



P3-00016

179760

Maths S

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 22

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I.

Section A

1. $\#B(e, n+1) = n+1$ et $\dim(E) = n$
donc $\#B(e, n+1) > \dim(E)$

ainsi $B(e, n+1)$ est liée

2. Si $B(e, k)$ est libre alors $\#B(e, k) \leq n$
soit $k \leq n$.

donc $\{k \in \mathbb{N}^* \mid B(e, k) \text{ est libre}\}$ est majoré et le majorant est atteint
donc $\max \{k \in \mathbb{N}^* \mid B(e, k) \text{ est libre}\}$ existe.

3. $B(e, d(e))$ est libre

soit $(e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e))$ est libre
et $(e, \dots, u^{d(e)}(e))$ est liée
car $(e, \dots, u^{d(e)}(e)) = B(e, d(e)+1)$

ainsi $\exists a_0, \dots, a_{d(e)-1} \in K_1$
$$u^{d(e)}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e) \quad (*)$$

ainsi $\forall k \geq d(e), u^k(e) = u^{k-d(e)}(u^{d(e)}(e))$

avec $u^{d(e)}(e) \in \text{Vect}(B(e, d(e)))$

donc $u^{d(e)+1}(e) \in \text{Vect}(B(e, d(e)+1) \cap \text{Vect}(B(e, d(e))))$

d'où, de proche en proche, $u^{k-d(e)}(u^{d(e)}(e)) \in \text{Vect}(B(e, d(e)))$
soit $u^k(e) \in \text{Vect}(B(e, d(e)))$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(e) \in \text{Vect}(B(e, d(e)))$

* voir page (3) sup.

(c) Soit $x \in E_u(e)$

$$\exists a_0, \dots, a_{d(e)}, \quad x = \sum_{i=0}^{d(e)} a_i u^i(e)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } u(x) &= \sum_{i=0}^{d(e)} a_i u^{i+1}(e) \\ &= \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^{i+1}(e) + a_{d(e)} u^{d(e)+1}(e) \end{aligned}$$

avec $d(e)+1 \geq k$ donc d'après (3)
 $u^{d(e)+1}(e)$ est une combinaison
 linéaire de $(e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e))$

$$\text{et } \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^{i+1}(e) \in \text{Vect}(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$$

$$\text{car } d(e) \geq k \quad \text{donc } a_{d(e)-1} u^{d(e)} \in \text{Vect}(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$$

$$\text{si } u(x) \in \text{Vect}(e, \dots, u^{d(e)-1}(e)) = E_u(e)$$

d'où $\boxed{E_u(e) \text{ stable par } u}$

Soit E un tel Ser de F .

alors $u(e) \in E$ (stabilité de E par u)

$$u^2(e) = u(u(e)) \in E$$

$\vdots$

$$u^{d(e)-1}(e) \in E$$

Donc par stabilité par combinaisons linéaires de E
 $\text{Vect}(e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e)) \in E$ si $\boxed{E_u(e) \subset E}$.

- (5) e est un vecteur non nul de E et seulement si
- si $u(e) \in \text{Vect}(e)$
 - si $\exists a \in K, u(e) = ae$ ou $u(e) = 0$
 - si $(e, u(e))$ est liée ou $K \subset \ker(u)$
 - si $|d(e)| \leq 1$

q(3).

- * et réciproquement $B(e, d(e)) \in E_u(e)$ car $d(e) \in E$
 d'où $|E_u(e) = \text{Vect}(B(e, d(e)))|$ donc $d(e) \neq 0$
 de plus $B(e, d(e))$ est libre donc $B(e, d(e))$ est
 une base de $E_u(e)$.

(6) Soit e un vecteur non nul de E
 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

u est une homothétie si $\exists \lambda \in K$
 $\forall x \in E, u(x) = \lambda x$

si $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists \lambda \in K^*, u(x) = \lambda x$

si $(u(e), e)$ est liée

si $\exists (e, u(e))$ est liée

si $|d(e)| = 1$ car $d(e) \in K^*$.

7.

on suppose

qu'il existe $e \in E \setminus \{0\}$ tel que $d(e) = n$

alors $\# B(e, d(e)) = n$

et $B(e, d(e))$ est libre

donc $B(e, d(e))$ est une base de E

et $B(e, d(e))$ est aussi une base de $E_u(e)$

ii $E_u(e) = E$.

iii u est cyclique.

Réciproquement, on suppose que u est cyclique
alors : $\exists e \in E, E = E_u(e)$.

et $E_u(e) = \text{Vect}(B(e, d(e)))$

donc nécessairement

$\# B(e, d(e)) = n$

ii $d(e) = n$

d' où

u est un endomorphisme cyclique ssi
 $\exists e \in E \setminus \{0\}, d(e) = n$.

SB.

8) On calcule

$$u(e) = 1 \times u(e)$$

$$u(u^{(d(e)-1)}e) = u^{(d(e))}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

$$\text{d' où } \text{Mat}_{B(e,n)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

avec $n = 1 \in \mathbb{N}$ car $n = d(e) \in \mathbb{N}^*$

d' où A est une matrice de Frobenius.

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Emplacement
Q1 Code

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

③. On calcule

$$(P_A(u))(e) = u^n(e) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(e)$$

$$\boxed{= 0E}$$

$$\text{car } u^n(e) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(e) \text{ d'après ③.}$$

$$(P_A(u))(u^k(e)) = u^{n+k}(e) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{i+k}(e)$$

$$= u^k \left(u^n(e) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(e) \right)$$

$$= u^k(0E) \boxed{= 0E}$$

Ainsi $\forall k \in [0, n-1], (P_A(u))(u^k(e)) = 0$

ii, par linéarité de $P_A(u) \in \mathcal{L}(E)$ (car $u \in \mathcal{L}(E)$)

$$\begin{aligned} \forall a_0, \dots, a_{n-1} \in K, & \quad (P_A(u)) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(e) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (P_A(u))(u^i(e)) = 0 \end{aligned}$$

d'où $\text{vect}(e, \dots, u^{n-1}(e)) \subset \ker(P_A(u))$

ii $\text{vect}(B(e, n)) \subset \ker(P_A(u))$

ii $\overline{Eu}(e) \subset \ker(P_A(u))$ ii $\boxed{E \subset \ker(P_A(u))}$

d'où P_A est un polynôme annulateur de u .

Go. On considère la relation linéaire, pour $e \in E$

$$d_0 e + \dots + d_{n-1} u^{n-1}(e) = 0_E$$

d'où par linéarité de $B(e, n)$,

$$d_0 = \dots = d_{n-1} = 0.$$

Ceci étant valable pour tout $e \in E$, on a bien montré

$$d_0 u(e) + \dots + d_{n-1} u^{n-1}(e) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$\Rightarrow d_0 = \dots = d_{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

d'où $\boxed{(u(e), \dots, u^{n-1}(e)) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E)}.$

ii) Supposons par l'absurde (P): " $\exists P_2 \in \mathcal{R}_n[X] \setminus \{0_{\mathcal{R}_n[X]}\}$ tel que $\deg(P_2) < \deg(P_1)$ et $P_2(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ "

d'où $\deg(P_2) \leq n-1$

$$\text{donc } \exists a_0, \dots, a_{n-1}, P_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$$\text{si } P_2(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i$$

$$\text{et } P_2(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i = 0$$

$$\text{si } \forall i \in [0, n-1], a_i = 0$$

d'où (Q).

Q est absurde car on suppose $P_2 \neq 0$

donc P_2 est forcément nul.

Ainsi tout polynôme annulateur de u de degré inférieur à P_1 est nul.

d) ou : P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.

Par soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathcal{S}(u) \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, (P_A(u))(x) = (P_A(\lambda))x = 0$$

$$\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \text{ car } x \neq 0$$

d) ou : λ est racine de P_A si $\lambda \in \mathcal{S}(u)$

Montrons ensuite que $\dim(E_\lambda(u)) = 1$.

Comme $\deg(P) = n$ donc P_A admet au plus n racines réelles distinctes.

Montrons que P admet n racines distinctes.

(3)

Ainsi : u est diagonalisable si et seulement si P_A admet n racines distinctes.

(negative)

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 28	Session : 2022
	Épreuve de : Maths HEC/ESSEC.		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

SC on identifie ici $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(14).

F est symétrique réelle donc diagonalisable
 Il en va de même pour f.

(15) on a tout d'abord

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(f)$$

$$\text{et } \operatorname{rg}(F) = 2 \text{ donc } \dim(E_0(f)) = 1$$

$$\text{si } E_0(f) = \operatorname{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

on se bat ensuite, pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$F x = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_1 \\ -x_2 = \lambda x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1 = 0 & u \\ (1+\lambda)x_2 = 0 & u_2 \\ x_1 - x_2 - (1+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

U nous donne $\lambda = 1$.

on vérifie que $1 \in \mathcal{E}(f)$ en calculant $\operatorname{rg}(F - I)$

avec $\text{rg}(F - I) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

et $c_1 - c_2 + c_3 = 0$

donc $\text{rg}(F - I) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

donc $\dim(E_{-1}(F)) = 1.$

et $E_{-1}(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est
une base de $E_{-1}(f)$

Ainsi 0 et 1 sont valeurs propres

ou $\text{Tr}(F) = -1$

donc nécessairement la dernière valeur propre est -2

on a $\text{rg}(F + 2I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

avec $-\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - c_3 = 0.$

et $c_1 + c_2 + 2c_3 = 0.$

d'où $\text{rg}(F + 2I) = 1$

et $E_{-2}(F) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d'où $(v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(qui est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $E_0(f) \oplus E_{-1}(f) \oplus E_{-2}(f) = \mathbb{R}^3$
car f est diagonalisable.

66

$$V = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(17).

$P = X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.

(18). (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que V_1, V_2, V_3 sont des vecteurs propres de

$$g \quad gV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V_1 \quad gV_2 = 0$$

$$\text{et } gV_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_3$$

et on le réévalue.

80.

19.

80. P admet une racine complexe de multiplicité strictement supérieure à 1
Si $\exists a \in \mathbb{C}$, $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

61)

function b = racSimple(c)

b =
end function

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(22). Alors $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(a_k)$ et $P(a_{k+1})$ sont de signes différents

$$\text{ie } \exists y_k \in]a_k; a_{k+1}[, P(y_k) = 0.$$

Il y a n intervalles de la forme $]a_k; a_{k+1}[$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

d'où

$$\exists y_1, \dots, y_n \quad P(y_1) = \dots = P(y_n)$$

ie P admet n racines

comme $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $y_k \in]a_k; a_{k+1}[$

et $a_1 < \dots < a_{n+1}$

les y_k sont deux à deux distincts

d'où le résultat.

(23). On distingue deux cas

• si $|z| \leq 1$

$$\text{alors } |z| \leq \max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right)$$

puisque $|z| \leq 1$.

• si $|z| > 1$

On a alors $P(z) = 0$

$$\text{ie } z^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

$$\text{ie } |z^n| = |z|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|$$

$$\text{ie } |z|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\begin{aligned} \text{ie } |z|^n &\leq |a_0| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| |z|^k \\ &\leq |a_0| |z| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| |z|^{k+1} \quad \text{car } |z| > 1 \end{aligned}$$

on divise alors par $|z| > 1$

$$\begin{aligned} \text{ie } |z|^{n-1} &\leq |a_0| + |a_1| + \sum_{k=2}^{n-1} |a_k| |z|^k \\ &\leq |a_0| |z| + |a_1| |z| + \sum_{k=2}^{n-1} |a_k| |z|^{k+1} \end{aligned}$$

on recommence en multipliant à droite par $|z|$ puis en divisant toute l'inégalité encore $n-2$ fois pour obtenir

$$\boxed{|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}$$

Ainsi, dans tous les cas : $\boxed{|z| \leq \max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right)}$

(24) fonction val = racSimAffix(c, pas)
 for k = 1 : m
 if (m-pas/a)^m - sum

val =
 endfunction

Q5.

Partie II.

SA.

Q6). Le egr diagonalisable donc il existe une base de E formée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
On note $(e_1, \dots, e_p)$ une telle base.

Ainsi $\forall x \in E, \exists! (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$,
$$x = \sum_{i=1}^p a_i e_i$$

or $(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{id}_E)(x)$

$$= \sum_{i=1}^p \left(\prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \text{id}_E) \right) \underbrace{(u - \lambda_i \text{id}_E)(a_i e_i)}_{= 0_E}$$

d'où $(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{id}_E)(x) = 0_E$

$$\text{soit } \boxed{(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

(27) Soit $e \in E$.

On considère la relation linéaire
 $\alpha_0 e + \dots + \alpha_p e^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(28) Si u est cyclique, $\boxed{p = n}$ d'après (7).

(29)

$$\mathcal{B}(e, n) = (u^k(e))_{k \in \{0, n-1\}}$$

$$= (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$$

$$= (e, \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \dots, \sum_{i=1}^m \lambda_i^{n-1} e_i).$$

En considérant la relation linéaire :

$$\alpha_0 e + \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \right) + \dots + \alpha_{n-1} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^{n-1} e_i \right) = 0$$

et vient par liberté de $(e_1, \dots, e_m)$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_m + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_m^{n-1} = 0. \end{cases}$$

si $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$, de degré $n-1$, admet n racines
distinctes, donc est nul si $\forall k \in \{0, n-1\}$, $\alpha_k = 0$.
d'où $\boxed{\mathcal{B}(e, n) \text{ est libre}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 98

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques / ESSE C.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(30). On considère, en identifiant σ_3 , $(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{on a } u_2(v_1) &= g(v_1) + \alpha f(v_1) \\ &= 2v_1 - 2\alpha v_1 \\ &= 2(1-\alpha)v_1 \end{aligned}$$

$$u_2(v_2) = 0$$

$$\begin{aligned} u_2(v_3) &= 2v_3 + \alpha v_3 \\ &= (2+\alpha)v_3. \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathcal{B}(u_2) = \{ 2(1-\alpha); 0; 2+\alpha \}.$$

d'où : u_2 diagonalisable.

88.

Ex. On considère la relation linéaire

$$d_0 e + \dots + d_{r-1} u^{r-1}(e) = 0. \quad (*)$$

On compose (*) par u^{r-1} , il vient

$$d_0 u^{r-1}(e) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } d_0 = 0$$

$$\text{car } \forall k \geq 1$$

$$r-1+k \geq r.$$

(e) devient alors

$$d_1 u(e) + \dots + d_{r-1} u^{r-1}(e) = 0.$$

on compose alors (*) par u^{r-2} , il vient

$$d_1 u^{r-1}(e) = 0$$

$$\text{d'où } d_1 = 0$$

etc.

on trouve bien $d_0 = \dots = d_{r-1} = 0$.

$(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e))$ est bien libre.

$(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e))$ est libre dans un espace de dimension n ainsi

$$\# (e, u(e), \dots, u^{r-1}(e)) \leq n$$

$$\text{si } \boxed{r \leq n.}$$

$r = n$ si $(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est une base de E

$$\text{si } Eu(e) = \text{vect}(B(e, n)) = E$$

si $\boxed{u \text{ est cyclique d'après la définition}}$

on a donc

$$\text{Mat}_{B(e, n)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sc.

(33). Soit $P \in E$.

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ où } a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi } P(x+t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x+t)^k.$$

Il s'agit de montrer que
 $\forall k \in [0, n-1] \int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t} dt$ converge,
 $\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt$ sera ensuite convergente par
 linéarité.

$t \mapsto (x+t)^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$$|(x+t)^k e^{-t}| = |x+t|^k e^{-t}$$

$$\sim t^k e^{-t} \text{ car } \frac{x}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{et } t^{k+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } t^k e^{-t} = o(1/t^2)$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} t^{-2} dt \text{ et donc } \int_1^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ converge}$$

$$\text{ici } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ converge}$$

par critère d'équivalence, $\int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t} dt$ converge absolument donc converge.

Par linéarité, $\boxed{\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt \text{ converge}}$

Il s'agit de montrer ici aussi que $\int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t} dt \in E$.

⊗ $\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt$ appartient à E d'après la propriété stable par combinaisons linéaires

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t} dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i t^{k-i} \right) e^{-t} dt \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i \int_0^{+\infty} t^{k-i} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

$$\in \text{Vect}(1, \dots, x^k)$$

$$\text{d'où } \forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t} dt \in E.$$

et ainsi, par stabilité par combinaisons linéaires de E

$$\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt \in E.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

34

Soit $P_1, P_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R} \quad u(\alpha P_1 + \beta P_2) &= \int_0^{+\infty} (\alpha P_1 + \beta P_2)(x+t) e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \alpha P_1(x+t) e^{-t} dt + \beta \int_0^{+\infty} P_2(x+t) e^{-t} dt \\
 &\quad \text{(linéarité de l'évaluation)} \\
 &= \alpha \int_0^{+\infty} P_1(x+t) e^{-t} dt \\
 &\quad + \beta \int_0^{+\infty} P_2(x+t) e^{-t} dt \\
 &\quad \text{(linéarité des intégrales convergentes d'après les questions précédentes.)} \\
 &= \alpha u(P_1)(x) + \beta u(P_2)(x)
 \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout x de $\mathbb{R}$, on a bien montré

$$u(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha u(P_1) + \beta u(P_2).$$

De plus, $u(P)(x) \in E$ d'après (33)

$$d'où \quad \boxed{u \in \mathcal{L}(E)}$$

35. Soit $P \in E$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt$$

On pose pour $A > 0$ $u(t) = P(x+t) \rightarrow u'(t) = P'(x+t)$
 $v(t) = e^{-t} \leftarrow v'(t) = -e^{-t}$

où u et v sont ^{de classe} C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (polynôme et exponentielle)

une IPP donne

$$\begin{aligned} \int_0^A P(x+t)e^{-t} dt &= \left[-P(x+t)e^{-t} \right]_0^A + \int_0^A P'(x+t)e^{-t} dt \\ &= P(x+A)e^{-A} - P(x) + \int_0^A P'(x+t)e^{-t} dt \end{aligned}$$

avec $P(x+A)e^{-A} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance

comparées

car $(x+A)^k e^{-A} \sim A^k e^{-A} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0$ (c.c.)
 pour tout $k \in [0, n-1]$

$$\text{d'où } \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt = \boxed{P(x) + u(P')(x)}$$

36. Soit $P \in E$.

on montre de même que

$$u(P')(x) = P'(x) + u(P'')(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{puis } u(P'')(x) = P''(x) + u(P''')(x) \\ \text{etc. ...}$$

jusqu'à $u(p^{(n-1)})(\alpha) = p^{(n-1)}(\alpha) + \underbrace{u(p^{(n)})(\alpha)}_{=0}$
 car $p^{(n)} = 0$
 car $\deg(p) \leq n-1$.

il s'ensuit
$$u(p) = \sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)}.$$

(37)

On pose $s = x + t$ (quand $t=0$, $s=x$)

et $t = s - x$ et $-t = -s + x$.

Le changement de variable est effectué donc facile et il vient

$$\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt = \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s+x} ds$$

$$= e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds$$

(38). $s \mapsto P(s)e^{-s}$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier (produit de fonctions continues)

donc $s \mapsto P(s)e^{-s}$ admet une primitive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ notée G .

G admet une limite finie L en $+\infty$ car $u(p)(x)$ converge
 et on a $\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s} ds = L - G(x)$

Ainsi $\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s} ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Comme $\exp$ est dérivable, $u(p)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

il vient, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (u(p))'(x) &= e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds \\ &= e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds - e^x P(x) e^{-x} \\ &= u(p)(x) - P(x) \end{aligned}$$

ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{u(P)' = u(P) - P}$$

ou d'après (35) $u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$

donc
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$u(P)'(x) = P(x) + u(P')(x) - P(x)$$

$$= u(P')(x)$$

ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{(u(P))' = u(P').}$$

(39). Im calcul

$$u(x^k)(x) =$$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de : Maths HEC 1ES8EC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III.

SA.

Q9 On suppose que u est une homothétie.

(43)

φ n'est pas une homothétie.

Ainsi d'après (b), par contraposée, il vient

$$\boxed{\exists e \in E \setminus \{0\}, d(e) \neq 1.}$$

(44). Si $d = n$ i.e. $d(e) = n$ alors $B(e, d)$ est une base de E donc φ est cyclique.
or $F_1 = E_0(e) = E$.

Ainsi $\varphi|_{F_1} = \varphi$ est bien cyclique et la propriété est bien vérifiée.

(45). Soit $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in K$.

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=0}^n (\alpha x_k + \beta y_k) e_k$$

$$= \sum_{k=0}^n (\alpha x_k + \beta y_k) e_k$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^n x_k e_k + \beta \sum_{k=0}^n y_k e_k$$

(les coordonnées de $\alpha x + \beta y$ selon les e_k sont bien la somme des coordonnées de αx et βy selon e_k)

$\boxed{\text{d'où } \varphi \text{ est linéaire}}$ et φ est à valeurs dans K .

De plus

$$\varphi(e_{d-1}) = 1 \neq 0$$

$$\text{d'où } \boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E, K)^*}$$

④6

ϕ est linéaire par linéarité de u^k , pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$
fin par linéarité de φ d'après la question
précédente.

④7.

On calcule

$$\phi(e_d) = (\varphi(u^{d-1}(e)), \dots, \varphi(e))$$

$$= (\varphi(e_{d-1}), \dots, \varphi(e))$$

$$= (1, \dots, 1)$$

$$\text{et } \phi(e_1) = \phi(u(e))$$

$$= (\varphi(u^d(e)), \dots, \varphi(u(e)))$$

63.

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(F_k) \in \text{vect}(F_k).$

$\text{Mat}_B(u)$ est triangulaire supérieure, plus précisément

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} (A_1) & & \\ & (A_2) & \\ & & \ddots \\ & (0) & \dots & (A_p) \end{pmatrix}$$

où $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$A_k = \text{Mat}_{B_{F_k}}(u|_{F_k})$

64.