MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **économique et commerciale**

Option : **Technologique (ECT)**

Discipline : **Mathématiques-Informatique**

Seconde année

Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires économiques et commerciales n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.
Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse,...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC voie technologique se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés d'économie et de gestion dispensés en Grande Ecole ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire, le programme se concentre sur le calcul matriciel. Le principal objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres et la diagonalisation des matrices carrées de taille inférieure à 3. On évitera des exemples trop calculatoires.
  Ces notions de calcul matriciel trouveront des applications en probabilités (études de chaînes de Markov).

- En analyse, les séries et les intégrales généralisées sont étudiées en vue de leurs applications aux probabilités (variables aléatoires discrètes infinies et variables aléatoires à densité).

- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'objectif de cette partie du programme est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance que les étudiants ont rencontrés dès le lycée.

- Les travaux pratiques de mathématiques avec Scilab sont organisés autour de quatre thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. L'objectif est d'apprendre aux étudiants à utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome ainsi que de leur permettre d'illustrer ou de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le logiciel Scilab comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - **Matrices**

Le programme exclut toute notion de structure. On ne traite que le cas des matrices réelles.

Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices lignes, matrices colonnes. Opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, somme, produit de deux matrices.	Les définitions des opérations sur les matrices seront présentées à l'aide d'exemples issus de situations concrètes. Les propriétés des opérations seront admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.
Transposée d'une matrice.	Notation ${}^tA$.
Matrices carrées d'ordre n. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, matrices diagonales, matrice identité. Matrices inversibles.	
Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire.	Résultat admis.
Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Formule de l'inverse dans ce cas.
Exemples de calcul des puissances n-ièmes d'une matrice. Cas d'une matrice diagonale.	
Formule du binôme pour les matrices qui commutent.	On se limitera à des exemples simples lorsque l'une des matrices est nilpotente.
Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.	
Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss. Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.	On se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

II - **Séries numériques**

Les séries sont introduites exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Définition. Convergence d'une série. Somme d'une série convergente.

Condition nécessaire de convergence.	Le terme général d'une série convergente tend vers 0.
Série géométrique. Convergence et somme.	La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $\lvert x \rvert < 1$, et dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Les dérivées des séries géométriques ne font pas partie des attendus du programme.
Série exponentielle. Convergence et somme.	Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Résultat admis.
Définition de la convergence absolue.	
Toute série absolument convergente est convergente.	Résultat admis. Dans les exercices, on se limitera à des séries absolument convergentes.

III - **Probabilités et statistiques**

Tout excès de technicité est exclu.

1 - Couples de variables aléatoires discrètes finies

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires. Lois marginales, lois conditionnelles.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$.
Indépendance de deux variables aléatoires.	X et Y sont indépendantes si, pour tous intervalles réels I et J, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants. On remarquera que si l'une des variables aléatoires X, Y est constante, X et Y sont indépendantes.
Espérance d'une somme de deux variables aléatoires, linéarité de l'espérance.	Résultat admis.
Espérance d'un produit de deux variables aléatoires.	$E(XY) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X = x] \cap [Y = y])$. Résultat admis.
Cas de deux variables aléatoires X et Y indépendantes.	$E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis. La réciproque est fausse.
Covariance. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$. $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.
Formule de Huygens.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, la réciproque étant fausse.

Variance d'une somme de deux variables aléatoires.	
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$. Si $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$, $\rho(X, Y) = \dfrac{\text{Cov}(\text{X}, \text{Y})}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.

2 - Suites de variables aléatoires discrètes finies

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires.	Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tout choix de n intervalles réels $I_1, \ldots, I_n$, les événements $[X_1 \in I_1], \ldots, [X_n \in I_n]$ sont mutuellement indépendants.
Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires.	Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
Espérance de la somme de n variables aléatoires.	
Variance d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.	

3 - Variables aléatoires discrètes infinies

Notion d'espace probabilisé avec Ω non fini.	
Extension des définitions et des propriétés des variables aléatoires discrètes au cas où l'image est un ensemble infini dénombrable : loi de probabilité, fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.	On se limitera aux variables aléatoires dont l'image est indexée par $\mathbf{N}$. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée au moment de l'extension des propriétés.
Loi géométrique. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Loi Poisson. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

4 - Statistiques bivariées

On s'appuiera sur les représentations graphiques pour montrer l'intérêt et les limites des indicateurs.

Analyse de deux caractères qualitatifs : fréquences marginales, fréquences conditionnelles.	
Analyse de deux caractères quantitatifs : covariance empirique, corrélation linéaire empirique, ajustement affine par la méthode des moindres carrés, droites de régression ; changements de variables permettant de se ramener à un ajustement affine.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Réduction des matrices carrées

L'objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice. La notion de polynôme minimal, la résolution générale des systèmes $AX = \lambda X$ et toute théorie sur la réduction sont hors programme.

Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est à proscrire. Dans la pratique, on se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

Polynôme d'une matrice. Polynôme annulateur.	Sur des exemples, utilisation d'un polynôme annulateur pour la détermination de l'inverse d'une matrice carrée. Toutes les indications devront être données aux candidats pour l'obtention d'un polynôme annulateur. On pourra vérifier que le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Matrices carrées diagonalisables.	Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice carrée P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$.
Valeur propre, vecteur propre d'une matrice carrée.	
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de Q.	Résultat admis.
Recherche de valeurs propres.	On privilégiera l'utilisation d'un polynôme annulateur.
Sur des exemples, diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à 3.	On se limitera au cas d'une matrice A pour laquelle on dispose d'un polynôme annulateur de degré 3 (respectivement 2) scindé sur $\mathbf{R}$ à racines simples, ces dernières étant valeurs propres. On remarquera alors que A est diagonalisable à partir de l'égalité $AP = PD$ où la matrice P est obtenue à partir des vecteurs propres. Cas des matrices triangulaires.
Application au calcul des puissances de A.	

II - Compléments d'analyse

Les intégrales généralisées sont introduites exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a, b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

Extension de la notion d'intégrale aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$.

Intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Convergence et définition.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie, et dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $]-\infty, b]$.

Extension aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ (ou $]-\infty, a]$).

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$; l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.
De même, si f est continue et positive sur $]-\infty, a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty, a]$.

Extension de la notion d'intégrale généralisée aux fonctions continues par morceaux ayant un nombre fini de discontinuités sur **R**.

III - Probabilités et statistiques

1 - Variables aléatoires à densité continue par morceaux

Ce paragraphe généralise l'étude de la loi uniforme effectuée en première année.

Le passage du cas discret au cas continu n'est pas explicité. On se limitera à des calculs de probabilités du type $P([X \in I])$, où I est un intervalle de **R**.

Densité de probabilité.

Une fonction f définie sur **R** est une densité de probabilité si elle est positive, continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Variable aléatoire à densité.

Une variable aléatoire X admet une densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une densité de probabilité.
Sur des exemples, détermination d'une densité de $aX + b$ ou de X^2.

Espérance, variance et écart-type.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.
Loi uniforme. Rappels.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.
Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2, où $\sigma > 0$. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.
Loi normale centrée réduite. Densité.	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

2 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$
	Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \|X\|^r, r \in \mathbf{N}^*$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\mid X - E(X) \mid \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.	Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P([\|\overline{X}_n - m\| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

3 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire dont la valeur caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de **R**.

Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle. Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre θ, à partir d'un échantillon de données $x_1, \dots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène.

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les $X_1, \dots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de θ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans **R**, *éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de θ.*

Un estimateur se définit donc dans l'intention de fournir une estimation.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement θ par $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ où $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un estimateur et $(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est décider d'accorder à θ la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de θ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de θ. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ observé.
Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire.	Exemples d'estimateurs : estimateur du paramètre p d'une loi de Bernoulli, estimateur du paramètre λ d'une loi de Poisson.
Biais d'un estimateur.	Si pour tout θ de Θ, T_n admet une espérance, on appelle biais de T_n le réel $b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - \theta.$
Estimateur sans biais.	L'estimateur T_n de θ est sans biais si $E_\theta(T_n) = \theta$ pour tout θ de Θ.
Risque quadratique d'un estimateur.	Si, pour tout θ de Θ, T_n^2 admet une espérance, on appelle risque quadratique de T_n le réel $r_\theta(T_n) = E_\theta\left((T_n - \theta)^2\right)$.

Décomposition biais-variance du risque quadratique d'un estimateur.	$r_\theta(T_n) = b_\theta(T_n)^2 + V_\theta(T_n)$.

b) Estimation par intervalle de confiance

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle de θ à partir d'un estimateur mais à trouver un intervalle aléatoire, appelé intervalle de confiance, qui contienne θ avec une probabilité minimale donnée.
Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices, aucune connaissance autre que ce vocabulaire n'est exigible sur les intervalles de confiance.

Intervalle de confiance.	Soient U_n et V_n deux estimateurs. On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$ où $\alpha \in [0,1]$ si, pour tout $\theta \in \Theta$, $P_\theta([U_n \leqslant \theta \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha$. Les réalisations de U_n et V_n doivent être calculables à partir du seul échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ observé.
Intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de Bernoulli.	On obtiendra ces intervalles de confiance par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES AVEC SCILAB

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Scilab. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants d'utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives univariées, statistiques descriptives bivariées, chaînes de Markov, simulation de lois.

Les heures de travaux pratiques de mathématiques avec Scilab peuvent être organisées sous différentes formes selon les contenus à enseigner ; certaines séances, notamment celles nécessitant peu de manipulations logicielles de la part des étudiants, pourront avoir lieu en classe entière, les autres séances en groupes réduits.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites en préambule lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Toute la richesse du logiciel Scilab ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes du programme de première année et celles figurant dans la sous-partie «Commandes exigibles» sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du logiciel, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Scilab peuvent donc être introduites, avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique restant la mise en pratique des connaissances mathématiques. Ces commandes supplémentaires devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires devront être données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Scilab, et à l'usage d'opérations de «copier-coller» qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

I - Liste des exigibles

1 - Savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Représenter et interpréter les différentes convergences.

C4 : Utiliser à bon escient la méthode de Monte-Carlo.

C5 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

2 - Nouvelles commandes

Toutes les commandes du programme de première année sont exigibles. Les seules nouvelles commandes exigibles des candidats sont indiquées dans ce paragraphe.

La connaissance des commandes suivantes ainsi que de leurs arguments est exigible des candidats :

`sum`, `cumsum`, `mean`, `max`, `min`, `zeros`, `ones`, `eye`, `spec`.

Les commandes suivantes devront avoir été manipulées par les étudiants mais la connaissance détaillée de leurs arguments n'est pas exigible des candidats :

`plot2d`, `fplot2d`.

II - Liste des thèmes

1 - Statistiques descriptives univariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C5**)

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon.
Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.
Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.
Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.

On pourra également utiliser les commandes : `dsearch`, `tabul`, `pie`, `stdeviation`, `median`.

2 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C5**)

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.
Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.
Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.

On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.
On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer.
On pourra utiliser les commandes : `stdeviation`, `corr`.

3 - Chaînes de Markov

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C2** et **C3**)

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes étudiées en première année ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Comportement limite.	On pourra étudier l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus. Simulation et mise en évidence d'états stables avec la commande `grand(n,'markov', M, x0)`

4 - Simulation de lois, application au calcul d'espérances

(Durée indicative : 10 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, **C3**, **C4** et **C5**)

Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique.

Simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$; sur $[a, b]$.	Utilisation du générateur `grand.`
Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation du générateur `grand`.
Simulation informatique de la loi de $X = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$.	On s'intéressera en particulier au cas $n = 12$. On remarquera que la variable aléatoire centrée réduite associée à X est une approximation de la loi normale centrée réduite et on sensibilisera les étudiants au théorème limite central, en testant cette simulation avec d'autres lois.
Moyenne empirique et variance empirique.	
Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation grâce à la commande `grand`. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Méthode de Monte-Carlo : principe et applications.	Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est parfois difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation. On pense typiquement à des probabilités d'événements, des espérances de variables aléatoires, ou des calculs d'intégrales. On pourra également recourir à cette méthode pour vérifier numériquement la justesse d'un calcul explicite d'une quantité comme une espérance ou une variance. La loi des grands nombres garantit la qualité de l'approximation.