Copie anonyme - n°anonymat : 394178

G6-00023
394178
Maths S

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 27 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Exercice 1 :

1) • On remarque que la fonction g est positive. (Et qu'elle est bien définie)
En effet, $\forall x \in]a ; +\infty[$, $g(x) = 0$
De plus, $\forall x \in]-\infty ; a]$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{F(a)}$

Mais $f(x) > 0$ d'après l'énoncé, et $F(a) \geqslant 0$ ~~(il faudrait vérifier que $F(a) > 0$, mais comme on ne sait rien de $X(\Omega)$, on ne peut pas affirmer directement que $F(a) > 0$)~~

Or, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, donc en particulier $f(a) > 0$.
Mais comme f est continue, alors : On a en particulier : (Pour $\varepsilon = f(a)$)
$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a-\eta ; a+\eta]$, $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2} f(a)$.

Donc $\forall x \in [a-\eta ; a+\eta]$, $0 < \frac{1}{2} f(a) \leqslant f(x)$

Or, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est bien définie, et que $f > 0$, alors :

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt \geqslant \int_{a-\eta}^{a} f(t)\,dt \geqslant \int_{a-\eta}^{a} \frac{1}{2} f(a)\,dt = \frac{\eta}{2} f(a).$$

On a donc, puisque $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$, montré la majoration suivante :

$$0 < \frac{\eta}{2} f(a) \leqslant F(a).$$

Donc $F(a) > 0$, la fonction g est donc bien définie.

En revenant au calcul de la positivité :

$\forall x \in]-\infty ; a]$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{F(a)} \geqslant 0$, car $f(x) > 0$ et $F(a) > 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$

• La fonction g coïncide sur $]-\infty ; a]$ avec la fonction continue $\varphi_a : t \longmapsto \dfrac{f(t)}{F(a)}$, qui est continue car f est continue

Sur $]a ; +\infty[$, la fonction g coïncide avec la fonction nulle, qui est donc continue.

Donc g est bien de classe $\mathcal{C}^0$ sauf éventuellement en 0.

• ~~Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$: Posons $I(A, B) = \int_A^B g(t)dt$, qui est bien défini car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge~~

• Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors en particulier $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ converge.

D'où par linéarité de l'intégrale impropre convergente :

$$\frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(t)}{F(a)}\,dt = \int_{-\infty}^{a} g(t)\,dt \quad \text{converge}$$

Or, maintenant comme g est continue sur $[a ; +\infty[$, et que $\forall t \in [a ; +\infty[$, $g(t) = 0$, alors :

$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 0.

Donc par application de la relation de Chasles sur des intégrales impropres convergentes :

$$\int_{-\infty}^{a} g(t)\,dt + \underbrace{\int_{a}^{+\infty} g(t)\,dt}_{= 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt \quad \text{converge}$$

Et on a finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} g(t)\,dt = \frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \frac{F(a)}{F(a)} = \underline{1}.$$

Conclusion : On a montré que g était bien définie, et on aussi :

- g est positive
- $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et vaut 1
- g est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0

g est donc bien une densité de probabilité

2a) Comme g est nulle sur $[a;+\infty[$ alors Y est presque sûrement à valeurs dans $]-\infty;a]$.

Soit alors $x \in]-\infty;a]$:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{F(a)} = \frac{F(x)}{F(a)}$$

Conclusion :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

(car presque sûrement $Y(\Omega) \subset]a;+\infty[$)

b) Comme on a $F(a) > 0$, alors $[X \leqslant a] \neq \emptyset$, donc la probabilité conditionnelle $P_{[X \leqslant a]}$ est bien définie.

De plus, on a :

- Pour $x \in]-\infty;a]$, $P_{[X \leqslant a]}(X \leqslant x) = \dfrac{P([X \leqslant a] \cap [X \leqslant x])}{P(X \leqslant a)}$

Or, $x \leqslant a$, d'où $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant a]$, donc :
$[X \leqslant x] \cap [X \leqslant a] = [X \leqslant x]$

D'où $P_{[X \leq a]}(X \leq x) = \dfrac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \dfrac{F(x)}{F(a)} = G(x)$.

◦ Si $x > a$, alors par un même raisonnement, on a :

$$P_{[X \leq a]}(X \leq x) = \frac{P(X \leq a)}{P(X \leq a)} = 1 = G(x), \text{ car } x > a.$$

Ainsi, on a bien montré : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{[X \leq a]}(X \leq x) = G(x)$.

3a) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leq x], \text{ car } M_n = \max_{i \in [\![1;n]\!]} Y_i$$

Donc $P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[Y_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$, par indépendance des Y_i

$= G(x)^n$, car $\forall i \in [\![1;n]\!],\ Y_i \sim Y$.

Ainsi, $G_n = G^n$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = G(x)^n = \begin{cases} \left(\dfrac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

Inutile pour l'instant

b) Comme ($x < a$, et que) $f > 0$, alors la fonction F est une fonction strictement croissante. Comme elle est de plus continue, alors d'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ (fait en 2)

Soit maintenant $x < a$, on a donc du fait de la stricte croissance de F :

$x < a \Rightarrow F(x) < F(a)$

Donc en divisant par $F(a) > 0$, on a :

$$\frac{F(x)}{F(a)} = G(x) < 1.$$

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 27 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc : $\forall x < a, \quad 0 < G(x) < 1.$

Ainsi $|G(x)| < 1.$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} G(x)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$

En notant φ la fonction créneau telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$, on remarque alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(x).$$

Or φ est la fonction de répartition de $Z \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$ (loi certaine de paramètre a).

Conclusion : M_n converge en loi vers la variable certaine égale à a.

C) a) La variable Z_n est une transformée affine de M_n : en effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ Z_n = na - nM_n = (-n)M_n + na.$

Donc Z_n est encore à densité, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [Z_n \leq x] = [n(a - M_n) \leq x] = \left[a - M_n \leq \frac{x}{n}\right]$$

$$= \left[M_n \geq a - \frac{x}{n}\right]$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$P(Z_n \leqslant x) = 1 - P(M_n \overset{(*)}{\leqslant} a - \frac{x}{n})$ (l'ouverture dans (*) n'importe pas car M_n est à densité).

→ Par stricte croissance de F

• Si $x < 0$, alors $a - \frac{x}{n} > a$, d'où $F(a - \frac{x}{n}) > 1$, mais F est bornée par 1, donc $F(a - \frac{x}{n}) = 1$.

D'où $P(Z_n \leqslant x) = 1 - 1 = 0$.

• Si $x \geqslant 0$, alors :

$$P(Z_n \leqslant x) = 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right) = 1 - \left[\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right]^n$$

, d'après l'expression trouvée en 3)

Conclusion :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

b) ~~Comme~~ F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0, on a ~~[illegible]~~ d'après la formule de Taylor Young. En fixant x et n :

$$F\left(a - \frac{x}{n}\right) = \sum_{k=0}^{1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}\left(\frac{-x}{n}\right)^k + o\left(\frac{-x}{n}\right)$$

Or, $F'(a) = f(a)$, d'où

$$F\left(a - \frac{x}{n}\right) = F(a) - f(a) \times \left(\frac{x}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où $\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} =$

Comme $a - \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a d'après la formule de Taylor Young que : Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0

$$F\left(a-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}\left(\frac{-x}{n}\right)^k + o\left(\frac{-x}{n}\right)$$

D'où, comme $F'(a) = f(a)$, on a bien :

$$F\left(a-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} F(a) - \frac{x}{n}\times f(a) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui donne bien :

$$\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) D'après ~~[illegible]~~ le calcul précédent, on a par définition :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \geq n_0, \forall x \geq 0, \frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$$

Puisque le membre de gauche est strictement positif, on peut écrire que : $\forall n \geq n_0, \forall x \geq 0$

$$n\ln\left(\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right) = n\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n\right)$$

(Je montre l'existence après, au dos de la feuille)

$$= n\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}\right) + n\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n - \frac{f(a)}{F(a)}\times x}\right)$$

D'où
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln\left(F\left(a-\frac{x}{n}\right)\right)}{n\ln\left(1-\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{n\ln\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n-\frac{f(a)}{F(a)}\times x}\right)}{n\ln\left(1-\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}\right)}$$

Mais comme $\frac{\varepsilon_n}{n - \frac{f(a)}{F(a)}\times x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors on a :

$$n \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n - \frac{f(a)}{F(a)} \times x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varepsilon_n}{1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$$

Or comme $n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-f(a)}{F(a)}$

On en déduit finalement que

$$\frac{n \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n - \frac{f(a)}{F(a)} \times x}\right)}{n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\varepsilon_n \times f(a)}{F(a)}.$$

D'où, comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a donc montré :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \ln\left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)}{n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\varepsilon_n \times f(a)}{F(a)} + 1 = 1$$

On prend $x > 0$

Donc $n \ln\left(F(a-\frac{x}{n}) / F(a)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-x \times f(a)}{F(a)}$

- Convergence en loi de Z_n :

$\forall x > 0$: $H_n(x) = 1 - \left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)\right)$

Or, $\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right) = \frac{-x \times f(a)}{F(a)}$ d'après le calcule précédent.

D'où $H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-\frac{f(a)}{F(a)} \times x}$.

- De plus, $\forall x \leq 0$, $H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $H_n(x) = 0$)

Finalement : $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Psi$, avec Ψ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{f(a)}{F(a)} \times x\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 27	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On reconnaît alors que Ψ est la répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $-\frac{f(a)}{F(a)}$

Conclusion générale :

Z_n converge en loi vers une V.AR suivant une loi exponentielle de paramètre $-\frac{f(a)}{F(a)}$.

Soit donc $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(-\frac{f(a)}{F(a)}\right)$

Exercice 2 :

1) Pour $k=0$, on a :

$f \in F \iff \forall x \in \mathbb{R}, \|f(x)\| \leqslant 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \|f(x)\| = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

Donc $f \in F \iff f \in \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$

Donc $F = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

2) On a :

$$A^2 = \left(\frac{1}{27}\right)^2 \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{(27)^2} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où :

$$A^2 = \frac{1}{9 \times 81} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 3\times 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3\times 81} \end{pmatrix}$$

~~Or nous avons aussi que $[Sp(A)]^2 \subset Sp(A^2)$~~

Or on a l'inclusion :

$$\{ \lambda^2 \mid \lambda \in Sp(A) \} \subset Sp(A^2) = \{ \frac{1}{9} ; \frac{20}{243} \}$$

Soit alors $\lambda \in Sp(A)$, on a donc :

$$\begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{9} \\ \text{ou} \\ \lambda^2 = \frac{20}{243} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{2\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \end{cases}$$

Donc $Sp(A) \subset \{ \frac{1}{3} ; \frac{2\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \}$

b) A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une BON formée de vecteurs propres.

• Supposons par l'absurde que seules une des deux vp. soient une vp. de A. Disons que $Sp(A) = \{\lambda\}$

On aurait alors $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$, $A = P \times diag(\lambda, \lambda, \lambda)\, {}^tP$

Donc $A = P \times \lambda I_3 \times {}^tP = \lambda (P\, {}^tP) = \lambda I_3$, car $P \in O_3(\mathbb{R})$.

Or, A n'est pas une homotétie, donc ceci est impossible.

Conclusion : $Sp(A) = \{ \frac{1}{3} ; \frac{2\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \}$

c) Comme A est une endomorphisme symétrique, alors ses sous-espaces propres sont orthogonaux, et supplémentaires par définition de la diagonalisation. Donc $E = E_\lambda(A) \overset{\perp}{\oplus} E_\mu(A)$

d) $\forall x \in E, \exists! (y, z) \in E_\lambda(A) \times E_\mu(A)$ tq :

$x = y + z$

D'où $f(x) = \lambda y + \mu z$

Donc d'après le théorème de Pythagore :

$\| f(x) \|^2 = \lambda^2 \|y\|^2 + \mu^2 \|z\|^2$

On le voit bien dans l'expression car $1 < 3$ et $20 < 2\sqrt{3}$

Or, on voit que $(\lambda, \mu) \in [0 ; 1[$, d'où on a en posant $k = \max(\lambda, \mu)$; avec donc $k \in [0, 1[$

$\| f(x) \|^2 \leqslant (\max(\lambda, \mu))^2 (\|y\|^2 + \|z\|^2)$

On utilise encore le Th. de Pythagore dans la racine

Donc par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$\| f(x) \| \leqslant \max(\lambda, \mu) \sqrt{\|y\|^2 + \|z\|^2} = \max(\lambda, \mu) \underbrace{\sqrt{\|x\|^2}}_{\|x\|}$ (*)

Conclusion : Pour $k = \max(\lambda, \mu)$, on a bien :

- $k \in [0 ; 1[$
- $\forall x \in E, \quad \| f(x) \| \leqslant k \|x\|$

Donc f est bien une contraction.

3) On a $\forall x \in E, \| Id(x) \| = \| x \|$

Donc si $Id \in F$, alors on aurait, pour $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$

$\exists k \in [0, 1[, \quad \| Id(x_0) \| = \| x_0 \| \leqslant k \| x_0 \|$

Donc on aurait par l'absurde $1 \leqslant k \rightarrow$ Impossible.

Conclusion : $Id \notin F$.

b) Pour $f = \frac{3}{4} Id$ et $g = \frac{1}{4} Id$, on a bien :

- $f \in F$, car $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{3}{4}\|x\|$
- $g \in F$, car $\forall x \in E$, $\|g(x)\| = \frac{1}{4}\|x\|$

Mais $g + f = Id$ et $Id \notin F$.

Conclusion : F n'est pas un sev. de $\mathcal{L}(E)$.

c) Soit $(f, g) \in F^2$ et notant λ et μ les valeurs des coefficient de contraction qui leur est associé :

$\forall x \in E$, $\|f \circ g(x)\| \leqslant \lambda \|g(x)\| \leqslant \lambda\mu \|x\|$

Or, $\begin{cases} 0 \leqslant \lambda < 1 \\ 0 \leqslant \mu < 1 \end{cases}$, d'où $0 \leqslant \lambda\mu < 1$.

Donc $(f \circ g) \in F$.

Conclusion : $\forall (f, g) \in F$, $f \circ g \in F$.

d) ~~Supposons~~ Soit $f \in F$.
- Supposons par l'absurde que $f^{-1} \in F$.

Alors d'après la question précédente, on aurait : $f \circ f^{-1} = Id \in F$.

Or, $Id \notin F$. Ceci est donc impossible.

Conclusion : $f^{-1} \notin F$

4a) Soit f un projecteur de F. Supposons que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, et notons alors λ sa valeur de contraction.
Comme F est stable par composition on a aussi $f^2 \in F$.
On aurait alors :
Or, $\forall x \in E$, $\|f \circ f(x)\| \leqslant \lambda \|f(x)\|$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques S EDHEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Mais $f \circ f = f$, donc en particulier pour $x_0 \in E$ tq $f(x_0) \neq 0_E$, un tel x_0 existe car on a supposé par l'absurde que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, on aurait alors :

$$\|f \circ f(x_0)\| = \|f(x_0)\| \leqslant \lambda \|f(x_0)\|$$

Donc en divisant par $\|f(x_0)\| > 0$, on aurait :

$1 \leqslant \lambda \rightarrow$ ~~Absurde~~ Impossible.

Conclusion. F ne contient que des projecteurs nuls.

b) Pour les mêmes raisons, comme $s \circ s = Id$, F ne contient (qu'en 3d) pas de symétries (Car si $s \in F$, alors $s \circ s = Id \in F$ d'après 3c), ce qui est impossible car $Id \notin F$ d'après 3a)).

~~4) a) Notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = Sp(f)$~~

5) a) Comme f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres.
Notons $\{\lambda_1 \cdots \lambda_p\} = Sp(f)$.

On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$, et c'est même une somme directe orthogonale (d'après le théorème spectral).

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où $\forall x \in E$:

$\exists ! (x_1 \cdots x_p) \in \mathbb{R}^p$ tq : $x = \sum_{i=1}^{p} x_i \cdot u_i$, où $\mathcal{B}(u_1 \cdots u_n)$ est ~~un~~ une base orthonormée adaptée à la décomposition de f.

D'où $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i \cdot u_i$

Donc d'après le théorème de Pythagore, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée :

$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \cdot x_i^2 \cdot \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \times x_i^2$, car les u_i sont normés.

Notons alors $k = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in Sp(f) \}$, on a donc :

$\forall i \in [\![1 ; p]\!]$, $|\lambda_i| \leqslant k \Rightarrow \lambda_i^2 \leqslant k^2$, d'où :

~~$\|f(x)\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|x\|$~~

$\|f(x)\|^2 \leqslant k^2 \times \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = k^2 \|x\|^2$

Donc par croissance de $t \longmapsto \sqrt{t}$, on a bien :

~~...~~ $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant k \|x\|$.

b) $\Longrightarrow$ / Si $f \in F$, alors $\forall x \in E$, $f(x) \leqslant k \|x\|$

Comme f est diagonalisable (car symétrique) il admet bien au moins une vp. Soit λ l'une d'entre elles, et $x_0 \in E_\lambda(f) \setminus \{0_E\}$:

$\|f(x_0)\| \leqslant k \|x_0\|$

Or, $f(x_0) = \lambda x_0$, d'où : $|\lambda| \|x_0\| \leqslant k \|x_0\|$

14/

Donc en divisant par $\|x_0\| \neq 0$, on a :

$0 \leq |\lambda| \leq k < 1$.

Donc $|\lambda| \in]-1;1[$.

Donc $\{ |\lambda| \mid \lambda \in Sp(f) \} \subset]-1;1[$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, si $\{ |\lambda| \mid \lambda \in Sp(f) \} \subset]-1;1[$, alors en particulier :

$\max |Sp(f)|^{*} < 1$ (*) Je sous-entend qu'on prend le max de V.A. des vp

Or d'après 5a), $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \max |Sp(f)| \|x\|$.

Donc $f \in F$.

Conclusion générale : Si $f \in S_n(\mathbb{R})$, alors on a l'équivalence :

$f \in F \iff \{ |\lambda| \mid \lambda \in Sp(f) \}$.

6c) $k = \max(\text{eighenvalue}(A))$

Exercice 3 :

1a) • Les (X_i) sont à valeurs dans $\{0;1\}$, donc $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$

• Mais réciproquement, soit $N_0 \in \mathbb{N}^*$
On prend $\omega \in \Omega$ tel que $N(\omega) = N_0$, ce qui est possible car $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et tel que $\forall i \in [\![1; n_0]\!]$ $X_i(\omega) = 1$.

On a alors $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N_0} 1 = N_0$.

• Et si $N_0 = 0$, alors on prend $\omega \in \Omega$ tq $N(\omega) = 1$ et $X_1(\omega) = 0$.

Conclusion : $\forall N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \in S(\Omega)$.
Donc $\mathbb{N} \subset S(\Omega)$.

Par double inclusion : $S(\Omega) = \mathbb{N}$.

b) • On a montré que $S \geq 0$.
• De plus, $\forall \omega \in \Omega$, $X_i(\omega) \leq 1$.
D'où $\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) = S(\omega) \leq N(\omega)$.

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $S(\omega) \leq N(\omega)$.

Conclusion : $0 \leq S \leq N$, donc comme N admet une espérance, alors S admet une espérance par majoration.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Or, les (X_i) sont iid et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.
Donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $E(S_n) = np$.

3) $\forall k \in \mathbb{N}$, Calculons $P(S=k)$:

• La famille $\{[N=n]\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme un SCE, d'où :

$$[S=k] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [N=n] \cap [S=k]$$

Or, si $N=n$, alors $S = S_n$
D'où $[N=n] \cap [S=k] = [N=n] \cap [S_n=k]$

Donc $[S=k] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [N=n] \cap [S_n=k]$

Mais $S_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, donc pour $n < k$, on a : $[N=n] \cap [S_n=k] = \emptyset$

D'où $[S=k] = \bigcup_{n=k}^{+\infty} [N=n] \cap [S_n=k]$.

• Donc $P(S=k) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [N=n] \cap [S_n=k]\right)$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P([N=n] \cap [S_n=k])$$, car l'union est disjointe

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où $P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) \times P(S_n=k)$, car d'après le lemme des coalitions, si N est indépendante des (X_i) alors N est aussi indépendante de $\sum_i X_i$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) \times P(S_n=k)$.

C) a) Comme $(N-1)(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$:

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ [N=k] = [N-1=k-1]$.

D'où $P(N=k) = e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

b) D'où d'après 3) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) \times P(S_n=k)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n\lambda^{n-1}}{(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit en écrivant $\lambda^{n-1} = \lambda^{k-1} \times \lambda^{n-k}$ et $(1-p)^{n-k} = q^{n-k}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S=k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k-1} \times p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Écrivons alors $n = (n-k) + k$, ce qui donne :

$$P(S=k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k-1} \times p^k}{k!} \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k-1)!} + k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k-1} \times p^k}{k!} \times \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k+1}}{(n-k)!} + k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k-1} \times p^k}{k!} \times \left(\lambda q \times e^{+\lambda q} + k e^{+\lambda q} \right), \text{ série exponentielle.}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k-1} \times p^k}{k!} \times (\lambda q + k) \times e^{+\lambda(1-p)}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a bien : $P(S=k) = \frac{\lambda^{k-1} \times p^k}{k!} \times (\lambda q + k) \times e^{-\lambda p}$

~~P(S=k) =~~

c) $S(\Omega) = \mathbb{N}$, d'où

$$P(S=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1} \times p^k}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

• Travaillons l'expression de la somme à part :

$$e^{-\lambda p}\frac{\lambda^{k-1}\times p^k}{k!}\times \lambda q + \frac{\lambda^{k-1}\times p^k}{(k-1)!}\times e^{-\lambda p} = A(\lambda, p, k)$$

$$\cancel{A(\lambda, p, k) = (e^{-\lambda p} \times \lambda q \times p^k}$$

Donc : $P(S=0) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda p}\times \lambda q \times \lambda^{k-1}\times p^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda p}\times \lambda^{k-1}\times p^k}{(k-1)!}\right)$

$$\cancel{= 1 - (e^{-\lambda p} \times \lambda q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k \times p^{k+1}}{(k+1)!}}$$

$$P(S=0) = 1 - e^{-\lambda p}\times \lambda q \times \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^k}{k!} - e^{-\lambda p}\times p \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$$= 1 - e^{-\lambda p}\times q \times (e^{\lambda p} - 1) - p$$

$$P(S=0) = 1 - q(1 - e^{-\lambda p}) - p$$

d) $E(S \mid [N=n]) = E(S_n) = np.$

D'où $E(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\times E(S\mid[N=n])$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\times np$$

$$= e^{-\lambda} p \left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right), \text{ avec } n = n-1+1$$

$$= e^{-\lambda} p \times \lambda e^{\lambda} + e^{-\lambda} p e^{\lambda}$$

$$E(S) = p(\lambda + 1)$$

- Comme $N - 1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(N-1) = \lambda$
  D'où $E(N) = \lambda + 1$, par linéarité.
- Or, $E(X) = p.$

Donc on a bien $E(X)E(N) = p(\lambda+1) = E(S).$

15/

~~5) function Y = S(lambda, p)~~
~~N = grand(1, 1, "poi", lambda) + 1~~
~~y = sum([grand(1, N~~

5) function Y = S(lambda , p)

```
N = grand ( 1,1, 'poi', lambda ) + 1
A = [ floor ( rand (1, N)) .+ 1 ]
 b = sum ( A)
disp b.
endfunction.
```

Problème.

Question préliminaire:

Si $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$, alors:

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0; \eta[, \quad f(x) = x \times h(x)$, avec $h(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

D'où $\forall x \in]0; \eta[, \quad \ln(f(x)) = \ln(x) + \ln(h(x))$ (*)

(*) Comme h tend vers 1 en 0^+, on prendre un autre voisinage $]0; \eta_2[$ sur lequel h est positive strictement et considéré x sur $]0; \min(\eta, \eta_2)[$ C'est d'ailleurs ce qu'on va faire... Posons $\varepsilon = \min(\eta, \eta_2)$

$\forall x \in]0; \varepsilon[, \quad \ln(f(x)) = \ln(x) + \ln(h(x))$

D'où comme $x > 0$, $\ln(x)$ est bien défini.
Soit ε_1 tel que $\varepsilon_1 < 1$ de la sorte, $\forall x \in]0; \varepsilon_1[, \ \ln(x) \neq 0$

D'où $\forall x \in]0; \min(\varepsilon, \varepsilon_1)[, \quad \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln(h(x))}{\ln(x)}$

Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$ d'où $\ln(h(x)) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Exercice 1 :~~

~~1) • Montrons que g est positive :~~
~~g est nulle sur $]a ; +\infty[$~~
~~Sur $]-\infty ; a]$:~~

On a donc montré que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \frac{\ln(h(x))}{\ln(x)} = 1$

Conclusion : $\ln(f(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.

Partie I :

2a) Sh est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh(x)$

La fonction sh est impaire.

b) Étudions Sh sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui suffit) : Sh est bien dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $Sh'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq 0$

La fonction sh est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

• $Sh(0) = \frac{1-1}{2} = 0$ (aussi car sh est impaire ...)

Et comme $e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $e^{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Alors $Sh(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Ainsi :

x	0	$+\infty$
Variation de Sh	0 $\nearrow$	$+\infty$

Et donc par symétrie autour de l'origine du fait de l'imparité :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sh	$-\infty$ $\nearrow$		$+\infty$

Inutile

2c) $e^{x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \left(\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$

Inutile

$e^{-x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + \left(\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$

D'où $e^{x} - e^{-x} \underset{x \to 0^+}{=} 2x + o(x)$.

D'où $\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \underset{x \to 0^+}{=} x + o(x)$.

Ainsi $sh(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$.

3a) On a aussi : $\forall x \in \mathbb{R},\ Ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$.

2/

Conclusion : La fonction ch est paire.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+$: ch est dérivable, et on a :

$$ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \geq 0$$ (le courbes de e^{x} et e^{-x} se croisent en 0 et après on a toujours $e^{x} > e^{-x}$)

D'où, en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on a bien :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$: Posons $f(x) = ch(x)^2 - sh(x)^2$:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1.$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$.

Partie 2 :

5a) On a montré en 3b) que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \geq 1 > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{sh(x)}{ch(x)} = th(x)$ est bien définie.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)}$, car sh est impaire et ch est paire

21/

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(-x) = -th(x)$.

La fonction th est impaire.

c) ~~$\forall x \in \mathbb{R}$,~~ th est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, au dénominateur non nul :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{Sh(x)^2} = \frac{1}{Sh(x)^2}, \text{ d'après 4).}$$

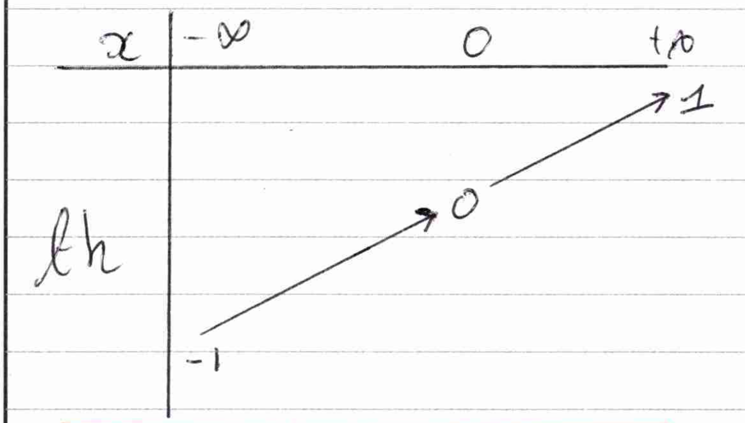
D'où th est croissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

- $Ch(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sinh(x)$

D'où $\lim_{x \to +\infty} th(x) = 1$

- de même, on aurait $\lim_{x \to -\infty} th(x) = -1$, par imparité.

Ainsi, ~~comme~~ on a les variations :



6 a) ~~$\frac{1}{Sh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \ldots$~~

En prenant $a = b = 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{Sh(x)}$$

Conclusion : $a = b = 1$ conviennent ~~(et ce sont même les seules,~~ car ~~sinon on aurait eu problème de divergence en $-\infty$, donc $a=b=1$~~)

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~b) On a donc $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{sh(t)}\,dt$ est une primitive de $\frac{1}{sh}$~~

~~$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\frac{1}{sh(x)}\right)^2 = e^{-2x}$~~

~~On $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_1^x \frac{1}{sh(t)}\,dt = \int_1^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt =$~~

~~$$= \left[\ln(1-e^{-t})\right]_1^x - \left[\ln(1+e^{-t})\right]_1^x$$~~

~~$$= \ln(1-e^{-x}) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \ln(1+e^{-x}) + \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$$~~

~~$$= \ln(1-e^{-2x}) + \ln\left(\frac{e+1}{e}\right) - \ln\left(\frac{e-1}{e}\right)$$~~

~~Conclusion, une primitive de $\frac{1}{sh}$ est $\varphi : x \longmapsto \ln(1-e^{-2x}) + \ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right)$~~

b) On a donc $x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{sh(t)}\,dt$ est une primitive de $\frac{1}{sh}$

On, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_1^x \frac{1}{sh(t)}\,dt = \int_1^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt - \int_1^x \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$

$$= \left[\ln(|1-e^{-t}|)\right]_1^x - \left[\ln(|1+e^{-t}|)\right]_1^x$$

$$= \ln(|1-e^{-x}|) - \ln(|1+e^{-x}|) + C$$

$$= \ln\left(\left|\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right|\right) + C$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or, $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{x}} = th\left(\frac{x}{2}\right)$.

D'où $\int_1^x \frac{1}{Sh(t)}\,dt = \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$

Conclusion : Une primitive de $\frac{1}{sh}$ est donc sur $\mathbb{R}_+^*$

$\varphi : x \longmapsto \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$

7) On a montré que :

$sh(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$

Or, $ch(x) \underset{x \to 0^+}{=} \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'où $\frac{Sh\left(\frac{x}{2}\right)}{Ch\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{+0^+}{=} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$

⋮

Il faudrait montrer que $th\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} x$, ce qui permettrait alors avec le résultat préliminaire d'avoir $\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$.

Partie 3 :

8a) Comme sh est croissante, $\frac{1}{sh}$ est décroissante.

D'où $\forall t \in [k ; k+1]$, $\frac{1}{sh(k+1)} \leqslant \frac{1}{Sh(t)} \leqslant \frac{1}{Sh(k)}$

Donc par croissance de l'intégrale.

26/

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}\,dt$$

Soit donc $\dfrac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}\,dt \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751