ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

504658

NICOLAS

ADRIEN

25/03/2001

Note de délibération : 18.4 / 20

Numéro d'inscription 504658

Né(e) le 25/03/2001

Nom NICOLAS

Prénom (s) ADRIEN

Signature Nicolas

18.4 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/05

Numéro de table 008

Exercice 1 :

Partie A.

1a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

b) P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

$PQ = 3I$

$\boxed{P \times \left(\frac{1}{3}Q\right) = I}$

2a) $\forall n \in \mathbb{N}$

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.4 / 20

$$M X_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}$$

Donc $X_{n+1} = M X_n$

2b On pose " $P_n$ : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$ "

Initialisation

Si $n = 0$ alors $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M^0 \times X_0 = I \times X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce qui prouve $P_0$.

Hérédité $\forall n \in \mathbb{N}$ on suppose $P_n$ vraie

démontrons $P_{n+1}$ :

$X_n = M^n X_0$

$\Leftrightarrow M X_n = M M^n X_0$

$\Leftrightarrow X_{n+1} = M^{n+1} X_0$

Ce qui prouve $P_{n+1}$.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

3a

$(4M - I)(4M - 4I)$

$$= \left(4 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(4 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

b Les valeurs propres possibles de la matrice $M$ sont $\frac{1}{4}$ et $1$.

Polynomes annulateur de la matrice $(4x-1)(4x-4)$

$4x - 1 = 0 \quad x = \frac{1}{4} \qquad 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

4a $M = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}MP = D$

d'après la question 1. b, $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4b $\forall n \in \mathbb{N}$

$M^n = PD^nP^{-1}$

4c

$$M^n = P D^n P^{-1}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-2\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

4d $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n, b_n, c_n$.

$$X_n = M^n \times X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription: 504658

Né(e) le: 25 / 03 / 2001

Signature: Nicolas

Nom: NICOLAS

Prénom (s): ADRIEN

18.4 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 02 / 05

Numéro de table 008

d'après la question 2b.

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \qquad b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

4c $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

5
```
n = 0
a = 1 ; b = 0
While a > b
n = n+1
a = 1/3 * (1+ 2/4 ^ n)
b = 1/3 * ( 1- 1/4 ^ n)
end
```

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.4 / 20

disp ( b )

Partie B.

6. $P(A_0) = 1 \quad P(B_0) = 0 \quad P(C_0) = 0$

$P(A_1) = \cancel{P_{A_0}(A_1) + P_{B_0}(A_1) + P_{C_0}(A_1) = \frac{1}{2}}$

Au début du jeu, le pion est sur la case 0
Chaque coup est equiprobable et tire un chiffre k de l'ensemble {0, 1, 2, 3} et avance son pion de k case

$P(A_1) = \frac{1}{2} \quad P(B_1) = \frac{1}{4} \quad P(C_1) = \frac{1}{4}$

7. $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ car le joueur peut tomber sur la case 0, sachant qu'il est déja sur la case 0 avec 2 possibilités sur les 4 proposés. Soit il n'avance pas $k=0$ soit il avance de 3 cases pour retomber sur la case 0 $K=3$.

$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$

b) $P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) + P_{B_n}(A_{n+1}) + P_{C_n}(A_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n}$

$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) + P_{B_n}(B_{n+1}) + P_{C_n}(B_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n}$

$P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) + P_{B_n}(C_{n+1}) + P_{C_n}(C_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n}$

7c $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(A_{n+1}) = a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$

$P(B_{n+1}) = b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n$

$P(C_{n+1}) = c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n$

Donc les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ sont donnés par les valeurs $a_n$, $b_n$, $c_n$, obtenues dans la partie A.

8 Lorsque le joueur déplace le pion ~~vers l'infini~~, la
↳ une infinité de fois
probabilité de tomber sur les cases 0, 1, 2 sont toute égale et égale à $\frac{1}{3}$.

Escercice 2 :

On pose, $\forall x \in ]-1, +\infty[$ $f(x) = x\ln(1+x)$

On admet que f est derivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et que sa dérivée est derivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$

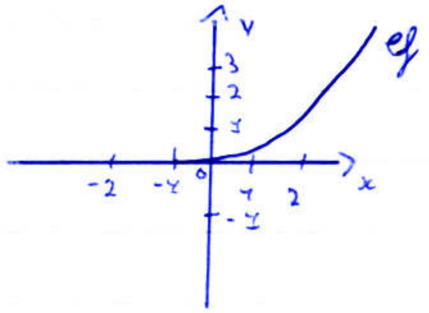
1a)

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x \ln(1+x) = \boxed{0}$

La courbe Cf est positivee

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$

c) f est croissante strictement, positive. Ses coordonnés sont $(-1, 0)$ jusqu'a $(+\infty, +\infty)$




Cf tend en $(+\infty, +\infty)$

2a) $f'(x) = \cancel{1 \times \ln(x)}$ $1 \times \ln(1+x) + x \times \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

$\forall x \in ]-1 ; +\infty[$

b) $f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x+1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}$

Numéro d'inscription 504658

Né(e) le 25/03/2001

Nom NICOLAS

Prénom (s) ADRIEN

Signature Nicolas

18.4 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/05

Numéro de table 008

2c) $(1+x)^2 > 0$ $\quad x+2>0$ $\quad \forall x \in ]-1 ; +\infty[$

par quotient de nombre positif $f''$ est positif et $f'$ est croissant. sur $]-1 ; +\infty[$

3a) $f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = 0$

$\forall x > -1$ $f'(x)$ est positif.

3b)

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

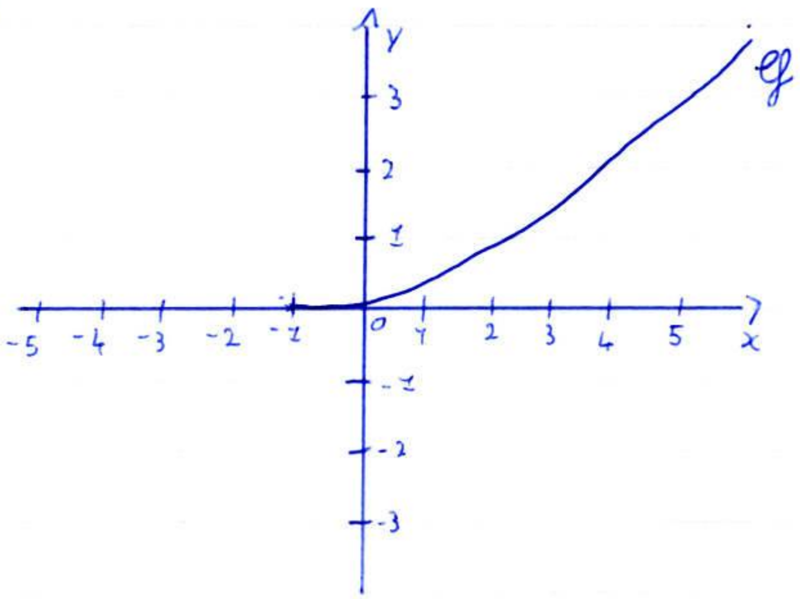
Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.4 / 20

(4)




(5) On pose $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

(a) $\int_0^1 x \ln(1+x)\,dx.$ $\quad U = \frac{x^2}{2} \quad V = \ln(1+x)$

$U' = x \quad V' = \frac{1}{1+x}$

$U, U', V, V'$ dérivables sur $]-1 ; +\infty[$

$= \left[ \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x+1}\,dx$

$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

(b) $\forall x \in [0, 1]$

$\frac{x^2}{x+1} =$ (Pages suivantes)

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} \iff \frac{x(x+1) - x - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 + x - x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

ⓒ $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx$

$$= -1 + \int_0^1 x + \frac{1}{x+1}\,dx = -1 + \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x+1)\right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} + \ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln(2)$$

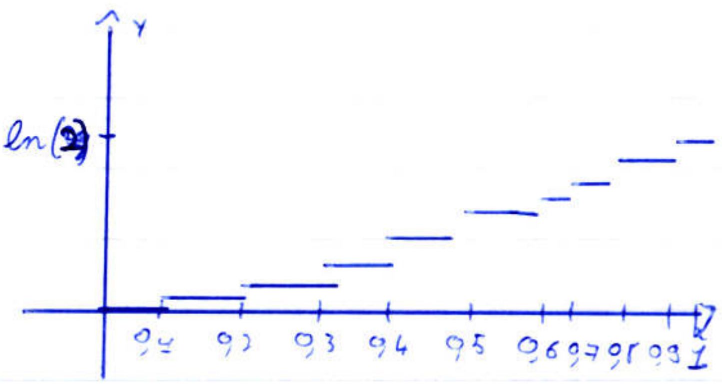
ⓓ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$I = \boxed{\frac{1}{4}}$$

⑥
```
function y = f(x)
   y = x^n * log(1+x)
end function
for n = 1:50
x = linspace(0, 1, 100)
f plot2d (x, y)
end
```

7a



On conjecture que la limite est $\ln(2)$

8) $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\forall x \in [0;1]$ $1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow$

$0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2) \Leftrightarrow$

$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$

8b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$

$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \ln 2 \, dx$

Calcul de $\int_0^1 x^n \ln 2 \, dx$

$= \ln(2) \int_0^1 x^n \, dx = \ln(2) \times \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \ln(2) \times \frac{1}{n+1} = \frac{\ln(2)}{n+1}$

$0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

8c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$

Par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Numéro d'inscription 504658

Né(e) le 25/03/2001

Signature Nicolas

Nom NICOLAS

Prénom (s) ADRIEN

18.4 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 05

Numéro de table 008

Exercice 3.

(1) $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2a^2} \text{ si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 \text{ si } x > 2a \end{cases}$

$f(0) = \dfrac{0}{2a^2} = 0 \qquad f(2a) = \dfrac{2a}{2a^2} = \dfrac{1}{2a}$

$f$ est continue en $0$ mais n'est pas continue en $2a$

(2) On vient de prouver que $f$ est continue sauf en $2a$

Si $x < 0 \quad f(x) = 0$
Si $x > 2a \quad f(x) = 0$
Si $0 \leq x \leq 2a \quad f(x) \geq 0$
$f$ est positive sur $\mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2a} f(x)\,dx + \int_{2a}^{+\infty} f(x)\,dx$ par relation de Chasles.

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME - Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.4 / 20

$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$ $\quad \int_{2a}^{+\infty} f(x)dx = 0$

$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} x\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2a} \times \frac{1}{2a^2} = \frac{4a^2}{2} \times \frac{1}{2a^2} = 1$

f est une densité de probabilité

(3a) $F_X(x)$ si $x < 0 = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$

$F_X(x)$ si $x > 2a$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ d'après la question précédente
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$F_X(x)$ si $0 \leq x \leq 2a$ $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx$.
$= 0 + \int_{0}^{t} \frac{x}{2a^2}\,dx$

$= \frac{1}{2a}\int_{0}^{t} x\,dx = \frac{1}{2a} \times \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{4a^2}$

donc la fonction de répartitition F de la variable X est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} \text{ si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 \text{ si } x > 2a \end{cases}$$

(6) $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{P((X \leq a) \cap (1-(X \leq \frac{a}{2})))}{1-P(X \leq \frac{a}{2})}$

$P((X \leq a) \cap (1-(X \leq \frac{a}{2})) = P(X \leq a)$

(4) $X$ admet une esperance si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument.
La convergence absolue revient ici à la convergence simple.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx + \int_{0}^{2a} x f(x) dx + \int_{2a}^{+\infty} f(x) dx$$

$$0 + \int_{0}^{2a} \frac{x^2}{2a^2} dx + 0 = \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \times \frac{(2a)^3}{3} = \frac{4a}{3} \quad \boxed{E(X) = \frac{4a}{3}}$$

(5)
$X$ admet une Variance si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge absolument
La convergence absolu revient à la convergence simple.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x) dx + \int_{0}^{2a} x^2 f(x) dx + \int_{2a}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

$$0 + \int_{0}^{2a} x^2 f(x) dx + 0 = \int_{0}^{2a} x^2 f(x) dx.$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_{0}^{2a} x^3 dx = \frac{1}{2a^2} \times \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^{2a} = \cancel{\frac{1}{2a^2} \times \frac{(2a)^4}{4} = \frac{(2a)^2}{4} = \frac{4a^2}{4} = a^2}$$

$$\cancel{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{9a^2 - 16a^2}{9} = -\frac{7a^2}{9}}$$

( Erreur de Calcul, Voir à la dernière Page)

⑥ $Y = X^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{Y} = X$

ⓐ

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{\frac{x^2}{4a^2}} \text{ si } 0 \leq x \leq 4a^2 \\ 1 \text{ si } x > 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{4a^2} \text{ si } 0 \leq x \leq 4a^2 \\ 1 \text{ si } x > 2a \end{cases}$$

ⓑ Y suit une loi Uniforme $Y(\Omega) = [0 ; 1]$

car pour tout $x$ de $[0 ; 4a^2]$

$0 \leq G(x) \leq 1$

ⓒ La commande rand() * 4* a ^2 simule la valeur de $x$

ⓓ x= rand() * 4 * a ^2

disp ( sqrt(x) )

⑦ $T_n = \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

ⓐ $E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ par linéarité de l'espérance

$E(T_n) = \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

d'après la question 4, $E(X) = \frac{4a}{3}$

Donc $\frac{3}{4n} \times n \times \frac{4a}{3} = a$

Numéro d'inscription 504658

Né(e) le 25/03/2001

Nom NICOLAS

Prénom (s) ADRIEN

Signature

18.4 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/05

Numéro de table 008

$b_\phi = E(T_n) - a = a - a = 0$

Tn est un estimateur sans biais de a.

(b) ~~$r\phi = (V(T_n) - b_\phi = V(X)$~~

$r\phi = V(T_n) - b\phi$ $\quad b\phi = 0$ donc risque égal à la Variance.

$V(T_n) = V\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ par linéarité

$\left(\frac{3}{4n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ $\quad$ ~~$V(X_k) = \frac{7a^2}{9}$~~ d'après la question 5.

$V(X) = \frac{2a^2}{9}$

$r\phi = \frac{9}{16n} \times n \times \frac{2a^2}{9} = \frac{a^2}{8}$ Le risque quadratique de Tn

est de $\frac{a^2}{8}$

(c) T_n = sum(X) / n

disp(T_n)

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.4 / 20

5 $= \frac{1}{2a^2} \times \frac{(2a)^4}{4} = \frac{1}{2a^2} \times \frac{16a^4}{4} = 2a^2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{18a^2 - 16a^2}{9} = \frac{2a^2}{9}$