

Copie anonyme - n°anonymat : 651010



G5-00158

651010

Maths T

Code épreuve : 685

Nombre de pages : 20

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

$$1) A) \quad A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 16 \\ 48 & -32 & 48 \\ 16 & 32 & 16 \end{pmatrix}$$

On cherche λ tel que $A^3 = \lambda A$. Le réel λ est 16 car

$$16A = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 16 \\ 48 & -32 & 48 \\ 16 & 32 & 16 \end{pmatrix} = A^3$$

b)

$$2/a) A^5 = A^3 \times A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 16 \\ 48 & -32 & 48 \\ 16 & 32 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16(8+8) & 32 \times 16 & 16(8+8) \\ 48(8+8) & -32 \times 16 & 48(8+8) \\ 16(8+8) & 32 \times 16 & 16(8+8) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16^2 & 2 \times 16^2 & 16^2 \\ 3 \times 16^2 & -2 \times 16^2 & 3 \times 16^2 \\ 16^2 & 2 \times 16^2 & 16^2 \end{pmatrix}$$

$$= 16^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2 A$$

Ainsi $A^5 = \alpha^2 A$

b) Montrons par récurrence que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a $A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$

Initialisation : $A^{2-1} = A^1 = A$ et $\alpha^{1-1} A = \alpha^0 A = A$
et la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$

$$\begin{aligned} A^{2p+1} &= A^{2p-1} \times A^2 \\ &= \alpha^{p-1} A \times A^2 \\ &= \alpha^{p-1} A^3 \\ &= \alpha^{p-1} \alpha A \\ &= \alpha^p A \end{aligned}$$

et la propriété est héréditaire

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*$,
 $A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$

$$c) \forall p \in \mathbb{N}^*, A^{2p} = A^{2p-1} \times A \\ = A^{2p-1} A \times A \\ = A^{2p-1} A^2$$

3) a) On sait que $16A = A^3$ donc $16A - A^3 = 0_3$

Ainsi $16a - a^3$ est un polynôme annulateur de A .

$$\text{et } 16a - a^3 = a(16 - a^2)$$

On calcule le discriminant de $16 - a^2$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 16 \times (-1) = 64$$

Ainsi $16 - a^2$ a deux racines qui sont $a_1 = \frac{-\sqrt{64}}{-2} = \frac{8}{2} = 4$

$$\text{et } a_2 = \frac{\sqrt{64}}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

De plus 0 est aussi une racine de $a(16 - a^2)$

Ainsi les 3 racines du polynôme sont $-4, 0$ et 4

Par conséquent, trois valeurs propres possibles de A sont $-4, 0$ et 4

$$b) AX = -4X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - 2y + 3z \\ x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ -4z \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x + 2y + z = -4x \\ 3x - 2y + 3z = -4y \\ x + 2y + z = -4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ x - 3x - 3z + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 3z + 2y + 3z = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ y = -3z \\ x = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ainsi } \begin{cases} y = -3z \\ x = z \end{cases}$$

Donc $AX = -4X$ est équivalent à $\begin{cases} y = -3z \\ x = z \end{cases}$; -4 est une valeur propre de A et un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$b) AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - 2y + 3z \\ x + 2y + z \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -x - z \\ 3x + 2 + x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Donc $AX = 0$ est équivalent à $\begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$, une dernière valeur propre possible de A est 0 .

Copie anonyme - n°anonymat : 651010

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, un vecteur propre associé est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$d) A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé et la valeur propre propre de A est 4.

$$e) AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $AP = PD$

$$f) \quad PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_3$$

Ainsi P est inversible et son inverse P^{-1} est $\frac{1}{8}Q$.

g) Il existe P une matrice inversible, P^{-1} son inverse et D une matrice diagonale. On sait que $AP = PD$ donc $A = PDP^{-1}$ et A est diagonalisable.

Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : $A^1 = PD^1P^{-1}$ et la propriété est vraie au rang 1. (cf. question 3)g)

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^+$. Supposons $A^n = PD^nP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= APD^nP^{-1} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PDID^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned} \quad \text{et la propriété est héréditaire}$$

CConclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^m = P D^m P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-4)^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \times \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-4)^m & 0 & 4^m \\ -3 \times (-4)^m & 0 & 4^m \\ (-4)^m & 0 & 4^m \end{pmatrix} \times \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^m = \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 3 \times 4^m + (-4)^m & 2 \times 4^m - 2(-4)^m & 3 \times 4^m + (-4)^m \\ 3 \times 4^m - 3 \times (-4)^m & 2 \times 4^m + 6 \times (-4)^m & 3 \times 4^m - 3 \times (-4)^m \\ 3 \times 4^m + (-4)^m & 2 \times 4^m - 2 \times (-4)^m & 3 \times 4^m + (-4)^m \end{pmatrix}$$

Exercice 2

- 1) f est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 2A; +\infty[$ (constante)
 f est continue sur $[0; A]$ (fraction rationnelle)
 f est continue sur $] A; 2A]$ (fraction rationnelle)

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{A^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow A^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow A^-} \frac{t}{A^2} = \frac{1}{A} \quad \lim_{t \rightarrow A^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow A^+} \frac{2A - t}{t^2} = \frac{1}{A}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2A^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2A^-} \frac{2A - t}{A^2} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 2A^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2A^+} 0 = 0$$

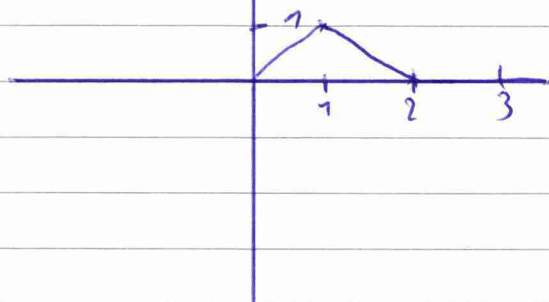
Après, $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 0 \quad f(0) = \frac{0}{A^2} = 0$

$$\lim_{t \rightarrow A^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow A^+} f(t) = f(A) = \frac{1}{A} \quad f(A) = \frac{A}{A^2} = \frac{1}{A}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2A^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2A^+} f(t) = f(2A) = 0 \quad f(2A) = \frac{2A - 2A}{A^2} = 0$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2)



$$3) a) \cdot \int_0^A f(x) dx = \int_0^A \frac{x}{A^2} dx = \frac{1}{A^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^A = \frac{1}{A^2} \times \frac{A^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \int_A^{2A} f(x) dx = \int_A^{2A} \frac{2A-x}{A^2} dx = \int_A^{2A} \frac{2A}{A^2} dx - \int_A^{2A} \frac{x}{A^2}$$

$$= \frac{2}{A} \left[x \right]_A^{2A} - \frac{1}{A^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_A^{2A}$$

$$= \frac{2}{A} (2A - A) - \frac{1}{A^2} \left(2A^2 - \frac{A^2}{2} \right)$$

$$= \frac{2A}{A} - \frac{2A^2}{A^2} + \frac{A^2}{2A^2}$$

$$= 2 - 2 + \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Ainsi } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$b) f \text{ est continue et positive sur } \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

donc f peut être considérée comme une densité de probabilité

Copie anonyme - n°anonymat : 651010

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) a) Pour que X possède une espérance, il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) dt$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \cdot 0 dt + \int_0^A \frac{t^2}{A^2} dt + \int_A^{2A} \frac{t(2A-t)}{A^2} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{A^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^A + \frac{2}{A} \left[\frac{t^2}{2} \right]_A^{2A} - \frac{1}{A^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_A^{2A} + 0$$

$$= \frac{1}{A^2} \times \frac{A^3}{3} + \frac{2}{A} \left(\frac{4A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \right) - \frac{1}{A^2} \left(\frac{8A^3}{3} - \frac{A^3}{3} \right)$$

$$= \frac{A}{3} + 3A + \frac{7A}{3}$$

$$= 3A + \frac{8A}{3}$$

$$= \frac{9A + 8A}{3}$$

$$= \frac{A}{3}$$

Donc $E(X)$ existe et $E(X) = \frac{A}{3}$

Admettons que $E(X) = A$

Pour que $E(x^2)$ existe, il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^A \frac{t^2}{A^2} dt + \int_A^{2A} \frac{t(2A-t)}{A^2} dt$$

$$= \frac{1}{A^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^A + \frac{2}{A^2} \int_A^{2A} (At - t^2) dt$$

$$= \frac{1}{A^2} \times \frac{A^3}{3} + \frac{2}{A^2} \left[\frac{At^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_A^{2A}$$

$$= \frac{A^2}{3} + \frac{2}{A^2} \left(\frac{8A^3}{2} - \frac{A^3}{3} \right) - \frac{1}{A^2} \left(\frac{16A^3}{2} - \frac{A^3}{3} \right)$$

$$= \frac{A^2}{3} + \frac{14A^2}{3} - \frac{15A^2}{3}$$

$$= \frac{14A^2}{3} - \frac{14A^2}{3}$$

$$= \frac{(56 - 42)}{12} \times A^2$$

$$= \frac{14A^2}{12}$$

$$= \frac{7A^2}{6}$$

Donc $E(x^2)$ existe et vaut $\frac{7A^2}{6}$

c) $E(x)$ et $E(x^2)$ existent donc $V(x)$ existe.

D'après la formule de Koenig-Huygens:

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \frac{7A^2}{6} - A^2$$

$$= \frac{7A^2 - 6A^2}{6}$$

$$V(x) = \frac{A^2}{6}$$

$$5) a) E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) \quad (\text{linéarité})$$

$$= \frac{1}{n} \times A n$$

$$\boxed{E(\bar{X}_n) = A}$$

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \quad (\text{indépendance})$$

$$= \frac{1}{n^2} \times \frac{A^2 n}{6}$$

$$\boxed{V(\bar{X}_n) = \frac{A^2}{6n}}$$

$$b) b_A(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n) - A = A - A = 0 \quad \text{Ainsi } \bar{X}_n \text{ est un estimateur sans biais de } A$$

$$\text{et puisque } b_A(\bar{X}_n) = 0, \quad R_A(\bar{X}_n) = V(\bar{X}_n)$$

$$\text{donc } R_A(\bar{X}_n) = \frac{A^2}{6n}$$

6) a) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{donc } P(|\bar{X}_n - A| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

$$b) \text{ Puisque } P(|\bar{X}_n - A| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

$$\text{Alors } P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq A \leq \bar{X}_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

c) le niveau de confiance de cet intervalle est
$$\left[\bar{x}_{1000} - \frac{1}{\sqrt{600}} ; \bar{x}_{1000} + \frac{1}{\sqrt{600}} \right].$$

Copie anonyme - n°anonymat : 651010

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 205

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

- a) La probabilité que la boule tirée soit rouge et porte le numéro 1 est $\boxed{0,2}$ (selon l'énoncé).
- b) La probabilité que cette boule soit dotée du numéro 2 est de $1 - 0,2 = \boxed{0,8}$.
- c) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $\{N^1; N^2\}$:

Notons les événements : N^1 "Avoir une boule dotée du numéro 1" N^2 "Avoir une boule dotée du numéro 2"
 R "Avoir une boule rouge" V "Avoir une boule verte"

$$\begin{aligned} P(R) &= P(N^1) P_{N^1}(R) + P(N^2) P_{N^2}(R) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 \\ &= 0,2 + 0,08 \\ &= 0,28 \end{aligned}$$

Donc $P(R) = \boxed{0,28}$

2) a) La loi de G est :

m	1	2	-1
$P(G=m)$	0,2	0,08	0,72

$$P(V) = 1 - P(R) = 1 - 0,28 = 0,72$$

b) Ainsi $E(G) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,08 - 1 \times 0,72 = 0,36 - 0,72 = \boxed{-0,36}$

$$V(G) = 1^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,08 + (-1)^2 \times 0,72 = 0,2 + 0,32 + 0,72 = \boxed{1,24}$$

3) a) R_m suit une loi binomiale de paramètre 0,28 car elle correspond au nombre de boules rouges tirées.

Donc $R_m \sim B(m; 0,28)$ $E(R_m) = 0,28m$ $V(R_m) = 0,28m \times 0,72$

U_m suit une loi binomiale de paramètre 0,72 car elle correspond au nombre de boules vertes tirées.

Donc $U_m \sim B(m; 0,72)$ $E(U_m) = 0,72m$ $V(U_m) = 0,28m \times 0,72$

U_m suit une loi binomiale de paramètre 0,2 car elle correspond au nombre de boules jaunes tirées.

Donc $U_m \sim B(m; 0,2)$ $E(U_m) = 0,2m$ $V(U_m) = 0,2m \times 0,8$

D_m suit une loi binomiale de paramètre 0,6 car elle correspond au nombre de boules jaunes et rouges tirées.

Donc $D_m \sim B(m; 0,6)$ $E(D_m) = 0,6m$ $V(D_m) = 0,6m \times 0,4$

b) $R_m + V_m = m$ car cela représente le nombre de boîtes liées.

Les variables R_m et V_m ne sont pas indépendantes car après avoir tiré la boîte, on la remet dans l'urne.

$$\text{Ainsi } \text{Cov}(R_m, V_m) = \frac{V(R_m + V_m) - V(R_m) - V(V_m)}{2}$$

$$= \frac{V(2R_m) - 2V(R_m)}{2}$$

$$= \frac{4V(R_m) - 2V(R_m)}{2}$$

$$\text{Cov}(R_m, V_m) = V(R_m) = 0,28m \times 0,72$$

c) $U_m + D_m = m$ car cela correspond au nombre de boîtes liées.

Les variables U_m et D_m ne sont pas indépendantes car après avoir tiré la boîte, on la remet dans l'urne.

Si l'on suit le raisonnement précédent, $\text{Cov}(U_m, D_m) = V(U_m) = 0,6m \times 0,8$

4/A) Admettons le résultat

$$b) E(h_m) = E(U_m) + 2E(D_m) - 3E(V_m) \quad (\text{par linéarité})$$

$$= 0,6m + 2 \times 0,6m - 3 \times 0,72m$$

$$= 0,36m - 2,16m$$

$$E(h_m) = -1,8m$$

Exercice 4

1) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n) > 0$ et $(b_n) > 0$

Initialisation : $a_0 = 1$ donc $a_0 > 0$ et $b_0 = 2$ donc $b_0 > 0$
et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $(a_n) > 0$ et $(b_n) > 0$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad a_n > 0 \text{ et } b_n > 0 \text{ donc } a_n + b_n > 0$$

$$\text{et } a_{n+1} > 0$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \quad b_n > 0 \text{ et car on a prouvé que } a_{n+1} > 0$$

$$\text{donc } a_{n+1} b_n > 0 \text{ et } \sqrt{a_{n+1} b_n} > 0 \text{ donc } b_{n+1} > 0$$

Ainsi a_{n+1} et b_{n+1} sont supérieurs à 0 sachant

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $(a_n) > 0$ et $(b_n) > 0$

$$2) \quad \boxed{\begin{array}{l} a = (a+b)/2 \\ b = \sqrt{a \cdot b} \end{array}}$$

$$3) \quad a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 \times b_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 651010

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2021

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4/a) Admettons le résultat.

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$

Initialisation : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ donc $a_0 < b_0$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a_n < b_n$

On veut $a_{n+1} < b_{n+1}$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})} (b_n - a_n) \quad b_n - a_n > 0 \quad \text{car } b_n > a_n$$

On voit que $\sqrt{a_n} > 0$ et $\sqrt{b_n} > 0$ donc $\frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})} > 0$

Ainsi $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > a_{n+1}$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $a_n < b_n$

c) Pour que (a_n) soit croissante, il faut que $a_{n+1} - a_n > 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ &= \frac{a_n - 2a_n + b_n}{2} \\ &= \frac{b_n - a_n}{2} \quad \text{Car } b_n > a_n \end{aligned}$$

Donc $a_{n+1} - a_n > 0$ et (a_n) est strictement croissante.

$$d) \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{b_n a_{n+1}}^2}{a_{n+1}} = \frac{b_n a_{n+1}}{a_{n+1}} = b_n$$

$$\text{Donc } b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= b_{n+1} - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} b_{n+1} - b_{n+1}^2}{a_{n+1}} \\ &= \frac{b_{n+1} (a_{n+1} - b_{n+1})}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

On $b_{n+1} > a_{n+1}$ donc $a_{n+1} - b_{n+1} < 0$ et $b_{n+1} > 0$
 et $a_{n+1} > 0$

Donc $b_{n+1} - b_n < 0$ et (b_n) est strictement décroissante.

$$5) a) \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \times (b_n - a_n)$$

$$\text{On } \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} < 1 \text{ donc } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \times (b_n - a_n) < \frac{1}{2} (b_n - a_n)$$

Donc $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2} (b_n - a_n)$ pour tout entier naturel n

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n > a_n \text{ donc } b_n - a_n > 0$$

$$\text{et puisque } b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2} (b_n - a_n)$$

$$\text{alors } b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \times b_{n+1}$$

$$\text{On } \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} > 1 \text{ et } b_{n+1} > 0 \text{ donc } b_n > 1 \text{ et } a_0 = 1$$

$$\text{Ainsi } b_n > a_0 \text{ pour tout entier naturel } n$$

c) $(a_n) \subset b_0$ et est croissante donc (a_n) converge vers un réel l où $l \leq 2$

$(b_n) > a_0$ et est décroissante donc (b_n) converge vers un réel l où $l > 2$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, l > a_0$ et $l \leq b_0$

On a $a_0 < b_n$ et $b_0 > a_n$ donc $a_n < b_0 < l < a_0 < b_n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < l < b_n$

6) La limite commune de (a_n) et (b_n) est comprise entre 1 et 2.

Soit $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ est compris entre 1 et 2 donc

$$l = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

7) a) while $b - a \leq 10^{-3}$

$a = a$

$b = b$

$n = n + 1$

b) n prend la valeur 6

8) a) Les réels $b_5 - a_5$ et $b_6 - a_6$ sont des valeurs approchées de l à 10^{-3} près

b) Les réels sont approchés à 10^{-3} près