Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 :

Partie A :

1a) • En notant $(C_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ les colonnes de A, on remarque que :
$$C_3 = C_2 - C_1$$

La famille (C_1, C_2, C_3) est donc liée, donc $rg(A) \leqslant 2 < 3$

Comme $rg(A) \neq 3$, alors A n'est pas inversible

• De plus, supposons $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tq : $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$

On aurait alors : $(*) \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ -\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

La famille (C_1, C_2) est donc libre, donc $rg(A) \geqslant 2$
Ainsi en reprenant le résultat précédent, on a : $rg(A) = 2$.

b)

• $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

• $A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Donc :

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

c) Le polynôme $P = X^3 - X^2 + X = X(X^2 - X + 1)$ est donc un polynôme annulateur de A. Ses valeurs propres réelles sont donc parmi les racines de P.

Or, $X^2 - X + 1$ est un élément simple (son discriminant est bien strictement négatif), donc il n'admet aucune racine réelle.

D'où $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$

Mais on a vu que $rg\, A = 2 \Rightarrow 0 \in Sp(A)$

D'où $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$

• Supposons par l'absurde que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.
$\exists (e_0, e_1, e_2) \in (\mathbb{R}^3)^3$ tq : $\forall i \in [\![1;3]\!]$, $Ae_i = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc dans cette base, on aurait $A = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, ce qui implique

donc que dans toute base la matrice A est nulle. Or, ce n'est pas le cas.

Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

2) a) On remarque que la matrice B est symétrique réelle.

En effet : ${}^tB = {}^t({}^tA\,A) = {}^tA \times {}^t({}^tA) = {}^tA \times A = B$.

Donc d'après le théorème spectral, B est bien diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrons que $R \in O_3(\mathbb{R})$:

$${}^tR \times R = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Donc $${}^tR \times R = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 4+1+1 & \sqrt{3}-\sqrt{3} & 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & 3+3 & \sqrt{6}-\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2} & \sqrt{6}-\sqrt{6} & 3\times 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times 6 \times I_3 = I_3$$

Ainsi ${}^tR \times R = I_3$ $(*)$

Puisque nous sommes en dimension finie, $(*) \Rightarrow R \times {}^tR = I_3$

Ainsi ${}^tR \times R = R \times {}^tR = I_3$, donc $R \in GL_3(\mathbb{R})$ et $R^{-1} = {}^tR$.

On a donc bien $R \in O_3(\mathbb{R})$

ii) Calculons ${}^tR\,B\,R$:

$${}^tRBR = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, on a :

$$ {}^tRBR = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathrm{diag}(3, 1, 0)} $$

Ainsi <u>${}^tRBR$ est bien une matrice diagonale.</u>

<u>Partie B :</u>

<u>3)</u> • Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et $X \in \mathbb{R}^n$ puis $Y \in \mathbb{R}^n$ leur représentation matricielle respéctive :

$$ \langle f(x), y \rangle = {}^t(MX) \times Y = {}^tX \times {}^tMY = {}^t(X) \times ({}^tMY) = \langle x, g(y) \rangle $$

On a donc bien :
<u>$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$</u>

• En gardant les mêmes notations : Soit $x \in \mathbb{R}^n$:

$$ \langle x, h(x) \rangle = {}^tX \times {}^tM \times M \times X $$

$$ = {}^t(MX) \times MX, \quad \text{par propriété de la transposition} $$

$$ = \langle f(x), f(x) \rangle $$

$$ = \| f(x) \|^2 $$

Ainsi, <u>$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, h(x) \rangle = \| f(x) \|^2$</u>

<u>4a)</u> Soit $x \in \mathrm{Ker}(h)$:
Alors $h(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc : $\langle x, h(x) \rangle = \langle x, 0_{\mathbb{R}^n} \rangle = 0$

Or, $\langle x, h(x) \rangle = \| f(x) \|^2$

Donc $\| f(x) \|^2 = 0 \quad (*)$

Et donc par séparation de la norme, et par sa positivité : $(*) \Rightarrow f(x) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On a donc montré que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

D'où $\text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(f)$.

b) • Mais réciproquement, si $x \in \text{Ker}\, f$, alors :

$f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

D'où $g \circ f(x) = g(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc $x \in \text{Ker}(h)$.
Ainsi $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(h)$

Donc par double inclusion, avec la question précédente : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(h)$

• Ces deux espaces ont même dimension donc, d'où $\dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Ker}(h)$

Or, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, avec $\mathbb{R}^n$ de dimension finie, et il en est de même pour h (on a aussi $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$)
Donc, on peut appliquer le théorème du rang à f, mais aussi à h, d'où :

$\text{Rg}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker}(h) + \text{Rg}(h)$ (*)

Mais, on a montré que $\dim \text{Ker}\, h = \dim \text{Ker}\, f$.
Ainsi, (*) $\Rightarrow$ $\text{Rg}(f) = \text{Rg}(h) = r$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5a) De la même manière qu'à la question 2a), on a : ${}^tM \times M \in S_n(\mathbb{R})$.
Donc d'après le théorème spectral, h est diagonalisable dans une base orthonormée formée de vecteurs propres.

Ainsi, il existe bien une base orthonormé $(\mathcal{E}_1 \cdots \mathcal{E}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, constituée de vecteurs propres de ${}^tM \times M$ (donc de h).

b) On a montré à la question 3 que la forme quadratique associée à la matrice ${}^tM \times M$ était positive.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_{{}^tMM}(x) = \langle x, h(x) \rangle = \| f(x) \|^2 \geq 0$

• Soit maintenant $\lambda \in Sp({}^tMM)$: et $x \in E_\lambda({}^tMM)$, avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
On a l'égalité :

$$\begin{aligned} \langle x, h(x) \rangle &= \langle x, \lambda x \rangle, \text{ car } x \in E_\lambda({}^tMM) \\ &= \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

Donc puisque $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on a $\|x\|^2 > 0$, d'où :

$$\lambda = \frac{\langle x, h(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

Mais $\langle x, h(x) \rangle \geq 0$, et $\|x\|^2 > 0$

Donc $\lambda \geq 0$

On a donc bien montré $Sp({}^tMM) \subset \mathbb{R}_+$

6) On sait que la base $\mathcal{B}$ (canonique) et la base $\mathcal{B}_1$ sont toutes orthonormées pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Donc P, étant une matrice de passage entre deux bases orthonormées est bien une matrice orthogonale.

En effet, en notant $(E_1 \cdots E_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ les représentations matricielles des vecteurs $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$, on a :

$P = (E_1 | E_2 | \cdots | E_n)$

Donc en particulier, on pourrait montrer en appliquant la formule du produit matriciel que :

${}^tPP = (\langle E_i, E_j \rangle)_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$

Et donc, puisque $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ est une famille orthonormée, on a :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{i,j}$ (Symbole de Kronecker)

Donc on a bien ${}^tPP = (\delta_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} = I_n$

Et donc puisque nous sommes en dimension finie : On a aussi $P{}^tP = I_n$.

Donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

• En notant $(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ les valeurs propres (toutes positives d'après 5b)), on a par définition de la diagonalisation :

${}^tMM = P \times \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \times {}^tP$

7) Si la matrice M est symétrique, alors elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
Notons $(\mu_1 \cdots \mu_n)$ ses valeurs propres.

On a donc : $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad M = P \times \text{diag}(\mu_1 \cdots \mu_n) \times {}^tP$.

D'où, ${}^tMM = M^2 = P \times \text{diag}(\mu_1^2 \cdots \mu_n^2) \times {}^tP$.

Ainsi, les valeurs singulières de M sont les $(\sigma_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ tq :

$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \sigma_i = \sqrt{\mu_i^2} = |\mu_i|$

8) On sait d'après le cours que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \; rg(AB) = Rg(BA)$

Donc, en particulier, on a :

$rg({}^tMM) = rg([P]\times[D\times{}^tP]) = rg([D\times{}^tP]\times[P])$

$= rg(D)$, car ${}^tPP = I_n$

Or, d'après 4b), on a : $rg({}^tMM) = Rg(M) = r$.

On a donc bien $rg(D) = r$.

• Or, D est une matrice diagonale, donc échelonnée, son rang est donc égal au nombre de pivots non nuls, soit donc du nombre de ses coefficients (diagonaux ici) non nuls.
Ainsi, puisque $rg(D) = r$, alors D possède r coefficients non nuls. (r exactement).

9a) • Comme D possède r coefficient non nul, alors, quitte à renommer les valeurs propres, on a : $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\lambda_i \neq 0$
Soit alors $i \in [\![1;r]\!]$:
$h(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, car $\lambda_i \neq 0$ et $\varepsilon_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $x = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc par contraposée, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Ainsi, puisque $h(f(\varepsilon_i)) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $f(\varepsilon_i) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

• De plus, d'après 3) :
$\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_i)\rangle = \|f(\varepsilon_i)\|^2$

D'où $\|f(\varepsilon_i)\| = \sqrt{\langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_i)}$, car la norme est positive

$= \sqrt{\lambda_i} \times \sqrt{\|\varepsilon_i\|^2}$, car $\varepsilon_i \in E_{\lambda_i}(h)$
$= \sigma_i$, car $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ est une base orthonormée.

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\|f(\varepsilon_i)\| = \sigma_i$.

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

b) • Tout d'abord, montrons que les $(u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont normés :

$\forall i\in[\![1;n]\!]$, $\|u_i\| = \dfrac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|}\times\|f(\varepsilon_i)\| = 1.$

• Montrons que la famille $(u_1 \cdots u_n)$ est orthogonale :
Soit $(i;j)\in[\![1;n]\!]^2$ tq $i\neq j$:

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|}\times f(\varepsilon_i), \frac{1}{\|f(\varepsilon_j)\|}\cdot f(\varepsilon_j)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sigma_i\times\sigma_j}\times\langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j)\rangle$$

Or, $\langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j)\rangle = {}^t(ME_i)\times ME_j$, en reprenant les notations de 6)

$$= {}^tE_i\times{}^tMME_j$$

$$= {}^t[E_i]\times[{}^tMME_j]$$

$$= \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_j)\rangle$$

$$= \lambda_j\langle\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle$$

$= 0$, car $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ est orthonormée.

Donc $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, tq $i \neq j$: $\langle u_i, u_j \rangle = 0$.

Conclusion : • $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\langle u_i, u_i \rangle = 1$
• $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = 0$

La famille $(u_1 \dots u_r)$ est donc bien une famille orthonormée.

c) ~~On remarque que:~~
~~$\forall i \in [\![1;r]\!]$, $g(u_i) = \frac{1}{\sigma_i} h(\varepsilon_i) = \frac{\lambda_i}{\sigma_i} e_i = \sigma_i \varepsilon_i$~~

On remarque que:
$\forall i \in [\![1;r]\!]$, $f(\varepsilon_i) = \|f(\varepsilon_i)\| u_i = \sigma_i \cdot u_i$
Considérons désormais $\mathcal{B}_2 = (u_1 \cdots u_r, \tilde{u}_{r+1} \cdots \tilde{u}_n)$, que l'on construit de la sorte. On applique le théorème de la base incomplète à la famille $(u_1 \cdots u_r)$ pour la compléter en une base de $\mathbb{R}^n$, puis on applique à cette base obtenue le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
On a alors : $\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $f(\varepsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot u_i$

D'où :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_r), & f(\varepsilon_{r+1}) \cdots f(\varepsilon_n) \end{matrix} \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc pour $\mathcal{B}_2 (u_1 \cdots u_n, \tilde{u}_{r+1} \cdots \tilde{u}_n)$, on a bien :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f) = \mathrm{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_r, 0 \cdots 0).$$

10) De la même manière qu'à la question 6), comme Q est une matrice de passage entre 2 bases orthonormées, alors $Q \in O_n(\mathbb{R})$.

Partie C :

12) Si M est inversible elle est de rang n, donc $\forall i \in [\![1;n]\!], \sigma_i \neq 0$.

Ainsi $M \times M^+ = Q \times diag(\sigma_1 \cdots \sigma_n) \times {}^tP \times P \times diag(\frac{1}{\sigma_1} \cdots \frac{1}{\sigma_n}) {}^tQ$

$= Q \times diag(\sigma_1 \times \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_n \times \sigma_n^{-1}) \times {}^tQ$

$= Q \times {}^tQ$

$= I_n$

Donc, puisque nous sommes en dimension finie, on a aussi:
$M^+ \times M = I_n$

Or, l'inverse est unique. Donc $M^+ = M^{-1}$.

13) $M \times M^+ = Q \times diag(\sigma_1 \cdots \sigma_r, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-r \text{ fois}}) {}^tP \times P \times diag(\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_r^{-1}, 0 \cdots 0) \times {}^tQ$

$= Q \times diag(\underbrace{1 — 1}_{r \text{ fois}}, 0 — 0) \times {}^tQ$

b) On remarque que $M \times M^+$, dans la Base $\mathcal{B}$ orthonormée, est la matrice d'un projecteur.
On a en effet : $(M \times M^+)^2 = Q \times diag(1^2 \cdots 1^2, 0^2 \cdots 0^2) {}^tQ$

$= Q\, diag(1 \cdots 1, 0 \cdots 0) {}^tQ$

$= M \times M^+$.

Donc, de plus, comme la matrice de MM^+ est symétrique, alors:
MM^+ est la matrice d'un projecteur symétrique.
Conclusion : D'après le cours, MM^+ est bien la matrice d'un projecteur orthogonal.
Donc p est un projecteur orthogonal.

c) • $rg(MM^+) = rg([Q] \times [\Delta {}^tQ]) = rg([\Delta {}^tQ] \times [Q])$

$= rg(\Delta)$, car $Q \in O_n(\mathbb{R})$

$= r = rg(f)$.

• On remarque de plus que : $Im(MM^+) \subset Im(M)$. En effet
$\forall x \in Im(MM^+)$, $\exists u \in \mathbb{R}^n$ tq : $p(u) = x$
En notant $\tilde{f}$ l'endomorphisme associé à M^+, on a donc

$\forall x \in Im(MM^+)$, $\exists u \in \mathbb{R}^n$ tq : $f(\tilde{f}(u)) = x$, car $p = f \circ \tilde{f}$

Donc $x \in Im(f) = Im(M)$.

Ainsi $Im(MM^+) \subset Im(M)$, soit lors $Im(p) \subset Im(f)$.

• On a donc $\begin{cases} Im(p) \subset Im(f) \\ rg(p) = rg(f) \end{cases}$, ainsi $Im(f) = Im(p)$.

~~8(c) • Montrons tout d'abord que :~~
~~$\forall u \in Im(f)$~~
Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus Im(f)$
• On remarque que p est une projection orthogonale sur $Im(f)$ (d'après la question précédente).
D'où : Soit $x \in \mathbb{R}^n$
~~$\|y - p(y)\|^2 = \|y - f(x) + f(x) - p(y)\|^2$~~

$\|y - p(y)\| = \|y - p(y) + f(x) - f(x)\| \leq \|y - f(x)\|$

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
On remarque que p est une projection orthogonale sur $Im(f)$ d'après la question précédente, donc $Ker(p) = Im(p)^\perp$

$\|y - f(x)\|^2 = \|y - p(y) + p(y) - f(x)\|^2$

Or, $\begin{cases} y - p(y) \in Im(p)^\perp \\ p(y) - f(x) \in Im(p) \end{cases}$, donc d'après le théorème de phythagore :

$\|y - f(x)\|^2 = \|y - p(y)\|^2 + \|p(y) - f(x)\|^2$

Ainsi $\|y - p(y)\|^2 = \|y - f(x)\|^2 - \|p(y) - f(x)\|^2 \leq \|y - f(x)\|^2$

Donc par positivité de la norme, et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a finalement bien :

$\|y - p(y)\| \leqslant \| y - f(x)\|$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|y - p(y)\| \leqslant \|y - f(x)\|$

b) Il suffit de prendre x^* de sorte que, comme $p(y) \in \text{Im}(f)$, le vecteur x^* vérifie :
$f(x^*) = p(y)$ (On prend donc un antécédent de $p(y)$ par f)

Problème 2 :

Partie A :

1) • $C_0 = 1$
• $C_1 = \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} = 1$
• $C_2 = \frac{1}{3} \times \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 2$

2 a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!} = \frac{(n+1)\times(2n!) - n\times(2n!)}{(n+1)!\, n!}$$

$$= \frac{2n!}{n! \times n!} - \frac{2n!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi on a bien :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \; C_n > 0$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\binom{2n}{n} \in \mathbb{N}$ et $\binom{2n}{n+1} \in \mathbb{N}$

Donc, comme on sait que C_n est strictement alors, plutôt que de simplement avoir $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \in \mathbb{Z}$, on a directement :

$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \in \mathbb{N}^*$. (C'est bien un relatif, mais positif)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; C_n \in \mathbb{N}^*$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+2} \times \frac{(2n+2)\times(2n+1)\times 2n!}{(n+1)\times n! \times (n+1)!}$$

$$= \frac{2(n+1)\times(2n+1)}{(n+1)^2 \times (n+2)} \times \frac{(2n!)}{n! \times n!}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+2} \times \left(\frac{1}{n+1} \times \frac{2n!}{n! \times n!}\right)$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+2} \times C_n$$

4) function c = catalan(n)

a = 1

for k : 1 : n

a = (2(2k+1)/(k+2))*a
disp(a)
end function.

5a) $\forall n \in \mathbb{N}$, comme $C_n > 0$, on a :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)+3n}{n+2} = 1 + \frac{3n}{n+2} \geqslant 1$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{C_{n+1}}{C_n} \geqslant 1$, d'où $C_{n+1} \geqslant C_n$.

Conclusion : La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.

b) On remarque que $\frac{C_{n+1}}{C_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$, $\frac{C_{n+1}}{C_n} \geqslant 2$, en particulier.

Soit alors $n \geqslant n_0$:

$$\prod_{k=n_0}^{n} \frac{C_{k+1}}{C_k} \geqslant 2^{n-n_0+1}$$

Donc par télescopique : $C_{n+1} \geqslant 2^{n-n_0+1} \times C_{n_0}$.

Or, comme $C_{n_0} > 0$ (d'après 2b)), alors $2^{n-n_0+1} \times C_{n_0} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Donc par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} C_{n+1} = +\infty$.

Conclusion : La suite (C_n) est bien divergente. (Vers $+\infty$).
(Par l'absurde, on aurait supposé que $U_n \xrightarrow[+\infty]{} l$, et aurait eu par unicité de la limite $l = 4l \Rightarrow l = 0$, or $U_n \geqslant 1$, donc $l \geqslant 1 \rightarrow$ Absurde !)

6b) En admettant que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leqslant \frac{C_{k+1}}{C_k} \leqslant 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$

On peut alors montrer que : Soit $n \geqslant 2$

$$\prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{C_{k+1}}{C_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$$, par produit de

$n-1$ encadrements à borne positives.

Donc $4^{n-1} \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leqslant C_n \leqslant 4^{n-1} \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$

Soit donc $4^{n-1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \leqslant C_n \leqslant 4^{n-1} \times \left(\frac{2}{n+1}\right)^{3/2}$, par télescopage.

Ce qui donne $4^{n-1} \times \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant C_n \leqslant \frac{4^{n-1} \times 2\sqrt{2}}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

Soit finalement, comme $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$, on a bien :

$\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{4}\frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leqslant C_n \leqslant \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

↳ Ceci reste vrai pour $n=1$, car $1 \leqslant 1 \leqslant 2\sqrt{2}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4} \times \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leqslant C_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

7a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k} = \sum_{k'=0}^{n} (n-k') \times C_{n-k'} \times C_{k'}$$

D'où, $T_n = \frac{T_n + T_n}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{n} k C_{n-k} C_k + \sum_{k=0}^{n} n-k \times C_{n-k} \times C_k}{2}$

Donc $T_n = \frac{n \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}}{2} = \frac{n}{2} \times S_n$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques / [illegible]

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$T_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+3}{2} \times S_{n+1}$

On, $S_{n+1} = S_n + C_{n+1} \times C_0 = S_n + C_{n+1}$

D'où $T_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+3}{2} \times C_{n+1} + \frac{n+3}{2} S_n$

$= C_{n+1} + \frac{n+1}{2} C_{n+1} + \frac{n+3}{2} S_n$

$$4T_n + 2S_n = \sum_{k=0}^{n} (4k+2) C_k C_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{4(2k+1)}{k+2} \times (k+2) C_k C_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k+2) C_{k+1} C_{n-k}$$

$$= \sum_{k'=1}^{n+1} (k'+1) C_{k'} \times C_{n+1-k'} \quad , \quad k' = k+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k C_k C_{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_k C_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} k C_k C_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} C_k C_{n-k} - C_{n+1}$$

$$= T_{n+1} + S_{n+1} - C_{n+1}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a donc bien montré :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ T_{n+1} + S_{n+1} = 4T_n + 2S_n + C_{n+1}$.

c) Montrons la proposition $\mathcal{P}(n)$: $S_n = C_{n+1}$

Initialisation : Au rang $n=0$:

$S_0 = C_0 = C_1 = 1$, la proposition est vraie.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$:

D'après la question précédente on a :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + 4T_n + 2S_n$$

D'où, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{n}{2} S_n$:

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = C_{n+1} + (2n+2) S_n$$

D'où $S_{n+1} = \dfrac{2}{n+3} C_{n+1} + \dfrac{4n+4}{n+3} S_n$

Or, par HR(n) : $S_n = C_{n+1}$, d'où :

$$S_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3} C_{n+1} = C_{n+2} \text{ d'après 3).}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n = C_{n+1}$.

8a) On a montré précédemment que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{4} \times \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

Donc, $\forall x \in [\frac{-1}{4} ; 1/4]$:
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x|^n \leqslant \frac{1}{4^n}$, on a :

$$c_n |x|^n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Or, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge d'après le critère de Riemann ($\alpha > 1$).

Donc par comparaison de séries à termes positifs : $\sum_{n \geqslant 1} c_n |x|^n$ converge. Donc $\sum_{n \geqslant 1} c_n x^n$ converge (et cela $\forall x \in [\frac{-1}{4} ; \frac{1}{4}]$).

b) Soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{i=0}^{N} c_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} c_j x^j\right) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} c_i c_j x^{i+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{i+j=n} c_i c_j\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{2N} c_{n+1} \times x^n \text{, d'après la question 7)}$$

$$= \sum_{n=1}^{2N+1} c_n \times x^{n-1}$$

Or, puisque la série $\sum_{n \geqslant 1} c_n x^n$ converge, alors, on a :

$$\begin{cases} \text{si } x = 0, \sum_{n \geqslant 1} c_n x^{n-1} \text{ converge et a pour somme } 0 \\ \text{si } x \neq 0, \sum_{n \geqslant 1} c_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n \geqslant 1} c_n x^n \text{, et converge, car } \sum_{n \geqslant 1} c_n x^n \text{ CV.} \end{cases}$$

Donc la série $\sum_{n \geqslant 1} x^{n-1} \times c_n$ converge, et ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i\right)^2 = f(x)^2.$$

D'où : $\forall x \in [\frac{-1}{4} ; \frac{1}{4}]$

$$g(x)^2 = 4x^2 f(x)^2 = 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$$

$$= 4x \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \cancel{\ \ } \text{, par linéarité}$$

$$= \cancel{4x f(x)}$$

Donc $g(x)^2 = 4x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - c_0\right) = 2g(x) - 4x.$

Partie B :

$$9a) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(2t)\,dt$$

$$= \pi/2 + [\sin(2t)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Partie C :

12a)
```
function T = simule(p)
  for k : 1 : 10^4
  S = 0
  M = 0
  a = rand()
 if floor (2a) < 1  then S = S+1
 else M = 1
```