

Copie anonyme - n°anonymat : 589784

E3-00215
589784
Maths S



Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

1/a) La dernière ligne de A est formée de 0 uniquement donc $\text{rg}(A) < 3$,
ceci montre que A n'est pas inversible.

Par ailleurs, en notant $L_1(A)$ et $L_3(A)$ respectivement la ligne 1 de A
et la ligne 3 de A , il n'existe pas de réel α tel que $L_1(A) = \alpha L_3(A)$ car
sinon on aurait $1 = 0$, ce qui est absurde.

Ces deux lignes forment donc une famille libre.

d'où, puisque $L_2(A)$ est nulle, $\text{rg}(A) = 2$.

2a)

$$A^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^2 = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^3 = A^2 \times A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ie } A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1+1+0 & -1+0+1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-1+0 & -1+1 & -1+0+1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) d'après ce qui précède, $X^3 - X^2 + X$ est un polynôme annulateur

de A . d'après le cours, les valeurs propres de A sont parmi les racines de ce polynôme.

$$X^3 - X^2 + X = 0 \Leftrightarrow X(X^2 - X + 1) = 0$$

$$\text{ie } X=0 \text{ ou } X^2 - X + 1 = 0$$

On résout l'équation $X^2 - X + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3$ d'où cette équation n'admet pas de solutions réelles.

Des lors, l'unique valeur propre possible de A est 0 .

Il se trouve que c'est une valeur propre de A car A n'est pas inversible d'après 1/a) d'où $\underline{Sp(A) = \{0\}}$

De plus $\dim(E_0(A))$, où $E_0(A)$ est le sous-espace propre de A associé à

la valeur propre 0 , est de dimension 1 . En effet d'après le théorème du rang,

$$\text{on a } 3 = \dim(E_0(A)) + \text{rg}(A).$$

La somme des ~~sous~~ dimensions ~~des~~ des sous-espaces propres de A n'est pas égale à 3 donc on en conclut d'après le cours que A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

2/a) ${}^t B = {}^t ({}^t A A) = {}^t A A = B$ d'où B est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le cours

b) i) R est orthogonale car ${}^t R R = I_3$ d'après le cours.

$${}^t R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } {}^t R R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+1+4 & -\sqrt{3}+\sqrt{3}+2 \times 0 & -\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{3}+2 \times 0 & (\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 & \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2} & \sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3} & (\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3, \quad \text{car } R \text{ est} \\ \text{symétrique et } R^{-1} = {}^t R.$$

d'où R est orthogonale

2/b) ii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t R B R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où ${}^t R B R$ est diagonale

Partie B.

3) Notons $X = \mathcal{M}_B(x)$ et $Y = \mathcal{M}_B(y)$

Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^2 \quad \langle x, g(y) \rangle = {}^t X {}^t M Y$

et $\langle f(x), y \rangle = {}^t (M X) Y = {}^t X {}^t M Y$ d'où

Copie anonyme - n°anonymat : 589784

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 23	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques S E M L T O N		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{n/2} \quad \langle x, g(y) \rangle = \langle f(v)/y \rangle$

ou la même manière $\langle x, h(v) \rangle = t^X t^M M X$

et $\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v) \rangle = t^X (M X) M X = t^X t^M M X$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, h(v) \rangle = \|f(v)\|^2$

h/a) Soit $x \in \text{Ker}(h)$

$\langle x, h(v) \rangle = t^X t^M M X$ or $t^M M X = 0$ car $x \in \text{Ker}(h)$

d'où $\langle x, h(v) \rangle = 0$ ie d'après l'égalité établie en 7) on a

$\|f(v)\|^2 = 0$ ie $f(v) = 0$ d'où $x \in \text{Ker}(f)$

h/b) On a montré en h/a) que $\text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$ alors $f(v) = 0$ d'où $g_0(f(v)) = g(v)$
ie $h(v) = 0$

d'où $x \in \text{Ker}(h)$ donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(h)$

Ceci montre alors que $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$

d'où après le théorème des rangs on a $\text{rg}(h) = n - \dim(\text{Ker}(h))$
 $\text{rg}(h) = n - \dim(\text{Ker}(f))$

5/24

car $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$ or $n - \dim(\text{Ker}(f)) = \text{rg}(f)$ d'après le théorème du rang

$$\text{d'où } \text{rg}(h) = \text{rg}(f)$$

$$\text{ie } \underline{\text{rg}(h) = n.}$$

5/a) On a que $M_B(h) = tMM$

d'où $M_B(h)$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres d'après le cours.

Or alors, h également donc h est diagonalisable et il existe une base orthogonale

$B_n = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h

2-) Soit λ une valeur propre de h et x un vecteur propre associé.

$$\text{Alors } tMX = \lambda X$$

$$\text{or } \cancel{tMX} \quad \langle x, h(v) \rangle = \|f(v)\|^2$$

$$\text{d'où } tX tMX = \|f(v)\|^2$$

$$\text{ie } tX \lambda X = \|f(v)\|^2 \quad \text{ie } \lambda \|X\|^2 = \|f(v)\|^2$$

or $\|X\|^2 \neq 0$ car X est un vecteur propre de $M_B(h)$ d'où

$$\lambda = \frac{\|f(v)\|^2}{\|X\|^2} > 0 \quad \text{un quotient de réels positifs}$$

d'où $\lambda \geq 0$ donc les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

6) h est diagonalisable dans B_n une base formée de vecteurs propres de h ,
 $\times$ or orthogonale

d'où naturellement on suppose que $M_B(h)$ est semblable à une matrice diagonale avec comme éléments diagonaux les valeurs propres de h que l'on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (pointé d'après 5/b).

où en pratique P est la matrice de passage de B à B_n on a

$$M_B(h) = P D P^{-1} \quad \text{avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ie $t M M = P D^t P$ car P est orthogonale

* P est orthogonale car c'est la matrice de passage entre deux bases orthonormées B et B_n .

7/ Supposons que M est symétrique. Alors $t M M = M^2$

Les valeurs propres de M sont les $\mu_1, \dots, \mu_n$.

On a d'après 6/ que $M^2 = P D_n^t P$

d'autre part $M^2 = P D_n^t P$ où $D_n = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 \end{pmatrix}$ car M est diagonalisable car symétrique réelle
 $\uparrow$
sur B_n .

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \sigma_i = \sqrt{(\mu_i)^2} = |\mu_i|$$

Les valeurs singulières de M sont donc les valeurs absolues de ses valeurs propres.

8/ D est formée des valeurs propres de h sur la diagonale.

$\text{rg}(h) = r$ d'où $\dim(E_0(h)) = n - r$ ce qui signifie que D admet exactement $n - r$ coefficients diagonaux nuls ou r coefficients au total
où lors, D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

9/a) $\forall i \in \{1, n\}$

~~E_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0~~

~~d'où $E_i \in \text{Ker}(h)$ et $E_i \neq 0$~~

~~on $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$~~

Soit $i \in \{1, n\}$

Supposons par p' absurde que $f(E_i) = 0$ alors puisque $\forall x \in \mathbb{R}^n \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2$ on a

$$\langle E_i, h(E_i) \rangle = 0 \quad \text{ie} \quad \langle E_i, \lambda_i E_i \rangle = 0 \quad \text{ie}$$

$\lambda_i \|E_i\|^2 = 0$ absurde car $\lambda_i \neq 0$ et $E_i \neq 0$ car c'est un vecteur propre donc $\|E_i\|^2 \neq 0$

d'où par p' absurde $f(E_i)$ est non nul

On procède de même pour le calcul de $\|f(E_i)\|$:

on a $\|f(E_i)\| = \sqrt{\langle E_i, h(E_i) \rangle}$ d'après 3).

on E_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i d'où $h(E_i) = \lambda_i E_i$

$$\text{donc } \|f(E_i)\| = \sqrt{\langle E_i, \lambda_i E_i \rangle} = \sqrt{\lambda_i \langle E_i, E_i \rangle} \quad (\text{propriétés du p.s.})$$

d'où $\|f(E_i)\| = \sqrt{\lambda_i}$ car $\sqrt{\langle E_i, E_i \rangle} = \|E_i\| = 1$ car B_n est une base orthonormée.

9/b) Soit $i \in \{1, n\}$ $\|u_i\| = \frac{\|f(E_i)\|}{\|f(E_i)\|} = 1$

Soit $(i, j) \in \{1, n\}^2 / i \neq j$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\|f(E_i)\|} \times \frac{1}{\|f(E_j)\|} \langle f(E_i), f(E_j) \rangle$$

on $\langle f(E_i), f(E_j) \rangle = \langle E_i, g(f(E_j)) \rangle$ d'après 3)

$$= \langle E_i, h(E_j) \rangle = \lambda_j \langle E_i, E_j \rangle$$

Copie anonyme - n°anonymat : 589784

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 23	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques S ERTON		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

on B_1 est une base orthogonale donc $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} / i \neq j \quad (e_i, e_j) = 0$
d'où $\underline{(u_i, u_j) = 0}$

Ceci achève de montrer que $\underline{(u_1, \dots, u_n)}$ est une famille orthogonale

9/c) En posant $B_2 = (u_1, \dots, u_n)$ * voir dernière Δ
on a $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad p(e_i) = \|p(e_i)\| u_i$ d'où $(\|p(e_i)\| = \sqrt{\lambda_i})$
 $p(e_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i$ donc $M_{B_2, B_1}(p) = \begin{pmatrix} \frac{p(e_1)}{\sqrt{\lambda_1}} & \dots & \frac{p(e_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} u_1 \dots u_n$ ie $M_{B_2, B_1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}$
 $M_{B_2, B_1}(p) =$
d'où $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0, \dots, 0)$ car $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_i = 0$
d'où $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i = 0$

10) Q est la matrice de passage entre deux bases orthogonales donc elle est orthogonale

$M_{B_1, B_2}(f) = M_{B_2, B_1} M_{B_2, B_1}(f) M_{B_1, B_2}$

d'après le cours $M_{B_2, B_1}(f) = \mathcal{B}_{B_1, B_2} \times M_{B_2, B_1}(f) \times \mathcal{P}_{B_1, B_2}$

ie $M_{B_2, B_1}(f) = Q \Delta P^{-1}$ or P est orthogonale

d'où $M_{B_2, B_1}(f) = Q \Delta P^{-1}$

on $M_{B_2, B_1}(f) = M$ donc $\underline{M = Q \Delta P^{-1}}$

↑ car $M_B(f) = M$

9/c) Prévision B_2 est aussi une base car les u_i forment une famille orthogonale de vecteurs non nuls car les $\|f(E_i)\| \neq 0$ donc d'après le cours c'est une famille libre, de cardinal n donc c'est bien une base de $\mathbb{R}^n$.

11) $\Delta_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Les valeurs propres de B sont 3, 1 et 0 d'après la notation diagonale obtenue en 2) et (ii) d'où

$\Delta_1 = \text{diag}(\sqrt{3}, 1, 0)$

Partie C

12) Supposons que M est inversible. Alors $n = m$ d'où $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$$MM^+ = Q \underset{n \times n}{\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_m)} \underset{p \times p}{P^T} \underset{p \times p}{\text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, \frac{1}{\sigma_{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_m})} Q^T$$

$$= Q \Delta I_n \underset{n \times n}{\text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, \frac{1}{\sigma_{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_m})} Q^T$$

$$= Q I_n Q^T \text{ car } \underset{n \times n}{\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_m)} \times \underset{p \times p}{\text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, \frac{1}{\sigma_{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_m})} = \underset{n \times n}{\text{diag}(1, \dots, 1, 1, \dots, 1)} = I_n$$

$$MM^+ = I_n$$

d'où $MM^+ = I_n$ ie $M^{-1} = M^+$

$$13/a) \quad MM^+ = Q \Delta^t P \times P \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0 \right)^t Q$$

$$= Q \Delta \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0 \right)^t Q$$

$$MM^+ = Q \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ termes}}, 0, \dots, 0 \right)^t Q$$

$$13/b) \quad p \circ p = f \circ f^+ \circ f \circ f^+$$

$$= MM^+ MM^+$$

$$= Q \text{diag} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^t Q Q \text{diag} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^t Q$$

$$= Q \text{diag} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \text{diag} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^t Q$$

$$= Q \text{diag} (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^t Q = p.$$

d'où p est un projecteur.

$$\mathcal{M}_0(p) = MM^+ \quad \text{on} \quad {}^t(MM^+) = {}^t(M^+) {}^tM$$

$$= \frac{{}^t(P \text{diag} (\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0)^t Q)}{{}^t(Q \Delta^t P)}$$

$$= {}^t({}^tQ) {}^t(P \text{diag} (\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0)^t) \times P {}^t(Q \Delta)$$

$$= Q \text{diag} (\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0)^t P \times P {}^t \Delta Q \quad \text{on} \quad {}^t \Delta = \Delta$$

$$= MM^+ \quad \text{d'après les calculs déjà effectués en 13/a)}$$

La matrice de p dans une base orthonormée est symétrique donc p est un endomorphisme symétrique. Puisque c'est un projecteur alors p est un projecteur orthogonal.

$$13/c) \quad \text{On admet que } \text{rg}(MM^+) = n$$

$$\text{Alors} \quad \text{rg}(p) = \text{rg}(b)$$

d'où on peut $\mathcal{I}_m(p) \subset \mathcal{I}_m(b)$ car si $x \in \mathcal{I}_m(p)$ alors $\exists z \in \mathbb{R}^n / x = p(z)$
 i.e. $x = f \circ f^+(z)$ d'où $x = f(u)$ avec $u = f^+(z)$ d'où $x \in \mathcal{I}_m(f)$

dès lors, grâce à l'égalité des nms, on conclut que $\text{Im}(p) = \text{Im}(f)$

14) a) p est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)^\perp$.

d'après le lemme $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(v)\|$ existe et est atteint lorsque x vaut le projecteur orthogonal de y sur $\text{Im}(f)$.

$$\text{car } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(v)\| = \min_{z \in \text{Im}(f)} \|y - z\| \quad \text{d'où}$$

lorsque $x = p(y)$.

d'après la définition du min, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|y - p(y)\| \leq \|y - f(v)\|$

14) b) ~~d'après le lemme $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(v)\|$~~

d'après ce qui précède si $f(v^*) = p(y)$ alors x^* répond au problème posé

15) a) $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$x \in \text{Im}(f_n) \Leftrightarrow \exists z/2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} / AZ = X$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} \beta + \gamma = x_1 \\ -\alpha + \gamma = x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ x_2 \\ \gamma - \alpha \end{pmatrix}$$

2r) Calcul de $\|y - f_n(v)\|^2$

$$f_n(v) = AX = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 0 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \|y - f_n(v)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 \\ 1 - x_3 + x_1 \\ 1 - x_3 + x_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -(x_2 + x_3 - 1) \\ x_1 - x_3 + 1 \\ x_1 - x_3 + 1 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\|y - f_n(v)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 589784

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2

Partie A

$$1) \quad c_0 = 1 \times \binom{0}{0} = \underline{1} \quad c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \times 2 = \underline{1}$$

$$c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times 6 = \underline{2}$$

2/a) 1^{er} cas : $n=0$

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{0}{0} = 0 \quad \text{car } n+1 > 2n$$

$$= 1 = c_0$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n+1 \leq 2n$ d'où

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{n}{(n+1)} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n.$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = c_n.$

2/b) En tout que différence d'entiers naturels, c_n est donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier.

De plus $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{2n}{n} < \binom{2n}{n+1}$ d'où c_n est un entier

natuel non nul.

3) ~~Montrer cette égalité par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$.~~

Soit $n=0$: $c_{n+1} = c_n = 1$

~~vérifier pour $n=0$. $\frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{2 \times 1}{2} c_0 = 1 = c_1$ d'où l'égalité est~~

~~Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang n . Montrer que l'égalité est vraie au rang $n+1$.~~

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $c_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)! (n+1)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n)!}{(n+2)(n+1)^2 (n)!}$$

$$= \frac{(2n+1)2(n+1)(2n)!}{(n+2)(n+1)^2 (n)!} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} c_n$$

CQFD

h) fonction $c = \text{catalan}(n)$

$$d = \text{factoriel}(2n) / (\text{factoriel}(n) * \text{factoriel}(n))$$

$$c = 1/(n+1) * d$$

solution

5/a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n > 0$ soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 0 \quad \text{d'où } (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

5/b) (c_n) est croissante donc soit (c_n) tend vers une limite finie l , soit c_n tend vers $+\infty$.

Supposons que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admette une limite finie l .

Alors $c_{n+1} \rightarrow l$ d'où en passant à la limite des l'égalité en 3 on a

$$l = h l \quad \text{soit} \quad \frac{2(2n+1)}{n+2} \sim \frac{2(2n)}{n} \sim h$$

d'où $l = 0$ nécessairement. Alors on a $c_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$.

dès lors, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$

6/a) Soit $k \in \mathbb{N}^0$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$$

on admet l'inégalité proposée

6/b) Adm.

7) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \frac{1}{n-k+1} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

on réalise le changement d'indice proposé $i = n-k$.

$$T_n = \sum_{k=0}^n (n-i) \binom{2(n-i)}{n-i} \frac{1}{i+1} \times \frac{1}{n-i+1} \binom{2i}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^n n \binom{2(n-i)}{n-i} \frac{1}{i+1} \times \frac{1}{n-i+1} \binom{2i}{i} = \sum_{i=0}^n i \binom{2(n-i)}{n-i} \times \frac{1}{i+1} \times \frac{1}{n-i+1} \binom{2i}{i}$$

d'où $T_n = n \times S_n - T_n$

ie $2T_n = n S_n$ d'où $T_n = \frac{n}{2} S_n$

7/b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} h c_k c_{n+1-k}$$

On obtient l'égalité

7/c) Montrons par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ que $S_n = c_{n+1}$.

Si $n=0$, $S_0 = c_0 c_n = c_0 = 1$

$c_{n+1} = c_n = 1$ d'où l'égalité est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $S_n = c_{n+1}$. Montrons que $S_{n+1} = c_{n+2}$.

$$S_{n+1} = c_{n+1} + h T_n + 2 S_n - T_{n+1}$$

$$= c_{n+1} + \frac{hn}{2} S_n + 2 S_n - \frac{n+1}{2} S_{n+1}$$

$$S_{n+1} = c_{n+1} + \frac{hn}{2} c_{n+1} + 2 c_{n+1} - \frac{n+1}{2} S_{n+1}$$

$$S_{n+1} = c_{n+1} \left(1 + \frac{hn}{2} + 2 \right) - \frac{n+1}{2} S_{n+1}$$

$$S_{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{2} \right) = c_{n+1} \left(3 + \frac{hn}{2} \right)$$

$$S_{n+1} = c_{n+1} \left(\frac{3+hn}{2} \right) \left(\frac{2}{n+3} \right)$$

$$S_{n+1} = c_{n+1} \left(\frac{2(2(n+1)+1)}{n+3} \right) = c_{n+2} \text{ d'après 3)}$$

L'égalité est héréditaire d'où la récurrence est établie et $\forall n \in \mathbb{N}$

$S_n = c_{n+1}$

Copie anonyme - n°anonymat : 589784

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques SEMKYN

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8/a) Soit $x \in [0, \frac{1}{4}]$.

$$\forall n \geq 0 \quad c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

$$c_n x^n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge d'après les séries de Riemann car $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ et de séries à termes positifs.

$\frac{3}{2} > 1$ d'où par comparaison $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

Soit $x \in]-\frac{1}{4}, 0[$. on procède de même en étudiant l'absolue convergence

de la série elle-même. On a donc une série de Riemann que $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

d'où $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\quad \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

8/b) Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} (f(x))^2$$

$$\begin{aligned} \text{or } \left(\sum_{i=0}^N c_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j \right) &= \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{i+j=n} c_i c_j \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{2N} c_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{2N+1} c_n x^{n-1} \quad (n'=n+1) \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

où on pose initialement de la limite $(f(v))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n v^{n-2}$ car cette série converge

d'après 8/a)

c) Soit $x \in [-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}]$.

$$\begin{aligned}(g(v))^2 &= (2v f(v))^2 = 4v^2 (f(v))^2 \\ &= 4v^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n v^{n-2}\end{aligned}$$

Partie B

9/a) On commence par linéariser $\cos^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{d'après la formule d'Euler d'où}$$

$$\cos^2(x) = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^2}{4} = \frac{e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}}{4} = \frac{1}{2} \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{2}{4}$$

$$= \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{or } \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(-2(\pi/2)) = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{10)} \quad \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx$$

On réalise le changement de variable $C^1([-2,2])$ $x = 2 \sin(t)$

$$dx = 2 \cos(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \rightarrow -2 & \quad \sin(t) \rightarrow -1 \quad \text{ie } t \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ \text{de même si } x \rightarrow 2 & \quad \sin(t) \rightarrow 1 \quad \text{ie } t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-4\sin^2(t)} 2 \cos(t) dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4(\cos^2(t))} 2 \cos(t) dt \quad \text{car } 1-\sin^2 t = \cos^2 t$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\text{d'où } \int_{-2}^2 \varphi(u) du = 1.$$

10) φ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

φ est $C^0([-2, 2])$ d'après la définition générale et $C^0(\mathbb{R} \setminus [-2, 2])$

• d'où φ est $C^0(\mathbb{R} \setminus \{ -2, 2 \})$ intérieurement / donc $C^0(\mathbb{R} \setminus \text{fini d'un nombre fini de points})$.

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-2}^2 \varphi(u) du = 1.$$

les 3 points montrent que φ est une densité d'une variable aléatoire réelle

11/a) X admet un moment d'ordre n , $\forall n \in \mathbb{N}$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \varphi(t) dt \text{ converge absolument.}$$

$$\text{ie } \int_{-2}^2 t^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{4-t^2} dt \text{ converge absolument}$$

cette intégrale ne pose pas de problème de convergence donc $E(X^n)$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$

(ce qui est logique car $X(u)$ est fini, X est à valeurs dans $[-2, 2]$!)

$$\text{Par ailleurs, } \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} \varphi(t) dt = 0 \quad \text{car c'est } \int_{-2}^2 t^{2n+1} \varphi(t) dt$$

or φ est paire sur $[-2, 2]$ et t^{2n+1} est impair donc on a que cette intégrale est l'intégrale d'une fonction impaire sur un segment symétrique donc

Copie anonyme - n°anonymat : 589784

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 23	Session : 2022
	Épreuve de : mathématiques		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

elle est nulle et $\underline{E(X^{2n+1}) = 0}$

d'autre part $E(X^{2n}) = \int_{-2}^2 t^{2n} \varphi(t) dt$

$= 2 \int_0^2 t^{2n} \varphi(t) dt$ par parité de la fonction en cosinus

$\underline{E(X^{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx}$

1) a) i) $\underline{\mu_0 = E(X^0) = E(1) = 1}$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$

$\underline{\mu_{n+1} = \int_{-2}^2 \frac{t^{2n+1}}{2\pi} \sqrt{4-t^2} dt}$

$\underline{V_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 t^{2n} \sqrt{4-t^2} dt}$

On réalise une intégration par parties avec
 $u'(t) = t^{2n}$ $v(t) = \sqrt{4-t^2}$
 $u(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ $v'(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}$

$\int_{-2}^2 t^{2n} \sqrt{4-t^2} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \sqrt{4-t^2} \right]_{-2}^2 + \int_{-2}^2 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \times \frac{2t}{2\sqrt{4-t^2}} dt$

$= \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)} \sqrt{4-4} - \frac{(-2)^{2n+1}}{(2n+1)} \sqrt{4-4} + \int_{-2}^2 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \frac{2t}{2\sqrt{4-t^2}} dt$

27/24

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^1 \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

N'oubliez pas avec la chose d'IPP...

Pontie C

12/a) fonction $T = \text{simule}(p)$

$a = \text{rand}()$ if $\text{rand} \leq p$

12/b) Le script affiche la valeur que prend en moyenne T en différents essais

13) Si on a atteint le pile que le face ~~sur tout d'un~~ plus 10 malhe
et pour d'un, $P(T=2n+1) = 0$.

