questions préliminaires :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ :

$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} C_i - C_{i-1}$ , d'après l'énoncé

$= C_n - C_0$ , par téléscopage

$= C_n$ , car $C_0 = 0$ par convention.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

b) Comme les vignettes ont toutes la même fréquence d'apparition, alors elles ont toutes la même probabilité d'être obtenue, soit $1/n$

• Soit $i \in [\![1; n]\!]$ :

La variable $X_i$ compte le temps d'attente, sachant que $i-1$ vignettes ont déjà été trouvées, pour que l'on obtienne une nouvelle vignette. Or, si $i-1$ vignettes ont déjà été trouvées, il en reste alors $n-i+1$ qui n'ont pas été trouvées. Il y a donc à chaque tirage la probabilité $p_i = \frac{n-i+1}{n}$ de trouver une nouvelle vignette.

On a donc bien $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1; n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie I :

2a) Soit $k \geqslant 2$ :

On a l'encadrement $0 < k-1 \leqslant k \leqslant k+1$
Donc en multipliant par $k \geqslant 0$, on a :

$$0 < k(k-1) \leqslant k^2 \leqslant k(k+1)$$

Or, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on a :
$$\frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$$

Or :
$$\begin{cases} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} \\ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \end{cases}$$

Ce qui donne bien :
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Conclusion : $\forall k \geqslant 2 : 0 \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (*)$

b) Soit $n \geqslant 2$ :
La relation $(*)$ est en particulier vraie $\forall k \in [\![ 2 ; n ]\!]$, on peut faire la somme des $n-1$ encadrements (à bornes positives), ce qui donne donc :
$$\sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

On par télescopage, on a :

- $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$

On a donc l'encadrement :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant S_n - 1 \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

Ce qui donne bien : $\underline{\frac{3}{2} - \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}}$

c) • Soit $n \geqslant 2$ :
On a la majoration $2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.

Donc $\forall n \geqslant 2,\ S_n \leqslant 2$, d'après 2b).

On, $\forall n \geqslant 2$ $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$. La suite $(S_n)$ est donc croissante.

Conclusion : La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

• De plus : $\forall n \geqslant 2$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} \geqslant 1$

On a donc $\forall n \geqslant 2$, $1 \leqslant S_n \leqslant 2$
Donc puisque $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$, on a par théorème de prolongement des inégalités :
$1 \leqslant S \leqslant 2$.

Conclusion : $S \in [1 ; 2]$ :

e) ~~• D'une part : $\forall n \geqslant 2$ :~~

~~$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$~~

~~On, $\forall k \geqslant n+1$, $\frac{1}{k^2} \geqslant 0$, donc comme la série $\sum_{k \geqslant n+2} \frac{1}{k^2}$ converge~~

~~On peut écrire que~~ $\cancel{\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \geq 0}$.

~~Ce qui donne donc bien~~ $\cancel{\frac{1}{(n+1)^2} \leq S - S_n}$.

~~• D'autre part :~~

~~• D'après 2b), on a l'encadrement :~~ $\cancel{\forall n \geq 2}$

$$\cancel{\frac{1}{n} - 2 \leq -S_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}}$$

~~D'où, comme~~ $\cancel{1 \leq S \leq 2}$, ~~on a :~~

$$\cancel{\frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq}$$

$s = 0$

e) $n = 2$

```
While (1/n) > 10^(-7)
  n +1
While end
for k:1:n
  S = S + (1/(k^2))
disp(S)
```

3) a) Soit $n \geq 1$ :

Soit $t \in [n; n+1]$

Comme $[n; n+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, alors, puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi, $\forall t \in [n; n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$

Or, les fonctions $\begin{cases} t \mapsto \frac{1}{n+1} \\ t \mapsto \frac{1}{t} \\ t \mapsto \frac{1}{n} \end{cases}$ sont toutes les trois continues sur $[n; n+1]$.

On a donc par croissance de l'intégrale (avec $n \leq n+1$)

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dt$$

Ce qui donne donc :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$

b) Soit $n \geqslant 1$, la relation précédente est en particulier vraie $\forall k \in [\![1;n]\!]$ :

- D'une part : $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, en sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$

Donc par téléscopage :

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'où $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant u_n$

Or, $1+\frac{1}{n} \geqslant 1$, donc par stricte croissance $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a bien :
$\ln(1) = 0 \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Donc $u_n \geqslant 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

· D'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k)$$

Donc $\sum_{k'=2}^{n} \frac{1}{k'} \leqslant \ln(n)$, par télescopage et en posant $k' = k+1$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \leqslant 1$, en intégrant le terme $k=1$.

Ce qui donne bien $u_n \leqslant 1$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

Or, on a montré en 2a) que :
$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$.

D'où $\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $0$, elle est donc convergente. Notons $\gamma$ sa limite.

De plus, comme $\forall n \geqslant 1 \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a par théorème de prolongement des inégalités : $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Conclusion : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, avec $\gamma \in [0;1]$.

4) Les $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ admettent toutes une espérance.

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $E(X_i)$ existe.

Donc $\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ existe.

Et donc par linéarité de l'espérance :

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(C_n)$ existe.

• Calculons $E(C_n)$ :

$E(C_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$, par linéarité de l'espérance.

Or, $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$, d'où :

$E(X_i) = \frac{n}{n-i+1}$

• Ainsi $E(C_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1}$

Soit finalement en posant $i' = n-i+1$

$E(C_n) = n \sum_{i'=2}^{n} \frac{1}{i'} = n H_n$.

Conclusion : $E(C_n) = n H_n$.

5) $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $V(X_i)$ existe, car $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$.

D'où, comme les $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ admettent toutes une variance, on a :

$\cancel{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$, ~~car toutes les covariances sont nulles du fait de l'indépendance mutuelle~~.

~~Or,~~ $\cancel{\forall i \in [\![1;n]\!], V(X_i) = \left[1 - \frac{n-i+1}{n}\right] \times \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^{-2}}$

$\cancel{V(X_i) = \left(\frac{i-1}{n}\right) \times \frac{n^2}{(n-i+1)^2} = n \times \left(\frac{i-1}{(n-i+1)^2}\right)}$

$\forall i \in [\![1;n]\!]$:

$$V(X_i) = \left[1 - \frac{n-i+1}{n}\right] \times \left[\frac{n}{n-i+1}\right]^2$$

$$= \frac{i-1}{n} \times \frac{n^2}{(n-i+1)^2}$$

$$= n\left(\frac{i-1}{(n-(i-1))^2}\right)$$

Or, les $(X_i)$ sont mutuellement indépendantes d'après l'énoncé d'où :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i),$$ car toutes les covariances $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ sont nulles pour $i \neq j$.

Ainsi, $C_n$ admet bien une variance, et on a :

$$V(C_n) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{(n-i+1)^2}$$

Or, $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $i-1 = (i-1-n)+n$

D'où puisque $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $(n-i+1)^2 = (i-1-n)^2$, on a :

$$V(C_n) = n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1+n)+n}{(n-i+1)^2}\right)$$

$$= n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{n-i+1} + n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i+1)^2}\right)$$

Soit donc en posant $i' = n-i+1$, on obtient :

$$V(C_n) = n^2 \sum_{i'=1}^{n} \frac{1}{i'^2} - n\sum_{i'=1}^{n} \frac{1}{i'}$$

$$= n^2 S_n - n H_n$$

$$= n(n S_n - H_n)$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 394178

| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : | Session : 2022 |
|---|---|---|

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS/ HEC

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6a) On sait que $C_n$ admet une Variance. Donc puisque $E(C_n) = nH_n$, on a d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev :

$$\forall a>0, \quad P(|C_n - nH_n| \geq an) \leq \frac{V(C_n)}{(an)^2}$$

Or $V(C_n) = n^2 S_n - nH_n \leq n^2 S_n \leq n^2 S$, car $(S_n)$ est majorée par sa limite puisque c'est une suite croissante.

D'où $\forall a>0, \; P(|C_n - nH_n| \geq an) \leq \dfrac{n^2 \times S}{a^2 \times n^2} = \dfrac{S}{a^2}$

Soit $c>1$

c) Regardons l'évènement $[\,|\frac{C_n}{n} - \ln(n)| \geq c\,] = A_n$ :

$A_n = [\,|C_n - n\ln(n)| \geq nc\,]$, car $n \geq 0$

$= [\,|C_n - nH_n + nU_n| \geq nc\,]$

Or, $\forall \omega \in \Omega$, $|C_n(\omega) - nH_n + nU_n| \leq |C_n(\omega) - nH_n| + nU_n$ (*)

Justification de (*) : l'inégalité triangulaire, et car $nU_n \geq 0$

D'où $|C_n - nH_n + nU_n| \leq |C_n - nH_n| + nU_n$

Et donc $n \times c \leq |C_n - nH_n + nU_n| \implies n \times c \leq |C_n - nH_n| + nU_n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a donc l'inclusion d'évènement suivante :

$[\,|C_n - nH_n + nU_n| \geq nc\,] \subset [\,|C_n - nH_n| + nU_n \geq nc\,]$

Donc par croissance de la probabilité :

$P(|C_n - nH_n + nU_n| \geq nc) = P(A_n) \leq P(|C_n - nH_n) \geq n(c - U_n))$ (I)

Or d'après 6a) :

$P(|C_n - nH_n| \geq n(c - U_n)) \leq \dfrac{S}{(c - U_n)^2}$

Et comme $0 \leq U_n \leq 1$, alors : $0 \leq \dfrac{1}{c - U_n} \leq \dfrac{1}{c-1}$, car $c > 1$

On a donc : $P(|C_n - nH_n| \geq (c - U_n) \times n) \leq \dfrac{S}{(c-1)^2}$

Et donc en reprenant l'inégalité de (I), on a finalement bien :

$\forall c > 1, \quad P(A_n) = P\left(\left|\dfrac{C_n}{n} - \ln(n)\right| \geq c\right) \leq \dfrac{S}{(c-1)^2}$

c) Le résultat précédent donne : Avec $n = 10^6$

$\forall c > 1, \quad P\left(\dfrac{C_n}{n} \notin [\ln(n) - c\,;\, \ln(n) + c]\right) \leq \dfrac{S}{(c-1)^2}$

Donc $1 - \dfrac{S}{(c-1)^2} \leq P\left(\dfrac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c\,;\, \ln(n) + c]\right)$

Prenons alors $c = 6{,}006$, de la sorte, $\ln(n) - c \simeq 7.81$

$\ln(n) + c \simeq 19.822 \leq 19{,}92$

(*)

D'où $P((C_n/n) \in [7.81, 19.92]) \geq P(\frac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c ; \ln(n) + c])$

Or, $P(\frac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c ; \ln(n) + c]) \geq 1 - \frac{2}{5^2}$, car $S \leq 2$

D'où, comme $\frac{1}{25} = 0,04$, on a : $1 - \frac{2}{25} = 1 - 0,08 = 0,92$

Ce qui donne bien :

$0,92 \leq P(\frac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c ; \ln(n) + c]) \leq P(\frac{C_n}{n} \in [7,81 ; 19,92])$

→ le 19,92

(*) : On a cette encadrement car la borne de droite est plus grande que $\ln(n) + c$, donc la proba est bien plus grande.

Conclusion : Pour $n = 10^6$ :

$P(\frac{C_n}{n} \in [7,81, 19,92]) \geq 0,92$.

Partie II :

7) Calculons la fonction de répartition de $M_n$, $n \in \mathbb{N}$ :

Soit $x \in \mathbb{R}$ : $P(M_n \leq x) = P(\bigcap_{i=1}^{n} [T_i \leq x])$

$= \prod_{i=1}^{n} P(T_i \leq x)$, par indépendance

$= P(T \leq x)^n$, car les $(T_i)$ sont iid, on prend $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

D'où $P(M_n \leq x) = P(T \leq x)^n = \begin{cases} (1 - e^{-x})^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En notant $F_{M_n}$ la répartition de $M_n$, on remarque que $F_{M_n}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.
Donc $M_n$ est bien une V.A.R à densité, et une densité de $M_n$ s'écrit :

$$f_{M_n} : x \longmapsto \begin{cases} F_{M_n}'(x) = n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}, & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Conclusion : $M_n$ est à densité et $f_n$ est une densité de $M_n$.

8 a) Soit $x>0$ et $t \in [0;x]$ :

$$f_n(t) \times g(x-t) = \left[n e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\right] \times \left[(n+1) \times e^{-(n+1)(x-t)}\right] = A_n(t)$$

Donc on a :

$$A_n(t) = n(1-e^{-t})^{n-1} \times e^{(n+1)t} \times e^{-t} \times (n+1)e^{-(n+1)x}$$

$$= n \times \left[(1-e^{-t}) \times e^{t}\right]^{n-1} \times e^{2t} \times e^{-t} \times (n+1)e^{-(n+1)x}$$

$$= n(e^{t}-1)^{n-1} \times e^{t} \times (n+1)e^{-(n+1)x}.$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \sum_{i=1}^{n} Z_i$ suit la loi de densité $f_n$.

• Initialisation : Pour $n=1$.

On a $M_1 = \max_{i \in [\![1;1]\!]} T_i = T_1$

Or, $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et donc $T_1 \sim Z_1 = \sum_{i=1}^{1} Z_i$

Donc comme $M_1 = T_1$, alors $M_1 \sim Z_1 = \sum_{i=1}^{1} Z_i$

Donc $Z_1$ suit bien la loi de densité $f_1$.

La proposition est vraie pour $n=1$.

• Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ :

On remarque que $\sum_{i=1}^{n+1} Z_i = \sum_{i=1}^{n} Z_i + Z_{n+1}$

# Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

• Or, les variables $(Z_i)_{i \in [\![1;n+1]\!]}$ sont mutuellement indépendantes donc d'après le lemme des coalitions :

$\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)$ et $Z_{n+1}$ sont indépendantes.

• De plus, $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(n+1)$, donc une densité de $Z_{n+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ces deux ~~deux~~ conditions étant réunies, on peut donc calculer une densité de $\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) + Z_{n+1}$ grâce à un produit de convolution.

Une densité $\tilde{f}_{n+1}$ de $\sum_{i=1}^{n} Z_i + Z_{n+1}$ serait donc :

$$\tilde{f}_{n+1} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sum_{i=1}^{n} Z_i}(t) \times f_{Z_{n+1}}(x-t)\,dt. = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1}(x,t)\,dt.$$

• Soit alors $x \in \mathbb{R}$ :

On a par hypothèse de récurrence que $f_{\sum_{i=1}^{n} Z_i} = f_n$, donc l'expression de pour $t \in \mathbb{R}$ $f_{\sum_{i=1}^{n} Z_i}(t) \times f_{Z_{n+1}}(x-t)$ est celle que l'on a trouvé à la question 8 a). Regardons alors où cette ~~e~~xpression n'est pas nulle.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall t \in \mathbb{R}$ : $\underset{\hookrightarrow \text{ à } x \text{ fixé}}{\varphi_{n+1}(x,t)} \neq 0 \iff \begin{cases} f_n(t) \neq 0 \\ f_{2n+1}(x-t) \neq 0 \end{cases}$

Or, • $f_n(t) \neq 0 \iff t \in \mathbb{R}_+^*$, d'après 7).

• $f_{2n+1}(t) \neq 0 \iff 0 < x-t \iff t < x$.

à $x$ fixé

Donc $\varphi_{n+1}(x,t) \neq 0 \iff t \in \mathbb{R}_+^* \cap ]-\infty ; x[ \; = ]0 ; x[$ (*)

Donc : (*) sous entend que $x > 0$, sinon cela n'a pas de sens.
Mais on voit aussi que si $x \leqslant 0$, alors $\varphi(x,t)$ est nulle $\forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Donc finalement :</u>

$$\tilde{f}_{n+1}(x) = \begin{cases} \int_0^x \varphi_{n+1}(x,t)\,dt & \text{si } x > 0. \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Or, en 8a) on a vu que sur $[0;x]$ $\varphi_{n+1}(x,t) = f_n(t) \times g(x-t)$

D'où, calculons $\int_0^x \varphi_{n+1}(x,t)\,dt$ ; Pour $x > 0$

$$\int_0^x \varphi_{n+1}(x,t)\,dt = \int_0^x (n+1)\,e^{-(n+1)x} \times n e^t (e^t - 1)^{n-1}\,dt \text{ , d'après 8c)}$$

$$= (n+1)\,e^{-(n+1)x} \times \int_0^x n e^t (e^t - 1)^{n-1}\,dt$$

$$= (n+1)\,e^{-(n+1)x} \left[ (e^t - 1)^n \right]_0^x$$ , en reconnaissant dans l'intégrande la dérivée d'une fonction

$$= (n+1)\,e^{-x(n+1)} \times (e^x - 1)^n$$

Or, $f_{n+1}(x) = (n+1) e^{-x} \times (1-e^{-x})^n$

$= (n+1) \times e^{-x} \times \left( e^{-x}(e^{x}-1) \right)^n$

$= (n+1)\, e^{-(n+1)x} \times (e^x - 1)$

$= \int_0^x \varphi(t,x)\,dt$, d'après le calcul que nous venons de faire.

Conclusion: On a donc montré que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{f}_{n+1}(x) = \begin{cases} f_{n+1}(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Mais $f_{n+1}(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Donc $f_{n+1}$ et $\tilde{f}_{n+1}$ coïncident sur $\mathbb{R}$, on a donc bien:

$f_{n+1} = \tilde{f}_{n+1}$ → La proposition est héréditaire.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n+1} Z_i$ suit la loi de densité $f_{n+1}$

Conclusion générale: Par principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ suit la loi de densité $f_n$.

9) • $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et d'une composée de deux fonctions continues en $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, car l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

• De plus: $\forall (A,B) \in \mathbb{R}$:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B e^{-x} \times e^{-e^{-x}}\,dx = \left[ e^{-e^{-x}} \right]_A^B = e^{-e^{-A}} - e^{-e^{-B}}$$

$= I(A,B)$.

On remarque alors que:

$\bullet\ e^{-e^{-A}} \xrightarrow[A\to-\infty]{} 0$, par composition : $\left\{\begin{array}{l} \text{en effet } -e^{-A} \xrightarrow[A\to-\infty]{} -\infty \\ \text{et } e^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \end{array}\right.$

$\bullet$ De même $e^{-e^{-B}} \xrightarrow[B\to+\infty]{} 1$.

Donc $\lim\limits_{A\to-\infty}\left(\lim\limits_{B\to+\infty}\int_A^B f(x)\,dx\right) = \lim\limits_{A\to-\infty}\lim\limits_{B\to+\infty}\left(e^{-e^{-B}} - e^{-e^{-A}}\right)$

$= \lim\limits_{A\to-\infty} 1 - e^{-e^{-A}}$

$= \underline{1}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, et vérifie $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.}$

<u>Conclusion:</u> D'après les trois points ci-dessus:
$f$ est bien une densité de probabilité.

<u>10 a)</u> Soit $x \in \mathbb{R}$:

$P(W_n \leqslant x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant x + \ln(n)\right)$

On $\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$, d'où :

$\circ$ Si $\underline{x \leqslant -\ln(n)}$, $P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant x + \ln(n)\right) = 0$

D'où $P(W_n \leqslant x) \underline{= 0}$

$\bullet$ Si $\underline{x > -\ln(n)}$, alors : $P(W_n \leqslant x) = \int_0^{x+\ln(n)} f_n(t)\,dt$, d'après 8b)

Donc $P(W_n \leqslant x) = \int_0^{x+\ln(n)} n e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\,dt = \left[(1-e^{-t})^n\right]_0^{x+\ln(n)}$

D'où $P(W_n \leqslant x) = \left(1 - e^{-x-\ln(n)}\right)^n$

$= \left(1 - e^{-x} \times \left(e^{\ln(n)}\right)^{-1}\right)^n$

$= \underline{\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n}$

# Copie anonyme - n°anonymat : 394178

| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 26 | Session : 2022 |
|---|---|---|

**Épreuve de :** Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Conclusion : On a bien montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(W_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x > -\ln(n). \end{cases}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ :

Comme $-\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$, alors :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ -\ln(n) < x. \quad (*)$

Donc pour $n \geqslant n_0$, $P(W_n \leqslant x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$

Or, $\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$, ce qui est valide d'après $(*)$

Or, $\frac{-e^{-x}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'où :

$$\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{n}$$

Donc $n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -e^{-x}$.

Ainsi $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}, \\ \text{et comme } \lim\limits_{X \to -e^{-x}} e^X = e^{-e^{-x}} \end{cases}$ car deux suites équivalentes ont même limite. par continuité de l'exponentielle.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(W_n \leqslant x) = e^{-e^{-x}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$P(W_n \leq x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-e^{-x}}$.

Or, on remarque que $\varphi : t \mapsto e^{-e^{-t}}$ est une primitive de $f$.

Donc la fonction de répartition de $W_n$ converge en tout point vers la fonction de répartition d'une variable suivant une loi de Gumbell.

Conclusion : $(W_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une V.A.R suivant une loi de Gumbelle.

11a) function y = simulV(n)

```
A = zeros(1,n)
for k: 1:n
A(k) = grand(1, 1, "geom", (n-k+1)/(n))
end
V = (Sum(A))/n - ln(n)
disp(V)
endfunction.
```

b) function y = tableauV(n)

```
A = zeros(1, 1000)
for k: 1:n
A(k) = simulV(n)
disp(A)
end fonction.
```

c) • On observe sur les figures des histogrammes représentant les fréquences d'apparition des valeurs prises par $V_n$ au cours des tirages

• On peut conjecturer que $V_n$ converge en loi vers une V.A.R qui suit une loi de Gumbell.

12) On a bien tout d'abord que $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ :

• De plus : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ :

$$P(V=k) = P(\lfloor \alpha U \rfloor = k-1) = P(k-1 \leqslant \alpha U < k)$$

$$= F_{\alpha U}(k) - F_{\alpha U}(k-1),$$ car $\alpha U$ est à densité donc l'ouverture des bornes n'importe pas.

Mais $\alpha U$ est une transformée affine de $U$, d'où :

Comme $\alpha > 0$, alors :

$$P(V=k) = F_{\alpha U}(k) - F_{\alpha U}(k-1) = P\left(U \leqslant \frac{k}{\alpha}\right) - P\left(U \leqslant \frac{k-1}{\alpha}\right)$$

$$= \left(1 - e^{-p \times \frac{k}{\alpha}}\right) - \left(1 - e^{-p \times \frac{(k-1)}{\alpha}}\right)$$

$$= e^{-p \times \frac{(k-1)}{\alpha}} - e^{-p \times \frac{k}{\alpha}}$$

$$= e^{\frac{-p(k-1)}{\alpha}}\left(1 - e^{-\frac{p}{\alpha}}\right)$$

Mais $\begin{cases} \dfrac{-p(k-1)}{\alpha} = \dfrac{-p(k-1)}{-p} \times \ln(1-p) = \ln(1-p) \times (k-1) \\ \dfrac{-p}{\alpha} = \dfrac{-p}{-p} \times \ln(1-p) = \ln(1-p) \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \exp\left((-p) \times \left(\dfrac{k-1}{\alpha}\right)\right) = (1-p)^{k-1} \\ \exp\left(\dfrac{-p}{\alpha}\right) = 1-p \end{cases}$

Ainsi $P(V=k) = (1-p)^{k-1} \times (1 - 1 + p) = (1-p)^{k-1} \times p.$

Conclusion : On a donc bien $V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

13) On sait que :

$\forall t \in \mathbb{R}, \ \lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$

D'où $\forall \omega \in \Omega, \ \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor \leqslant \alpha U(\omega) < \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1$

Ce qui donne donc $V - 1 \leqslant \alpha U \leqslant V$

D'où $(V - \alpha U) - 1 \leqslant 0 \leqslant V - \alpha U$

Donc on a bien $\begin{cases} V - \alpha U \geqslant 0, & \text{membre de droite.} \\ V - \alpha U \leqslant 1, & \text{membre de gauche.} \end{cases}$

D'où $(V - \alpha U)(\Omega) \subset [0 ; 1]$.

• Or maintenant, si $(V - \alpha U)(\Omega) \subset [0 ; 1]$, alors :

$0 \leqslant (V - \alpha U)^2 \leqslant 1$.

Puisque que $U$ et $V$ admettent une variance, alors $(V - \alpha U)^2$ admet bien une espérance, ce qui donc donne :

$0 \leqslant E(V - \alpha U)^2 \leqslant 1$. (Ce qui implique l'existence de la Varia.)

Donc d'après la formule de Koenig-Huygens, on a bien :

$V(V - \alpha U) = E(V - \alpha U)^2 - E(V - \alpha U)^2 \leqslant E(V - \alpha U)^2 \leqslant 1$.

Conclusion : $V(V - \alpha U)$ existe et : $V(V - \alpha U) \leqslant 1$.

b) Comme $X$ et $Y$ admettent un moment d'ordre 2, alors d'après le cours elles admettent aussi un moment d'ordre 1, donc une espérance.

De plus : $\forall \omega \in \Omega, \ |X(\omega) Y(\omega)| \leqslant \dfrac{Y(\omega)^2 + X(\omega)^2}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 26 | Session : 2022 |

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On a donc la majoration suivante,

$$0 \leqslant |XY| \leqslant \frac{X^2+Y^2}{2}$$

Donc $E(|XY|)$ existe par majoration, car $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent tous les deux.

D'où $E(XY)$ existe aussi, car $E(|XY|)$ existe.

Conclusion : $\begin{cases} E(X) \text{ et } E(Y) \text{ existent} \\ E(XY) \text{ existe.} \end{cases}$

Donc $E(XY) - E(X)E(Y) = \mathrm{cov}(X,Y)$ existe.

- On a $V(X+Y) = V(X) + 2\mathrm{cov}(X,Y) + V(Y)$
  $V(X-Y) = V(X) - 2\mathrm{cov}(X,Y) + V(Y)$.

D'où $V(X+Y) + V(X-Y) = 2(V(X)+V(Y))$

Ce qui donne $V(X+Y) = 2(V(X)+V(Y)) - V(X-Y)$.

Et comme la variance est positive, on a bien :

$V(X+Y) \leqslant 2(V(X)+V(Y))$.

c) On remarque alors que l'on peut écrire que :

$Var(V-U) = Var(V - \alpha U + \alpha U - U)$

Donc d'après la question précédente :

$$Var(V-U) \leqslant 2\left( Var(V-\alpha U) + Var((\alpha-1)U)\right)$$

$$\leqslant 2\left(1 + (1-\alpha)^2 \times Var(U)\right), \text{ d'après 13a)}$$

$$\leqslant 2\left(1 + (1-\alpha)^2 \times \frac{1}{p^2}\right), \text{ car } U \hookrightarrow \mathcal{E}(p).$$

Conclusion : $Var(V-U) \leqslant 2 + \dfrac{2\times(1-\alpha)^2}{p^2}$

14a) On remarque que : $\forall i \in [\![1;n]\!]$.

$Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$

$X_i' \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$, d'après 12).

D'où : Toutes les variables en jeu admettent un moment d'ordre 2, Donc la variance existe bien :

$$V(V_n' - W_n') = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i' - Y_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i' - Y_i\right)$$

~~Donc en itérant la formule trouvée 13b) (enfin l'inégalité) on a :~~

Justification après

$$\frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i' - Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} Var(X_i' - Y_i) \quad (I)$$

Et au niveau de la majoration en (3b), on a :

$$\mathrm{Var}(V_n' - W_n') \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=2}^{n} 2 + 2 \times (1-\alpha_i)^2 \times \left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 + \frac{1}{n^2}V(Y_1)\right.$$

Ce qui donne finalement bien :

$$\mathrm{Var}(V_n' - W_n') \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{i=2}^{n}\left(1 + (1-\alpha_i)^2 \times \left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2\right) + \frac{1}{n^2}$$

• Justification de (I) :
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i' - Y_i$ n'est fonction que de $Y_i$.
Or les $(Y_i)$ sont mutuellement indépendants. Donc toutes les covariances du type $\mathrm{cov}(Y_i - X_i', Y_j - X_j')$ pour $i \neq j$ sont nulles. On a donc bien l'égalité.

b) Soit $\phi : z \longmapsto \frac{1}{(1-z)^2}\left(1 + \frac{(1-z)}{\ln(z)}\right)^2$

~~Donc~~ $\cancel{\phi(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{\ln(z)^2}}$

• $\lim\limits_{z \to 0} \frac{(1-z)}{\ln(z)} = 0$

D'où $\lim\limits_{z \to 0} \phi(z) = 1$.

$\phi$ est prolongeable par continuité en 0.

• En 1 : $\ln(z) \underset{z \to 1}{\sim} z - 1$

~~D'où~~ $\cancel{\frac{(1-z)}{\ln(z)} \underset{z \to 1}{\sim} -1}$

~~Et~~ $\cancel{\frac{1}{1-z}}$ $\cancel{z \to 1}$

Non abouti

ii) $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 (1-\alpha_i)^2 = A_n$.

On, $\forall i \in [\![2, n]\!]$ $\left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 \times (1-\alpha_i)^2 = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^{-2} \times \left(1 + \frac{n-i+1}{n} \times \ln\left(\frac{i-1}{i}\right)^{-1}\right)^2$

D'où $\left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 \times (1-\alpha_i)^2 = \Phi\left(\frac{i-1}{n}\right)$

Donc $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \Phi\left(\frac{i-1}{n}\right)$

Or $\Phi$ est continue, donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a bien :

$A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \Phi(z)\,dz$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 \times (1-\alpha_i)^2 = A = \int_0^1 \Phi(z)\,dz$.

c) On remarque alors que : $\frac{1}{n} A_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où, comme $Var(V_n' - W_n') \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} A_n + \frac{2(n-1)}{n}$

On en déduit que : $\lim_{n \to +\infty} Var(W_n' - W_n) = 0$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebitchev, on a :

Comme $E(W_n') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) - \ln(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) - \ln(n) = E(V_n')$

Car $E(X_i) = E(Y_i)$

On a donc $E(V_n' - W_n') = 0$, donc : $\forall \varepsilon > 0$

$P(|V_n' - W_n'| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(V_n' - W_n')}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Conclusion : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $P(|V_n' - W_n'| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi $(V_n' - W_n') \xrightarrow{P} 0$.

b) On sait que $W_n'$ converge en loi vers une V.A.R. qui suit la loi de Gumbell d'après 10 b)

On a donc :

$$\begin{cases} V_n' - W_n' \xrightarrow{P} 0 \\ W_n' \text{ converge en loi vers une V.AR suivant la loi de Gumbell.} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de Slutsky :

$(V_n' - W_n' + W_n')$ converge en loi vers la loi de Gumbell.

Soit donc que $V_n'$ converge en loi vers la loi de Gumbell.

e) L'approximation est nettement meilleure, car l'étendue de l'intervalle est bien plus réduite qu'en 6c).

Partie III :

15a) On a une probabilité de $1/n$ d'obtenir une vignette numérotée $i$ à chaque tirage.
Donc $A_{i,n}$ compte le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli répétée $n$ fois de manière indépendante.

Ainsi $A_{i,n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

16 a) Comme $\forall (A,B) \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Alors $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc en raisonnant par récurrence sur $n$, on pourrait montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(Je n'ai plus de temps pour rédiger, pardon ...).