

Maths E
960004
E9-00159



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 25

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3.

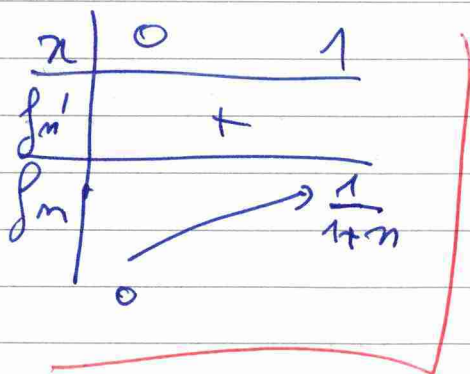
$$1) \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f_m(x) = \frac{x}{x+m}$$

• f_m est $\mathcal{C}_1$ sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions de référence dont le dénominateur ne s'annule jamais.

$$\forall x \in [0, 1], f'_m(x) = \frac{x+m-x}{(x+m)^2} = \frac{m}{(x+m)^2} > 0$$

comme quotient de réels positifs.

$\Rightarrow f_m$ est strictement croissante sur $[0, 1]$



$$f_m(0) = \frac{0}{0+m} = 0$$

$$f_m(1) = \frac{1}{1+m}$$

$$2) \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

on sait que puisque $\frac{1}{1+m} \leq 1$ car $m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq f_m(x) \leq 1$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

$$\Rightarrow m \leq x+m \leq 1+m$$

$$\Rightarrow m \leq m(x+m) \leq m(1+m) \quad \text{car } m \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m(x+m)} \geq \frac{1}{m(1+m)} \quad \text{par stricte décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}^+,$$

$$\Rightarrow \frac{x}{m} \geq \frac{x}{m(x+m)} \geq 0 \quad \text{car } x \geq 0$$

Les fonctions intégrées sont continues sur $[0, 1]$
et $0 \leq 1$, par croissance et positivité de l'intégrale
on a
"

$$\geq 0$$

Puisque f_m est continue et strictement croissante
sur $[0, 1]$

$$\text{on peut écrire } 0 \leq f_m(x) \leq \frac{1}{m+1}, \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{x+m} \leq \frac{1}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{m(x+m)} \leq \frac{1}{m(m+1)}, m \in \mathbb{N}^*$$

Les fonctions intégrées sont continues, $0 \leq 1$,
par croissance et positivité de l'intégrale on a

$$0 \leq U_m \leq \int_0^1 \frac{1}{m(m+1)} dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} (1-0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, 0 \leq U_m \leq \frac{1}{m(m+1)}$$

$$3) \quad \frac{1}{m(m+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{m^2}$$

or $\sum \frac{1}{m^2}$ converge d'après le cours

Donc $\sum U_m$ est de même nature que $\sum \frac{1}{m^2}$ par théorème de comparaison par les séries à termes strictement positifs.

$$4) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

a) la série de terme général U_m est convergente.

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m U_k = \ell$$

$$4b) \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{m+1 - m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$4c) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

$$S_{m+1} - S_m = \sum_{k=1}^{m+1} U_k - \sum_{k=1}^m U_k \quad (\text{téléscopage})$$

$$= U_{m+1} \geq 0 \quad \text{car } \forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq U_m$$

Donc $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante

Code épreuve : 238

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5a) $\forall n \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{x}{k(n+k)} &= \frac{a}{k} - \frac{b}{n+k} = \frac{a(n+k) - bk}{k(n+k)} \\ &= \frac{an + ak - bk}{k(n+k)} = \frac{an + k(a-b)}{k(n+k)} \end{aligned}$$

Par identification on pose le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$a=1$, $b=1$

Donc $\frac{x}{k(n+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}$

~~Soit~~ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $U_k = \int_0^1 \frac{x}{k(n+k)} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} dx$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$= \frac{1}{h} (1-0) - \int_0^1 \frac{1}{n+h} dn$$

$$= \frac{1}{h} - \left[\ln(n+h) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{h} - [\ln(h+1) - \ln(h)]$$

$$\boxed{-\frac{1}{h} - \ln(h+1) + \ln(h) = U_h}$$

6) b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

Par linéarité de la Σ

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j) \quad (\text{telescoping})$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(n+1) \quad \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = \end{array} \right.$$

$$\boxed{= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = S_n}$$

6) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ln(n) \leq \ln(n+1)$ par la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 $\Rightarrow -\ln(n) \geq -\ln(n+1)$

yl vient plus que:

$$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m+1) \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m)$$

$$b) a) T_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m)$$

$$\begin{aligned} \text{or } S_m &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln\left(m\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln(m) - \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}_{\substack{>0 \\ +\infty}} \end{aligned}$$

Donc puisque $S_m \xrightarrow{+\infty} \gamma$

yl vient que $T_m \xrightarrow{+\infty} \gamma$

$$b) \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [m, m+1]$$

$$m \leq x \leq m+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{m+1} \quad \text{par stricte décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}^+$$

des fonctions intégrées sont continues, $m < m+1$,
par croissance de l'intégrale on a:

$$\int_m^{m+1} \frac{1}{m} dx, \int_m^{m+1} \frac{1}{x} dx \geq \int_m^{m+1} \frac{1}{m+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}(m+1-m) \geq [\ln(x)]_m^{m+1} \geq \frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} \geq \ln(m+1) - \ln(m) \geq \frac{1}{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$6c) \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n+1) - \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \frac{1}{n}$$

$$6b) \forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1} - T_n = \sum_{k=n}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)$$

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$$

Des $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \leq 0$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 Or T_n et S_n , sur deux suite de monotonie opposée de même limite α , il s'agit de suites adjacentes, d'après le cours: $S_n \leq \alpha \leq T_n$
 7a).

```
7b) n = 1
s = 1 - log(2)
while log(n+1) - log(n) > 101(-3)
    n = n + 1
    s = s + 1/n - log(n+1)
end
disp(s)
```

$$T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2)

1) $p = \text{input}('entrez la valeur de p das [0, 1[:')$
 $m = \text{input}('entrez la valeur de m :')$
 $x = 0$
 $\text{while } x \leq m \text{ \& } \text{rand()} \leq p$
 $x = x + 1$
 end
 $\text{disp}(x, 'est le niveau du joueur')$

2) a) x peut prendre la valeur 0 s'il échoue le niveau 1
 x peut prendre la valeur m s'il réussit les m niveaux
 x peut prendre toute les valeurs de $[1, m-1]$ si le joueur réussit échoue à un niveau compris dans cet intervalle.

$$\text{Donc } X_m(\Omega) = [0, m]$$

2b) $(X_m = 0)$ si le joueur échoue le niveau 1.

$$\text{Donc } P(X_m = 0) = 1 - p = q$$

$$2c) (X_m = m) = \bigcap_{k=1}^m R_k$$

passage aux probabilités

$$P(X_m = m) = P\left(\bigcap_{k=1}^m R_k\right) = P(R_1 \cap \dots \cap R_m)$$

$$= P(R_1) P(R_2) \dots P(R_m)$$

$$= p \dots p \dots p$$

$$= p^m = P(X_m = m)$$

$$2d) \forall h \in [1; m-1] \quad (X_m = h) = \left(\bigcap_{i=1}^h R_i \right) \cap \overline{R_{h+1}}$$

il s'agit des h premiers
Niveaux, échoue au k+1.

$$P(X_m = h) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^h R_i\right) \cap \overline{R_{h+1}}\right)$$

$$= P(R_1) P(R_2) \dots P(R_h) P(\overline{R_{h+1}})$$

$$= p \dots p \cdot (1-p)$$

$$= p^h q = P(X_m = h)$$

Est-elle vraie pour $h=0$.

$$P(X_m = 0) = p^0 q = q \quad \text{C'est donc encore vraie pour } h=0.$$

$$\forall h \in [0; m-1], P(X_m = h) = p^h q$$

$$\begin{aligned}
 3) \sum_{k=0}^m P(X_m=k) &= \sum_{k=0}^{m-1} P(X_m=k) + p^m \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} p^k q + p^m \quad (\text{somme géométrique}) \\
 &= q \sum_{k=0}^{m-1} p^k + p^m \\
 &= \cancel{(1-p)} \frac{1-p^m}{\cancel{(1-p)}} + p^m \\
 &= 1 - p^m + p^m = 1 = \sum_{k=0}^m P(X_m=k)
 \end{aligned}$$

4a) $X_m(\Omega)$ est finie donc X_m admet une espérance d'après le cours.

$$\begin{aligned}
 E(X_m) &= \sum_{k=0}^m k P(X_m=k) \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} k (p^k q) + m p^m
 \end{aligned}$$

$$4b) E(X_m) = \left(\sum_{k=0}^m k p^k \right) + m p^m$$

on sait que $m p^m$ peut s'écrire de la forme:

$$m e^{m \ln(p)} \quad \text{or} \quad m \ln(p) \xrightarrow{+\infty} -\infty$$

on a alors par croissance comparée $m e^x \xrightarrow{+\infty} 0$

$$\text{où } x = m \ln(p)$$

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} E(X_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} q \sum_{k=1}^m k p^k$$

$$pq \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1}$$

↪ série géométrique convergente
de raison $|p| < 1$.

$$= pq \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{pq}{(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{p}{q}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n > k+1$
Le nombre de jeu est supérieur ou égal à $k+1$.

Donc $P(X_n = k) = p^k q$ la formule reste valable.

S b) $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $P(X_n = k) = p^k q \xrightarrow{+ \infty} p^k q$.

Donc $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} X$ où $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = p^k q$

S c) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y = k) = P(X+1 = k) = P(X = k-1) = p^{k-1} q$$

$$Y \hookrightarrow g(q)$$

Donc $E(Y) = \frac{1}{q}$

$$E(X+1) = \frac{1}{q}$$

par linéarité de l'espérance.

$$E(X) + 1 = \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{q} - 1 \Rightarrow E(X) = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q} = E(X)$$

Code épreuve : 28

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{p}{q}$$

Exercice 1)

1) φ est-elle linéaire ?

Soit M et $N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on

$$\varphi(M + \lambda N) = \varphi(M) + \lambda \varphi(N) ?$$

$$\begin{aligned} \varphi(M + \lambda N) &= J(M + \lambda N) - (M + \lambda N)J, \text{ par règle de calcul élémentaire} \\ &= JM + \lambda JN - MJ - \lambda NJ \\ &= JM - MJ + \lambda(JN - NJ) \\ &= \varphi(M) + \lambda \varphi(N) \end{aligned}$$

φ est linéaire.

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ $\varphi(M) = JM - MJ \in M_2(\mathbb{R})$

comme opération
élémentaire
sur les matrices
2x2.

Donc $\varphi(M) \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$

$$2) a) \cdot \mathcal{Q}(k_1) = \mathcal{J} k_1 - k_1 \mathcal{J}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{k_3 - k_2}$$

$$\cdot \mathcal{Q}(k_2) = \mathcal{J} k_2 - k_2 \mathcal{J}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-k_1 + k_4}$$

$$\cdot \mathcal{Q}(k_3) = \mathcal{J} k_3 - k_3 \mathcal{J}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{k_1 - k_4}$$

$$\cdot \mathcal{Q}(k_4) = \mathcal{J} k_4 - k_4 \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{k_2 - k_3}$$

2b)

$$A = \text{mat}_{k_1 k_2 k_3 k_4}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{matrix}$$

$\mathcal{C}(k_1) \quad \mathcal{C}(k_2) \quad \mathcal{C}(k_3) \quad \mathcal{C}(k_4)$

on reporte $\mathcal{C}(k_i) : i \in \{1, 4\}$ dans la matrice avec la décomposition des vecteurs dans la base canonique.

2c) on remarque que A est symétrique réelle
 Par le théorème spectral assure que $\mathcal{C}$ est diagonalisable.

3a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$L_1 \leftrightarrow L_3$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_4 + L_3$

$$E1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$$

$$= \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{C_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_4} \right)$$

• C_1 et C_4 sont colinéaires ($C_1 = -C_4$)
 • C_2 et C_3 aussi.

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

cette famille de vecteurs génère $\text{Im}(A)$
 Vérifions qu'elle est libre.

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

$$0 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{par identification}$$

$$\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0$$

Donc c'est une base de $\text{Im}(A)$

$$\text{Donc } \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2b) Par Théorème du Rang :

$$\text{car } \dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$$

$$\dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$$

$$\Rightarrow 4 = \dim \ker(\varphi) + 2$$

$$\Rightarrow 2 = \dim(\ker(\varphi))$$

$$\bullet \varphi(I) = I \cdot I - I \cdot I = I - I = 0, \quad I \in \ker(\varphi)$$

$$\bullet \varphi(J) = J \cdot J - J \cdot J = J^2 - J^2 = 0, \quad J \in \ker(\varphi)$$

I, J génère $\ker(\varphi)$

Montrons que cette famille est libre.

c'est le cas car $\lambda I \neq I$ ou λ est un réel

$$\text{Donc } \ker(\varphi) = \text{Vect}(I, J)$$

$$4a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -2-2 & 0 & 0 & 4 \\ 2+2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4A$$

on remarque

$$A^3 = 4A \quad (\Rightarrow) \quad A^3 - 4A = 0_{M_4(\mathbb{R})}$$

4b) on pose un polynôme annulateur de A

$$P(X) = X^3 - 4X$$

$$P(X) = 0 \quad \leftarrow \text{on résout}$$

$$(\Rightarrow) X^3 - 4X = 0 \quad (\Rightarrow) X(X^2 - 4) = 0$$

$$, \quad \boxed{X=0} \text{ ou } X^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{4} \text{ ou } x = \sqrt{4}$$

$$= -2$$

$$= 2$$

Donc $\delta = \{0, -2, 2\}$ (les solutions de l'équation)

D'après le cours, les valeurs propres possibles de $\mathcal{C}$ sont donc $(-2), (0), (2)$

"car le spectre est inclus dans les racines du polynôme annulateur"

S/ • si $r_1 = 3$ alors $\dim E_2(A) = 1$ par théorie du rang

• si $r_2 = 3$ alors $\dim E_{-2}(A) = 1$ par théorie du rang

Ainsi $2 \in \text{sp}(A)$, $-2 \in \text{sp}(A)$

6a). $AX = 2X$ revient à trouver le ~~la~~ vecteur propre associé à 2.

Donc $E_2(A) = \ker(A - 2I_n)$ $v \in \ker(A - 2I_n)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -4y + y - z + 2t = 0 \Leftrightarrow -3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$E_2(A) = \ker(A - 2I_n)$$

$$\cup \ker(A - 2I_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z = 2y \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - (-z) + z = 0 \\ \Rightarrow -2x + 2z = 0 \Rightarrow x = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -z - z - 2t = 0 \\ \Rightarrow -2z - 2t = 0 \\ \Rightarrow z = -t \end{cases}$$

Donc $\boxed{z = z}$ $\boxed{y = -z}$ $\boxed{t = -z}$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $AX = 2X$ a pour unique solution le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$Ax = -2x$ devient à résoudre cherché
 $E_{-2}(A) = \ker(A + 2I_n)$

ou $0 \in \ker(A + 2I_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -z} \\ L2 \times 2 \\ L2 + L3 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - (-z) + z = 0 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \\ -z - z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -z} \\ \Rightarrow -2z + 2t = 0 \Rightarrow \boxed{z = t}$$

$$0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $Ax = -2x$ a pour unique solution $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rg}(A) = 2 \quad \text{Donc} \quad 0 \in \operatorname{sp}(A)$$

$$\text{Donc } \operatorname{sp}(A) = \{-2, 0, 2\}$$

et donc

- $E_0(\mathbb{R}) = \ker(A) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$
- $E_2(\mathbb{R}) = \ker(A - 2I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$
- $E_{-2}(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Problème

Partie I)

$$1) a) \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$F(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \quad \text{car } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0$$

Donc il s'agit d'un produit de fonctions continues sur $[0, 1]$.

Donc puisque on intègre sur un segment fermé une fonction continue, cette intégrale existe bien et est bien définie.

$$1) \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,$$

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

on pose $u(x) = (1-x)^q$ $u'(x) = -q(1-x)^{q-1}$
 $v'(x) = x^p$ $v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$

• on est V sur $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ par intégration par parties (I.R.P) on a:

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \left[\frac{x^p}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} q (1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{q}{p+1} x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale on a:

$$= \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$= \boxed{\frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) = I(p, q)}$$

$$2) a) \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} I(p+q, 0) &= \int_0^1 x^{p+q} (1-x)^0 dx \\ &= \int_0^1 x^{p+q} dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{p+q+1} = I(p+q, 0)}$$

$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d'après le résultat admis...

$$I(p, q) = \frac{p! \cdot q!}{(p+q)!} \cdot \frac{1}{(p+q+1)} = \frac{p! \cdot q!}{(p+q+1)!} = I(p, q)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) \int_0^1 x^p (1-x)^p dx &= I(p, p) = \frac{p! \cdot p!}{(p+p+1)!} \\ &= \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

on remarque que ...

Partie 2)

3) $\forall n \in \mathbb{R}, \ln(n) > 0$

• $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en un nombre fini de points (peut-être...)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x) dx = \int_0^1 \ln(x) dx + 0$$

$$= \int_0^1 \ln(x) x^n (1-x)^n dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n dx, \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx \quad \text{il vient alors que}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1$$

D'après Partie (1) ?

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Maths E éthec

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Du bon est bien une densité de probabilité

4) X_0 a donc d'après l'énoncé b_0 comme densité

$$\text{or : } b_0(x) = \begin{cases} a_0 \cdot x^0 (1-x)^0 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1!}{1!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

densité la uniforme continue $[0,1]$.

$$X_0 \hookrightarrow U_{[0,1]}$$

5 a) X_n admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x) dx$ est absolument convergente.

Sous réserve d'existence, nous

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x) dx = \int_0^1 a_n x^n (1-x)^n dx \quad / \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= a_n \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+1, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n+1)! n!}{(n+1+n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)! n! (n+1) n!}{(n!)^2 (2n+2)!}$$

$$= \frac{\cancel{(2n+1)!} \cancel{(n!)^2} (n+1)}{\cancel{(n!)^2} \cancel{(2n+1)!} (2n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{2n+2} = \frac{n+1}{2(n+1)} = \boxed{\frac{1}{2}} = E(X_n)$$

ce qui prouve directement
son existence par ailleurs.

5b) X_n admet une variance si et seulement si
elle admet un moment d'ordre 2.

Donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \phi_n(x) dx$ converge absolument

lors nous avons l'existence :

$$E(X_n^2) = \int_0^1 x^2 \alpha_n x^n (1-x)^n dx$$

$$= \alpha_n \int_0^1 x^{n+2} (1-x)^n dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \text{de l'intégrale} \end{array} \right\}$$

$$= \alpha_n I(n+2, n)$$

$$= \alpha_n \frac{(n+2)! n!}{(n+2+n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(n+2)! n!}{(2n+3)!}$$

$$= \frac{(2n+1)! (n!)^2 (n+1)(n+2)}{(n!)^2 (2n+1)! (2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)} = \frac{n+2}{4n+6} = \frac{1}{4}$$

Die Varianz der Königs-Hygienz lautet also
 $V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{n+2}{4n+6} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{n+2}{n(4 + \frac{6}{n})} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n(4 + \frac{6}{n})} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{6}{n}} - \frac{1}{4} \xrightarrow{+\infty} 0$$

on a montré que

$$V(X_n) = \frac{1 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{6}{n}} - \frac{1}{4}$$

et on remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0$

6c) Ainsi, puisque X_n admet une variance (elle admet donc aussi une espérance) on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé - Chebyshev

Soit $\varepsilon > 0$.

$$P(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

or puisque il s'agit d'une probabilité :
 $E(X_n) = 1/2$

$$0 \leq P(|X_n - \frac{1}{2}| > \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par l'histoire d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| > \varepsilon) = 0$$

(on remarque que c'est en fait la définition de la convergence en probabilité)

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session :
	Épreuve de : Maths E EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Partie 3).
6) $\forall n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_0(n) &= a_0 \int_0^n t^0 (1-t)^0 dt \\ &= a_0 \int_0^n 1 dt \\ &= \frac{1!}{(0!)^2} [n]_0^n = n - 0 = n \end{aligned}$$

($0! = 1$ par convention)

$\forall n \in \mathbb{R}$, $\underline{f_0(n) = n}$

$$7a) f_n(1) = a_n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt.$$

$$= \int_0^1 a_n t^n (1-t)^n dt = 1 = \underline{f_n(1)}$$

7b) ~~$u = 1-t$~~

$$u = 1 - t,$$

$$f_n(x) = \text{cm} \int_0^x t^n (1-t)^n dt$$

$$u = 1 - t$$

$$\textcircled{1} du = u' dt = -dt \quad \text{changement de var, affine}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & t^n (1-t)^n dt \\ &= -t^n (1-t)^n (-dt) \\ &= -t^n (1-t)^n du \\ &= -t^n (u)^n \\ &= -(1-u)^n (u)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 1 - t \\ t &= 1 - u \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \int x &\rightarrow 1-x \\ 0 &\rightarrow 1-0 = 1 \end{aligned}$$

Par théorème de changement de variable on a alors

$$f_n(x) = \text{cm} \int_1^{1-x} -(1-u)^n u^n du$$

$$= \text{cm} \int_{1-x}^1 u^n (1-u) du.$$

$$= \text{cm} \left(\int_0^{1-x} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{R}, f_n(t) = \alpha n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$$

$$u = 1 - t \quad (\text{changement affine})$$

$$(1) du = -dt$$

$$(2) \begin{aligned} & t^n (1-t)^n dt \\ &= t^n (u)^n dt \\ &= (1-u)^n u^n du \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = 1-t \\ \Rightarrow t = 1-u \end{array} \right.$$

$$(3) \int_0^1 \rightarrow \int_1^0$$

Donc par changement de variable :

$$f_n(t) = \alpha n \left[- \int_1^0 u^n (1-u)^n du \right]$$

$$= \alpha n \left[- \left[\int_0^1 u^n (1-u)^n du - \int_0^1 u^n (1-u)^n du \right] \right]$$

$$= \left[- [f_n(1-n) - 1] \right]$$

Donc $\forall n \in \mathbb{R}$:

$$f_n(t) = (-f_n(1-n) + 1)$$

$$\Leftrightarrow f_n(t) = -f_n(1-n) + 1.$$

$$\Leftrightarrow f_n(t) + f_n(1-n) = 1$$

$$7c). f_n\left(\frac{1}{2}\right) = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

$$\Leftrightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) + f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow 2f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

8a). on note $g(x) = x^n(1-x)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

- g est $\in C^1$ sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives, on note G l'une d'entre elles.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f_n(x) &= \ln[G(x)]_0^1 \\ &= \ln(G(x) - G(0)) \end{aligned}$$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \ln G(x) - \ln G(0)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) &= \ln g'(x) - 0 \\ &= \ln(x^n(1-x)^n) \end{aligned}$$

8b) si n est pair

$$\text{Alors } f_n'(x) = \ln(x^n(1-x)^n) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- si n est impaire alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n (1-x)^n$$

le signe de la dérivée dépend de la quantité $x \mapsto (1-x)^n$

or Pucierp!

$$\dots \text{impair} \quad \dots \text{pair} \quad \dots \text{impair} \quad \dots \text{pair}$$

$$\Rightarrow \text{si } n \text{ est impair, } f_n'(x) < 0 \quad \forall x > 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2082

Épreuve de : Maths E E DHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\& \phi$), si n pair

Alors $f_n'(x) = \alpha n x^n (1-x)^n > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Donc f_n est strictement croissante. si n pair

• si n impair,

$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \alpha n x^n (1-x)^n$.

$x^n > 0$ si $x \in \mathbb{R}^+$

$(1-x) > 0$ si $x \in [0, 1]$.

~~Donc~~ α Ducep:

sur $[0, 1]$ $f_n'(x) > 0$ comme produit de réels positifs

sur $[1, +\infty[$ $\underbrace{\alpha n}_{>0} \underbrace{x^n}_{>0} \underbrace{(1-x)^n}_{<0} < 0$ comme produit de réels.

sur $] -\infty; 0[$ $f_n'(x) = \underbrace{\alpha n}_{>0} \underbrace{x^n}_{<0} \underbrace{(1-x)^n}_{>0} < 0$ comme produit de réels.

g) a) Admettre que f_n est polynomiale.

• si n pair

$$f_n(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$$

$$f_n(x) \xrightarrow{-\infty} -\infty$$

• si n impair

$$f_n(x) \xrightarrow{+\infty} -\infty$$

$$f_n(x) \xrightarrow{-\infty} +\infty$$

g) b)

si n pair

x	$-\infty$	$+\infty$
		$+\infty$
	$-\infty$	

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f_n'	-	0	+	-
f_n		+		$-\infty$

10) a) $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f_n''(x) = 2n \left[n x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x) \right]$$

10 b) si n impair alors le signe de f_n'' dépend de $1-2x$

$$\Leftrightarrow 1-2x > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > x.$$

Puis si n impair, f_n admet un unique point d'inflexion en $\frac{1}{2}$

si n pair alors le signe de f_n'' dépend de $[x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x)]$.

Il y a bien 3 points d'inflexions.

On distingue plusieurs cas selon l'intervalle dans lequel x se trouve :

si $x \geq 0$: $\left[\begin{array}{l} \text{si } x \in [0, 1/2] \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} x^{n-1} > 0 \\ (1-x) > 0 \\ (1-2x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^{n-1} (1-x) (1-2x) > 0$$

• si $x > 1/2$, $\left[\begin{array}{l} x^{n-1} > 0 \\ (1-x) > 0 \\ (1-2x) < 0 \end{array} \right] \Rightarrow x^{n-1} (1-x) (1-2x) < 0$

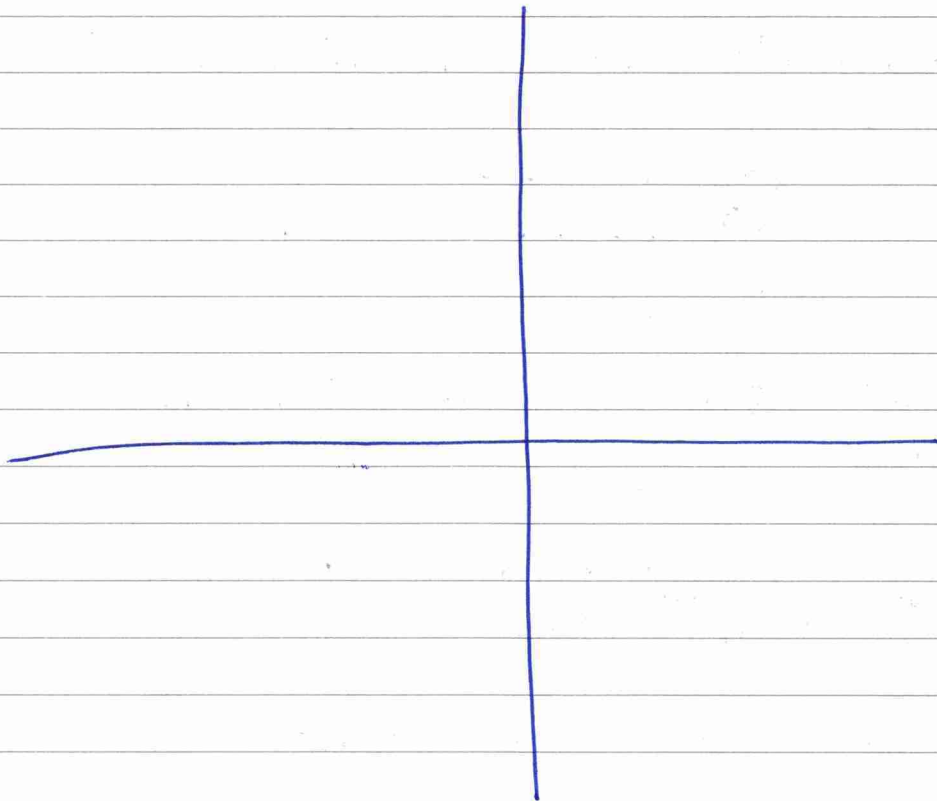
• si $x < 1$, $\left[\begin{array}{l} x^{n-1} > 0 \\ (1-x)^{n-1} > 0 \\ (1-2x) < 0 \end{array} \right] \Rightarrow x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x) > 0$

ensuite si $x < 0$, $\left[\begin{array}{l} x^{n-1} > 0 \\ (1-x)^{n-1} > 0 \\ (1-2x) > 0 \end{array} \right] \Rightarrow x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x) > 0$

car $n-1$ est pair car n est impair.

Puis il y a bien 3 points d'inflexions

10c) si n par



1' n impar

