Exercice 3 / Partie A

1) f est continue sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;1[$ comme quotient de fonction continue (composé d'une fonction logarithme et polynomiale) dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet $t\neq 0$)

De plus $\lim\limits_{t\to 0} \frac{-\ln(1-t)}{t} = 1 = f(0)$ En effet on sait que $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

donc $\frac{-\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = \frac{t}{t} = 1$.

Donc f est continue en 0 et donc f est continue sur $]-\infty;1[$

2)a) $\forall t\in\,]-\infty;1[$ on pose $g : t \mapsto \frac{t}{1-t} + \ln(1-t)$ qui est une fonction de classe C^1 comme somme de fonction de classe C^1.

$\forall t\in\,]-\infty;1[$ on a $g'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} = \frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}$.

Donc $g'(t)\geq 0 \Leftrightarrow t\geq 0$ et $g(0) = \frac{0}{1-0} + \ln(1-0) = 0$.

On a

t	$-\infty$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a ainsi $g(t)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[\cup]0;1[$ comme quotient de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (composé de logarithme et polynomale) dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall t \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ on a $f'(t) = \dfrac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} = \dfrac{t + \ln(1-t)(1-t)}{t^2(1-t)}$

$= g(t) \times \dfrac{1}{t^2} \geq 0$ (car $g(t) \geq 0$ et $t^2 \geq 0$)

2) c) On sait que $f'(t) \geq 0$ $\forall t \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ et que $f(0) = 1$
Comme f est continue sur $]-\infty;1[$ on en déduit que f est croissante sur $]-\infty;1[$.

3) a) D'après le cours on a $\ln(1+t) \underset{t \to 0}{=} t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

Donc on en déduit que $\ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}(-t)^2 + o((-t)^2)$
$= -t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

3) f est dérivable en 0 et vaut $\frac{1}{2}$ si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \dfrac{1}{2}$

On $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim \dfrac{\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\frac{-\ln(1-t) - t}{t}}{\frac{t}{1}} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-\ln(1-t) - t}{t^2}$.

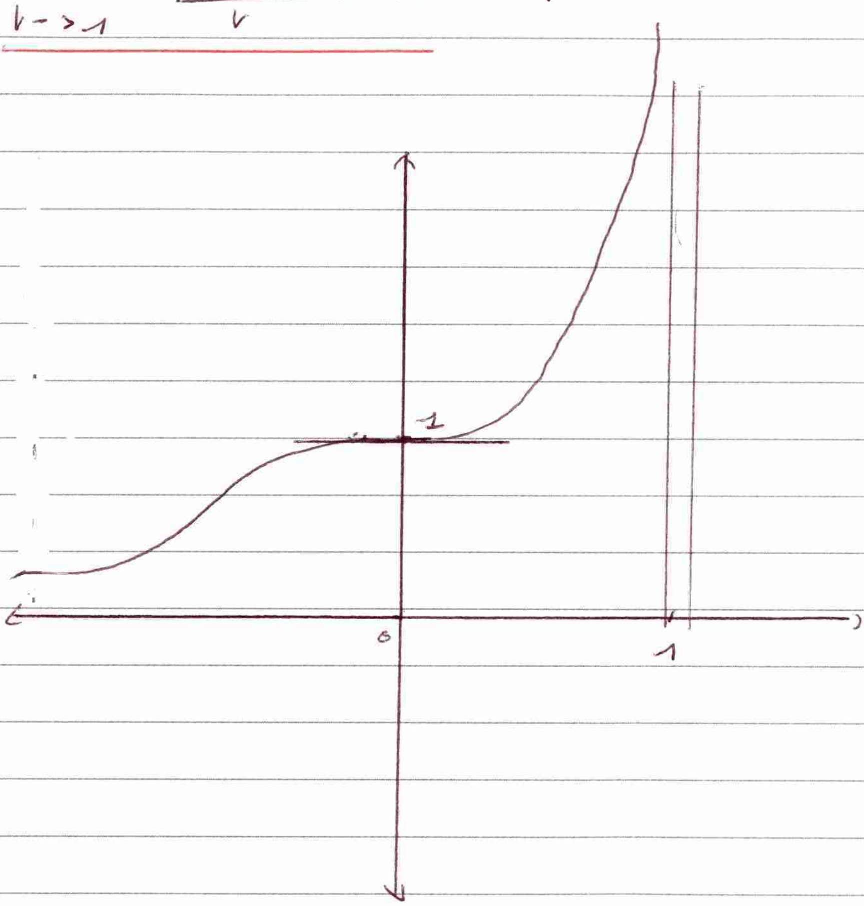
$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - t}{t^2} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{2} + o(t^2) = \dfrac{1}{2}$

3) c) f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[\cup]0;1[$ et est continue sur $]-\infty;1[$. De plus, $f'(0)=\frac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et donc f est de classe C^1 sur $]-\infty;1[$.

4) On a $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{-\ln(1-t)}{t} = 0$ (car $-\ln(1-t) \underset{t\to-\infty}{=} o(t)$) par croissances comparées

et $\lim\limits_{t\to1} \frac{-\ln(1-t)}{t} = +\infty$ (opération usuelle sur les limites)

5)



Partie B.

6) D'après le théorème fondamental du calcul intégral, comme la fonction f est continue sur $]-\infty;1[$, L en est l'unique primitive qui s'annule en 0 et donc en particulier L est de classe C^1 sur $]-\infty;1[$.

On a $L(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \ldots\ F(x)-F(0)$ (avec F une primitive de f). Et donc $\forall x \in]-\infty;1[$ $L'(x)=f(x)$

7)a) $\forall (A,B) \in]0;1[^2$, $\int_A^B f(t)dt = \int_A^B -\frac{\ln(1-t)}{t}dt$.

on pose $u = 1-t$ on a donc $1-u = t$ et $-du = dt$.
Quand t vaut A on a $u = 1-A$ et quand t vaut B $u = 1-B$ (le changement de variable étant affine tout est licite)

on remplace donc $\int_A^B f(t)dt = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u} \cdot -du = -\int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}du$

$= \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(u)}{1-u}du$ (les variables d'intégration étant muettes on a bien montré ce qu'il fallait)

7)b) $\forall t \in]0;1[$ on a $-\ln(t)\sum_{k=0}^{n} t^k = -\ln(t) \times \frac{1-t^n}{1-t}$ (Série géométrique avec $t \neq 1$)

Donc $-\ln(t)\sum_{k=0}^{n} t^k - \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} = \frac{-\ln(t)(1-t^n) - t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$.

$= \frac{-\ln(t)(1-t^n+t^{n+1})}{1-t}$

$= \frac{-\ln(t)}{1-t}$ (admis)

c) L'intégrale $\int_0^1 -t^k \ln(t)dt$ est impropre en 0. On pose $B \leq 1$.

On a $\int_B^1 -t^k\ln(t)dt$. On pose $u(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$
$w'(t) = -t^k$ et $v(t) = -\frac{t^{k+1}}{k+1}$

Comme v et u sont C^1 sur $[B;1]$ on peut intégrer par parties et on a.

$\int_B^1 -t^k\ln(t)dt = \left[\frac{-\ln(t)t^{k+1}}{k+1}\right]_B^1 + \int_B^1 \frac{t^k}{k+1}dt$

$= \frac{-\ln(1)1^{k+1}}{k+1} + \frac{\ln(B)B^{k+1}}{k+1} + \int_B^1 \frac{t^k}{k+1}dt = \frac{\ln(B)B^{k+1}}{k+1} + \left[\frac{1}{k+1} \times \frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_B^1$

$= \frac{\ln(B)B^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{B^{k+1}}{k+1} \xrightarrow[B \to 0]{} \frac{1}{(k+1)^2}$ par croissance comparées, converge bien.
Donc $\int_0^1 -t^k\ln(t) = \frac{1}{(k+1)^2}$

4/20

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 20 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EmLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7/d/ On a $\lim_{t\to 0^+} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = 0$ (opérations usuelles)

et $\lim_{t\to 1^-} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = -1$ (car $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} 1-t$ donc $\frac{-t\ln(t)}{1-t} \underset{1}{\sim} \frac{-t(1-t)}{1-t}$
$= -t$)

Il reste à prouver que $f(t) = \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est continue sur $]0;1[$.
pour prouver qu'elle est bornée.
OR f est continue sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0;1[$ (logarithme et polynomiale) dont le dénominateur ne s'annule (car $1-t \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq t$)
Donc f est bornée. (car continue sur un intervalle et avec des limites finies)

$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $t : \to t^n$ est aussi bornée sur $]0;1[$ donc + (mêmes raisons)
la fonction $t : t^n \times \frac{-t\ln(t)}{1-t} = \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$ converge ~~(c'est une intégrale de fonction continue sur un segment)~~ (car elle est bornée)

Comme $t \in]0;1[$ on sait que $t \in]-1;1[$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} t^{n+1} = 0$.
Par suite $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 -t^{n+1} \times \frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = 0$

7)e) On a $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\right)$

Par linéarité de l'intégrale on a ... $= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 -t^k \ln(t) + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$ (7)c))

~~Donc $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}$ dt converge en tant que~~

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \lim \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$

$\iff \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ (rien ne dépend de n) $= \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + 0$ (7)d))

OR comme $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, avec le changement d'indice $k'=k+1$, on peut affirmer que $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt$ converge et vaut $\sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{1}{(k')^2} = \frac{\pi^2}{6}$ d'après l'énoncé.

7)f) On a $\lim_{x\to 1} L(x) = \lim_{x\to 1} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 1} \int_0^x \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt \overset{*}{=} \frac{\pi^2}{6}$

d'après 7)e). ~~OR en~~ En posant $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ on peut prolonger par continuité en 1 la fonction L.

$*$ car $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt = \frac{\pi^2}{6}$.

8/a) La fonction $h : x \to L(x) + L(-x) - \frac{1}{2} L(x^2)$ est dérivable sur

$]-1;0[\cup]0;1[$. ~~car~~ comme combinaison linéaire de fonction dérivable sur $]-1;0[\cup]0;1[$ car :

- La fonction L est de classe C^1 sur $]-1;1[$ donc en particulier sur $]-1;0[\cup]0;1[$

On a $\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[$ on a $h'(x) = f(x) - f(x) - \frac{1}{2} 2x f(x^2)$

$= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{-\ln(1+x)}{-x} - x x' \frac{-\ln(1-x^2)}{x^2}$.

$= \frac{-\ln(1-x) + \ln(1+x) + \ln(1-x^2)}{x}$

On préfère noter que $h'(x) = L(x)' + L(-x)' - \frac{1}{2} L(x^2)'$
$= f(x) - f(-x) - \frac{1}{2} 2x f(x^2)$.

8)b) admis

$\forall x \in [-1;1]$

8)c) $L(-1) = \frac{1}{2} L(1^2) - L(1)$
$= -L(1)$

Partie C

9) a) $\forall (x,y) \in D$ (avec $D =]-1;0[^2$) on a ~~s~~. comme f est de classe C^1 (car C^2)

$\partial_1 \phi(x,y) = f(x) + y f(-xy)$ et $\partial_2 \phi(x,y) = f(y) + f(-xy)$

b) $\forall (x,y) \in D$ on a $\nabla \phi(x,y) = 0 \iff \begin{pmatrix} f(x) + y f(-xy) \\ f(y) + x f(-xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $\begin{cases} f(x) = -y f(-xy) \\ f(y) = -x f(-xy) \end{cases}$ ~~et comme $f(-1) = f($~~ d'après 8)c) admis

on a bien l'unique point critique $(-1,-1)$

1a) c) Comme f est de classe C^2 on a

$\partial^2_{1,2} \phi(x,y) = \partial^2_{2,1} \phi(x,y) = K$ (selon théorème de Schwartz)
$\partial^2_{2,2} \phi(x,y) = Z$ et $\partial^2_{1,1} \phi(x,y) = W$

avec K, Z, W des inconnus.

On admet que $\partial^2_{1,1} \phi(-1,1) = 0 = \partial^2_{2,2} \phi(-1,1)$
et que $\partial^2_{1,2} \phi(-1,1) = \partial^2_{2,1} \phi(-1,1) = \frac{1}{2}$.

avec la hessienne $D^2\phi(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = M$

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on regarde le déterminant de $M - \lambda I$

$\begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$ qui est égal à $\lambda^2 - (\frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}) = 0$
Donc $Sp(M) = \{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\}$.

11) Comme $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont de signe contraire, la fonction ϕ n'admet pas d'extremum local en $(-1;-1)$. et comme $(-1,-1)$ est son unique point critique alors f n'admet pas d'extremum local sur $]-1;0[^2$.

En effet, étant de classe C^2 donc de classe C^1 sur un ouvert, f ne peut être extremal qu'en ses points critiques

Copie anonyme - n°anonymat : 946940

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 20	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E Emlyon.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Exercice 2.

1)a) Soit M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $tr(\lambda M+N) = \lambda tr(M) + tr(N)$ car la trace est une application linéaire (d'après le cours)
On s'en convainc en posant $\lambda M+N = \begin{pmatrix} \lambda a+e & \lambda b+f \\ \lambda c+g & \lambda g+h \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

et $Tr(\lambda M+N) = \lambda a+e+\lambda g+h = \lambda Tr(M)+Tr(N)$

b) On sait que $M \in \ker Tr$ si $Tr(M)=0$ donc si la somme des coefficients a et d vaut 0 donc si $a=-d$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

On en déduit que $\ker(tr) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (par élagage comme $a=-d$)

OR la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre * et génératrice donc c'est une base du noyau

* On pose $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
par identification de coefficient $x=y=z=0$. Donc la seule relation de dépendance est triviale.

De plus $\dim(\ker(tr)) = card\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in M_2(\mathbb{R})^2$

on a $f(\lambda M+N) = \lambda M+N + tr(\lambda M+N) J$

$= \lambda M+N + (\lambda\, tr(M) + tr(N)) J$ (linéarité de la trace)

$= \lambda(M+tr(M)J) + N + tr(N) J$

$= \lambda f(M) + f(N)$

Donc f est une application linéaire.

De plus comme $J \in M_2(\mathbb{R})$, on sait que f est une application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ (règle du produit matriciel) soit un endomorphisme.

3) a) On a $A = Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 b) On a $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4$

3) c) Comme $(A-I_4)^2 = 0$ on a un polynôme annulateur de A de la forme $(X-1)^2 = 0$

Les valeurs propres de A se trouvent dans la racine du polynôme.

On la unique racine ici est 1. Il faut donc vérifier si 1 est valeur propre de A

La matrice $A-I$ n'est pas inversible (lle et lu sont remplies de zéros) donc son rang est inférieur à la dimension).
Cela suffit pour affirmer que 1 est valeur propre et que
$Sp(A) = \{1\}$.

Si A était diagonalisable on aurait $A = PDP^{-1} = PIP^{-1} = I$
(avec D une matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale et P une matrice inversible). Or il est absurde que $A = I$ (il suffit de regarder A). Donc A n'est pas diagonalisable

d) Si λ est valeur propre on sait que $A-\lambda I$ n'est pas inversible.
Par contraposée, comme 0 n'est pas valeur propre on en déduit que $A-0I$ est inversible.
On inverse A à l'aide de la méthode de Gauss Jordan.

$$\left(\begin{matrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$$\left(\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$
$$\left(\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&0&0&0\\-2&1&0&-2\\-1&0&1&-1\\0&0&0&1\end{matrix}\right)$$

Ainsi on a $A^{-1} = \left(\begin{matrix}1&0&0&0\\-2&1&0&-2\\-1&0&1&-1\\0&0&0&1\end{matrix}\right)$

4) a) On sait que 1 est valeur propre de si $f(v) = v$ avec $v \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On pose $A' = Mat_B(f) = \left(\begin{matrix}1+a&0&0&a\\b&1&0&b\\c&0&1&c\\d&0&0&1+d\end{matrix}\right)$

$f\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$,
$f\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&1+d\end{smallmatrix}\right)$

On voit que $A' - I$ n'est pas inversible (C_2 et C_3 sont remplis de 0) donc 1 est valeur propre de A' et par ~~similitude~~ représentation matricielle 1 est valeur propre de f

On a donc $f(v) = v \Leftrightarrow (f - id)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(f - id)$
Donc le sous espace propre associé est $\ker(f-id)$.
On $\dim \ker(f-id) = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim(f - id)$ (théorème du rang)
$= \dim M_2(\mathbb{R}) - Rg(A' - I)$
$= 4 - 2 = 2$
Donc $\dim \ker(f-id) = 2$.

4B) J est un vecteur propre de f si J est non nulle (ce qui est vrai d'après l'énoncé) et si $f(J) = \lambda J$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
OR $f(J) = J + Tr(J) J = J + (a+d) J = J(1+a+d)$
On a donc $f(J) = (1+a+d) J$.
Ce qui montre que J est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $(1+a+d)$

4)c)i)

Copie anonyme - n°anonymat : 946940

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 20

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $Y = X+1$ on en déduit que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

De plus $P(Y=k) = P(X+1=k) = P(X=k-1) = q^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$

On sait donc que $Y \hookrightarrow G(p)$

2) Comme $Y-1 = X$ et que Y admet une espérance (loi usuelle) on en déduit que X admet une espérance comme combinaison linéaire de variable admettant une espérance (idem pour la variance)

De plus, $E(X) = E(Y-1) = E(Y)-1$ (par linéarité de l'espérance)

$$= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}.$$

De plus, $V(X) = V(Y-1) = V(Y)$ (propriété de la variance)

$$= \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

3) Y = grand(1,1, "geom", p) car $Y \hookrightarrow G(p)$
while $Y < p$ car tant que le succès n'est pas arrivé on ajoute 1 à Y.

4) fonction X_j = simul_X(p)

Z = sum$_j$ (X_j) car Z_n est le nombre de jetons après n activations et que ce nombre est égal à la somme de jetons distribués par la machine (elle ne vaut pas 0 car la fonction est initialisée à 1)

5) a) ~~valeur~~ $U_0 = P(Z_0 = 0)$. or d'après l'énoncé $Z_0 = 1$ certainement.
Donc $U_0 = 0$

De plus. $U_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0) = p$ (d'après l'énoncé. Comme $Z_1 = X$)

5) b) $[Z_n = 0]$ signifie que le joueur n'a plus de jeton après n activation de la machine.
$[Z_{n+1} = 0]$ signifie que le joueur n'a plus de jetons après n+1 activation.

On a donc $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ et donc par croissance de la probabilité
$P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0) \Leftrightarrow U_n \leq U_{n+1}$.

Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien monotone (car croissante) et majorée (comme le joueur joue encore et encore il y aura bien un moment où il n'aura plus de sous) Donc la suite converge d'après le théorème de convergence monotone.

6) L'évènement $R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [Z_n = 0] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n$

En effet pour ne plus avoir de jetons, il ne faut plus en avoir après 0 activation, soit après 1 activation, et ainsi de suite.

Donc $P(R) = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n)$

OR comme $U_n \subset U_{n+1}$ on a affaire à une suite croissante d'évènements. donc d'après le théorème de la limite monotone on a $P(R) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

~~or comme Un converge vers un réel ℓ~~

7)a) ~~[Z2=0] sachant [Z1=k] signifie~~

$P_{[Z_1=k]}[Z_2=0]$ signifie : la probabilité que le joueur n'ait plus de jetons après 2 activations de la machine sachant qu'il lui en restait k. Autrement dit on calcule la probabilité que le joueur perde ses k jetons lors de la deuxième activation.

On a donc $P_{[Z_1=k]}[Z_2=0] = (P(Z_1=0))^k = P(X=0)^k = U_1^k = p^k$.

7)b) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{Z_1=k\}_{k \in \mathbb{N}}$ on a :

$U_{n+1} = P(Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k \cap Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k) P_{[Z_1=k]}[Z_{n+1}=0]$.

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k)(U_n)^k$ (d'après l'énoncé) $= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(U_n)^k$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p (U_n)^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} (qU_n)^k$.

Comme $q \in]0;1[$ et que U_n est une probabilité on a $(qU_n) \in]-1;1[$ et donc d'après la formule de la série géométrique on a :

$U_{n+1} = p \times (qU_n)^0 \times \frac{1}{1-qU_n} = \frac{p}{1-qU_n}$.

8) a) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}$

OR $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \dfrac{p}{1-q\ell}$

On a donc $\ell = \dfrac{p}{1-q\ell} \Leftrightarrow \ell(1-q\ell)-p=0 \Leftrightarrow \ell - q\ell^2 - p = 0$

OR $(\ell-1)(q\ell-p) = (\ell-1)(q\ell-1+q) = q\ell^2 - \ell + \ell q - q\ell + 1 - q = q\ell^2 - \ell + p$

$= -q\ell^2 + \ell - p$. Donc on a bien $\ell = \dfrac{p}{1-q\ell} \Leftrightarrow (\ell-1)(q\ell-p)=0$

8) b) On a $(\ell-1)(q\ell-p)=0 \Leftrightarrow \ell-1=0$ (car $q\ell-p \neq 0$)
$\Leftrightarrow \ell = 1$

OR $P(R)=\ell$ d'après 6)
Donc $P(R)=\ell=1$

8) c) On pose HR_n : $0 \leq U_n \leq \dfrac{p}{q}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Initialisation) Soit $n=0$ on a $U_0=0$ et $0\leq 0 \leq \dfrac{p}{q}$ (car $p,q \in]0;1[^2$)
H_{R0} est vérifiée.

Hérédité) Soit $n\in\mathbb{N}$ on suppose HR_n vérifiée.

On a $0 \leq U_n \leq \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow 0 \geq -qU_n \geq -p \Leftrightarrow 1 \geq 1-qU_n \geq 1-p = q$

$p \leq \dfrac{p}{1-qU_n} = U_{n+1} \leq \dfrac{p}{q}$. OR comme $p>0$ on a bien $U_{n+1} \in [0;\dfrac{p}{q}]$
Donc HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion) $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $U_n \in [0;\dfrac{p}{q}]$

On sait donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \dfrac{p}{q}$

OR $\lim U_n = \ell$ donc $\ell \leq \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow P(R) \leq \dfrac{p}{q} < 1$ (comme $p,q \in]0;1[^2$)

Copie anonyme - n°anonymat : 946940

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 20	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EM Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8) d)

9) ~~Comme U_n signifie~~ Comme $[Z_n=0]$ signifie que le joueur n'a plus de jetons après n activation

et que $[T\leq n]$ signifie que le nombre d'activation de la machine effectuées par le joueur lorsqu'il n'a plus de jeton pour la première est inferieure à n

On remarque $[T\leq n]\subset[Z_n=0]$ et $[Z_n=0]\subset[T\leq n]$ donc $[Z_n=0]=[T\leq n]$.

On passe au probabilité et on a $P(Z_n=0)=U_n=P(T\leq n)$

~~De plus, $[T\leq n]=[T<n]\cup[T=n]$.~~
~~Par incompatibilité on a $P(T=n)=P(T\leq n)-P(T<n)=U_n-P(T<n)$~~

~~Or $P(T\leq n)$~~ De plus on a $P(T=n)=P(T\leq n)-P(T\leq n-1)$
$=U_n-U_{n-1}$
$=U_n-U_{n-1}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10) $\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1} - v_n)$

$= \sum_{n=1}^{N} n v_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n v_n = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) v_n - \sum_{n=1}^{N} n v_n$ (télescopage)

$= \sum_{n=0}^{N-1} n v_n + \sum_{n=0}^{N-1} v_n - \sum_{n=1}^{N} n v_n = \sum_{n=0}^{N-1} n v_n - N v_N$.

11) a)

11) Si T admet une espérance si et seulement si $\sum_{k \in T(\Omega)} k P(T=k)$ converge assolument.

~~$\forall k \in \mathbb{N}$~~

OR $P(T=k) = U_k - U_{k-1} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{k^2 - (k-1)(k+1)}{k(k+1)}$

$= \frac{k^2 - k^2 + 1}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

et donc $k P(T=k) = \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1}$.

OR la série de terme général $\frac{1}{k+1}$ divergence entant que série harmonique. On en déduit d'après le théorème de convergence par comparaison des séries à termes positifs ~~(car k~~ (car $k \in T(\Omega)$ et $P(T=k) \geq 0$) que la série de terme général $k P(T=k)$ diverge ie que T n'admet pas d'espérance.

12)a) On a $w_n = \dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$

donc $w_{n+1} = \dfrac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \dfrac{q^2(1-u_n)}{p(p-u_n q)}$ (calculs)

OR $\dfrac{q}{p} w_n = \dfrac{q}{p} \times \dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} = \cancel{\dfrac{q}{p}}\ \dfrac{q}{p} \times \dfrac{1-u_n}{\frac{p-u_n q}{q}} = \dfrac{q}{p} \times \dfrac{q(1-u_n)}{\cancel{p \times 0}\,(p-u_n q)}$

$= \dfrac{q^2(1-u_n)}{p(p-u_n q)}$

12) b) On a $\dfrac{q(1-u_n)}{p u_n} = w_n \Leftrightarrow q(1-u_n) = w_n p u_n.$

$\Leftrightarrow q - q u_n = w_n p u_n \Leftrightarrow q = q u_n + w_n p u_n$

$\Leftrightarrow q = u_n(q + w_n p) \Leftrightarrow \dfrac{q}{q+w_n p} = u_n. \Leftrightarrow \dfrac{q}{q+\left(\frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}\right)p} = u_n.$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$

On a $u_n \cancel{\ } = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$ donc $1-u_n = 1 - \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$

$v_n = 1 - 6\, \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$

~~Comme~~ Comme $V_n = 1-u_n$ on a $V_n \geq 0.$

De plus on a admet que $V_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$

La serie de terme générale $\frac{q}{p}$ est convergente en tant que série géométrique de raison comprise entre $]-1 ; 1[$.

~~...~~ De plus on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$.

D'après le théorème de convergence comme $v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$ on sait que $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} 1-u_n$ converge (absolument séries sur à terme positifs)

~~Et comme~~

Et donc $E(T) = \sum k P(T=k) = \sum k(v_k - v_k)$ converge absolument donc $E(T)$ existe et $E(T) \leq \frac{1}{1-\frac{p}{q}}$