenir la taille de la matrice M.

Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.

Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`

- Dans la librairie `numpy.random`  
Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`  
`rd.random.`
- Dans la librairie `pandas`  
Exemple d'importation : `import pandas as pd`  
`pd.mean, pd.std.` Indicateurs statistiques.
- Dans la librairie `matplotlib.pyplot`  
Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`  
`plt.plot, plt.show` Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes non exigibles `xlim, ylim, axis, grid, legend.`  
Représentations statistiques  
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot.`

## 2 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

**C1** : Savoir manipuler les structures algorithmiques de base (if, for, while), connaître la syntaxe d'une fonction simple et savoir l'utiliser.

**C2** : Savoir produire des graphiques et indicateurs afin d'interpréter des données statistiques.

**C3** : Savoir étudier des suites numériques, calculer des valeurs, tracer des graphiques et conjecturer des résultats sur le comportement de la suite.

**C4** : Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

**C5** : Savoir modéliser des phénomènes aléatoires et effectuer des simulations de variables aléatoires.

## II - Liste de thèmes

### 1 - Suites

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

Calcul des termes d'une suite.	Exploitation graphique des résultats. Exemples : taux d'intérêt, emprunt.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. Valeur approchée d'une constante.
Détermination du rang d'arrêt.	

### 2 - Statistiques descriptives univariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2**)

*Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.*

Série statistique associée à un échantillon.  
Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.  
Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.  
Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.  
Analyse d'un caractère quantitatif : caractéristiques de position (moyenne, médiane); mode(s); caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).

On pourra également utiliser les commandes :  
`pd.read_csv`, `head`, `shape`, `pd.describe`

`pd.median`, `pd.count`, `pd.sort_values`

On notera bien que les paramètres empiriques sont calculés à partir de l'échantillon observé. On montrera les avantages et les inconvénients des caractéristiques liées à la structure euclidienne (moyenne et écart-type) et ceux qui sont liés à la structure d'ordre (quantiles).

### 3 - Bases de données

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : C4)

*L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.*

*L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On pourra pour introduire la problématique donner l'exemple de la base de données utilisée par un progiciel de gestion intégré (PGI), outil informatique permettant de piloter une entreprise, présenté dans le cours de management. Cette base de données stocke les informations communes à de nombreux services (comptabilité, gestion du personnel, gestion des stocks, fichier clients...). On introduira les concepts d'interrogation et de mise à jour d'une base de données à l'aide d'exemples simples issus de ce contexte.*

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire "PRIMARY KEY", clef étrangère "FOREIGN KEY", schéma relationnel.

Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.  
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.

On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier "INTEGER", chaîne "TEXT".

Opérateurs arithmétiques +, -, \*.

Opérateurs de comparaison :

=, <>, <, <=, >, >=.

Opérateurs logiques : "AND", "OR", "NOT".

### a) Commandes exigibles

"WHERE"

"SELECT nom\_de\_champ FROM nom\_de\_table". Sélection de données dans une table.

"INSERT INTO nom\_de\_table ".

Insertion de données dans une table. On pourra utiliser "VALUES (élément1, élément2,...)".

"DELETE FROM nom\_de\_table ".

Suppression de données d'une table.

"UPDATE nom\_de\_table ".

Mise à jour de données d'une table.

### b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité et si besoin la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union "UNION", intersection "INTERSECTION", différence "EXCEPT".

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min "MIN", max "MAX", somme "SUM", moyenne "AVG", comptage "COUNT".

Les commandes "DISTINCT", "ORDER BY"

## 4 - Probabilités

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1 C2 et C5** )

Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.

Loi uniforme, loi binomiale.  
`rd.randint` .

Simulation de phénomènes aléatoires.