Ébauche de parties de sujets HEC-ESSEC Mathématiques appliquées

19 janvier 2022

ENONCÉ 1

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

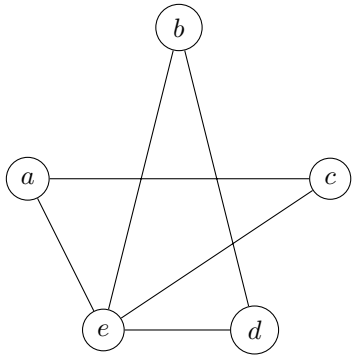
Graphes aléatoires d'Erdös-Renyi

Pour définir un graphe aléatoire non orienté G on se donne :

- $S = \{s_1, ..., s_n\}$, un ensemble fini de $n \geq 2$ sommets ;
- pour toute paire de sommets $\{s_i, s_j\}$ avec $i < j$, $T_{i,j}$ est une variable de Bernoulli de paramètre p sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;

Les arêtes du graphe sont les paires $\{s_i, s_j\}$ telles que $T_{i,j} = 1$ avec $i < j$. Les variables $T_{i,j}$ sont supposées indépendantes.

Voici un exemple de graphe aléatoire avec $S = \{a, b, c, d, e\}$ et $p = 0,4$:



On peut considérer qu'un graphe aléatoire est un modèle très simplifié de réseau social à un instant donné.

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes de G ?

2. Écrire une fonction Python `listAdj(S,p)` qui génère la liste des listes d'adjacence d'un tel graphe aléatoire ayant `S` pour liste de sommets.

Le graphe dessiné correspond à la liste des listes d'adjacence suivante, `[['c', 'e'], ['d', 'e'], ['a', 'e'], ['b', 'e'], ['a', 'b', 'c', 'd']]`, avec la liste des sommets qui est `S='abcde'`.

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère la variable aléatoire D_k égale au degré du sommet s_k. Déterminer la loi de D_k.

4. On dit que s_k est isolé si $D_k = 0$ est réalisé. On note Z_n la variable aléatoire comptant les sommets isolés de G et X_k la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si s_k est isolé et 0 sinon.

a) Montrer que : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1}$.

b) Montrer que : $Z_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$.

c) Justifier que $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = (1-p)^{2n-3}$. En déduire que $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$.

On suppose désormais que $p = p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, avec $c > 0$, $c \neq 1$.

5.a) Écrire une fonction Python `Z` qui renvoie le nombre de sommets isolés d'un graphe donné par sa liste de listes d'adjacence `lst` . On importera les bibliothèques `numpy as np` et `numpy.random as rd`.

b) On souhaite estimer l'influence de la valeur de c sur le nombre de sommets isolés. En exécutant le script suivant

```
list2c=[0.3,0.5,0.7,1.3,1.5,1.7];n=1000;res=[]

for c in list2c:
    s=0
    for k in range(200):
        if Z(listAdj(range(1,n+1),c*np.log(n)/n))==0:
            s+=1
    res.append(s/200)
print(res)
```

on obtient `[0.0, 0.0, 0.0, 0.91, 0.975, 0.99]` après de longues minutes .

Quelle conjecture sur la valeur d'une probabilité pouvez-vous faire lorsque $c < 1$ et $c > 1$? Justifier.

6.a) Montrer que $(1-p_n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-p_n)^n$ puis que $(1-p_n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-c}$.

b) On rappelle que l'inégalité de Markov affirme que si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance et $a > 0$,

$$\mathbb{P}([X \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Si $c > 1$, en déduire la limite de $\mathbb{P}([Z_n \geq 1])$ puis de $\mathbb{P}([Z_n = 0])$, lorsque $n \to +\infty$.

c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev, montrer que $\mathbb{P}([Z_n = 0]) \leq \dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n)^2}$. En déduire que si $c < 1$, $\mathbb{P}([Z_n = 0]) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

d) Votre conjecture est-elle correcte ?

Solution

1. Le nombre maximal d'arêtes correspond au nombre de paires de sommets soit $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. Un exemple de fonction qui convient :

```
def listAdj(S,p):
    l=[[]for k in range(len(S))]
    for i in range(len(S)-1):
        for j in range(i+1,n):
            if rd.random()<p:
                l[i].append(S[j])
                l[j].append(S[i])
    return l
```

3. On a $D_k = \sum_{i=1}^{k-1} T_{i,k} + \sum_{i=k+1}^{n} T_{k,i}$. D_k est la somme de $(n-1)$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p d'où D_k suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et p.

4.a) Classique. Or pour tout k, $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}([X_k = 1]) = \mathbb{P}([D_k = 0])$ qui vaut $(1-p)^{n-1}$ d'après la loi de D_k, d'où par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1}$.

b) On a :

$$Z_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} X_iX_j = \sum_{1\leq i=j\leq n} X_iX_j + \sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j + \sum_{1\leq j<i\leq n} X_iX_j$$

Or comme toute variable de Bernoulli $X_i^2 = X_i$ et on a aussi $\sum_{1\leq j<i\leq n} X_iX_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j$ d'où on obtient bien que :

$$Z_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j$$

c) On a pour $i<j$, $[X_i=1]\cap[X_j=1]$ est réalisé ssi les événements $[T_{k,i}=0]$ pour $k<i$, $[T_{i,k}=0]$ pour $k>i$, $[T_{k,j}=0]$ pour $k<j$ et $k\neq i$, $[T_{j,k}=0]$ pour $k>j$ sont réalisés.

Or ces événements sont au nombre de $(n-1)+(n-2)=2n-3$, indépendants et de probabilité p. D'où $\mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_j=1]) = (1-p)^{2n-3}$.

De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p)^{n-1} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}(X_iX_j)$$

Or $\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}([X_iX_j=1]) = \mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_j=1]) = (1-p)^{2n-3}$.

et il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples (i,j) tels que $1\leq i<j\leq n$, alors on a bien :

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$$

5.a)
```
def Z(lst):
    isolés=0
    for k in range(len(lst)):
            isolés+=(lst[k]==[])
    return isolés
```

b) Ce script utilise la loi faible des grands nombres qui permet d'affirmer que, la fréquence empirique de réalisation d'un événement, ici $[Z_n=0]$, lors d'une répétition d'un grand nombre d'expériences identiques liées à la réalisation de cet événement et indépendantes, est proche de sa probabilité. On peut conjecturer que, lorsque n est grand, $\mathbb{P}([Z_n=0])$ est proche de 1 pour $c>1$ et de 0 pour $c<1$.

6.a) On remarque que $(1-p_n)^{n-1}\sim(1-p_n)^n$ car $1-p_n\to 1$ quand $n\to+\infty$.

De plus $(1-p_n)^n = \exp\left(n\ln\left(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$. Or, $n\ln\left(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right) = n\left(-c\frac{\ln(n)}{n} - c^2\frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right)$,

d'où $n\ln\left(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right) = -c\ln(n)+o(1)$ donc $(1-p_n)^n\sim n^{-c}$.

b) Si $c>1$, $\mathbb{E}(Z_n)\to 0$ car $\mathbb{E}(Z_n)\sim n^{1-c}$, quand $n\to+\infty$. D'après Markov, $\mathbb{P}([Z_n\geq 1])\leq\mathbb{E}(Z_n)$, d'où $\mathbb{P}([Z_n\geq 1])\to 0$ quand $n\to+\infty$ et ainsi $\mathbb{P}([Z_n=0])\to 1$ quand $n\to+\infty$.

c) Appliquons l'inégalité de BT à Z_n pour $\varepsilon=\mathbb{E}(Z_n)$:

$$\mathbb{P}([|Z_n-\mathbb{E}(Z_n)|\geq\mathbb{E}(Z_n)])\leq\frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n)^2}$$

Or si $Z_n=0$ alors $|Z_n-\mathbb{E}(Z_n)|\geq\mathbb{E}(Z_n)$, donc $\mathbb{P}([Z_n=0])\leq\mathbb{P}([|Z_n-\mathbb{E}(Z_n)|\geq\mathbb{E}(Z_n)])$ et par transitivité, $\mathbb{P}([Z_n=0])\leq\dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n)^2}$.

D'après les questions précédentes, $\dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n)^2} = \dfrac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \dfrac{n-1}{n(1-p_n)} - 1$.

Or $\dfrac{n-1}{n(1-p_n)}\to 1$ quand $n\to+\infty$ et si $c<1$, $\dfrac{1}{n(1-p_n)^{n-1}}\to 0$, d'où $\mathbb{P}([Z_n=0])\to 0$ quand $n\to+\infty$.

d) On a confirmation de la conjecture.

N.B :

Les considérations qui suivent pourraient faire l'objet d'une première partie.

La définition d'un graphe aléatoire à N_n arêtes, sur un ensemble de n sommets, se fait a priori en choisissant N_n paires au hasard parmi $\binom{n}{2}$ paires de sommets.

Ainsi, si on considère les variables de Bernoulli $X_{i,j}$, leur paramètre vaut $\dfrac{N_n}{\binom{n}{2}}$.

Plus généralement pour $\{i_1, j_1\}, ..., \{i_k, j_k\}$ k arêtes :

$$\mathbb{P}([X_{i_1,j_1} = 1] \cap ... \cap [X_{i_k,j_k} = 1]) = \frac{N_n(N_n - 1)...(N_n - k + 1)}{\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} - 1\right)...\left(\binom{n}{2} - k + 1\right)}$$

Si $n \to +\infty$ et $N_n \to +\infty$ alors

$$\mathbb{P}([X_{i_1,j_1} = 1] \cap ... \cap [X_{i_k,j_k} = 1]) \sim \left(\frac{N_n}{\binom{n}{2}}\right)^k = \mathbb{P}([X_{i_1,j_1} = 1]) \times ... \times \mathbb{P}([X_{i_k,j_k} = 1])$$

On peut donc lorsque n grand, dans ces conditions, supposer que les $X_{i,j}$ sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \dfrac{N_n}{\binom{n}{2}}$. On retrouve ainsi les conditions de l'exercice dans lequel $N_n \sim \dfrac{c}{2} n \ln(n)$.

ENONCÉ 2

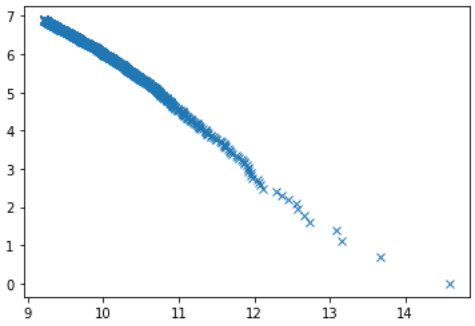
Loi de Pareto-Zipf

On souhaite modéliser la loi de probabilité de la variable aléatoire T qui à une ville, choisie au hasard parmi les villes françaises, associe l'effectif de sa population. On note n le nombre de villes.

1.a) Pour 2018, on dispose d'un fichier Data1.csv de données provenant de l'INSEE et on utilise la bibliothèque Pandas. On exécute les instructions suivantes :

```
import pandas as pd; import numpy.random as rd;import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt

dataset=pd.read_csv('Data1.csv',sep=";")

données=dataset[["Libellé","Population" ]]

données=données.sort_values(by =["Population","Libellé"], ascending=False, ignore_index=True)

logPopu=[np.log(t) for t in données["Population"]]

logRang=[np.log(k) for k in range (1,len(logPopu)+1)]

plt.plot(logPopu,logRang,'*')
```

ce qui produit le graphique suivant :



Expliquer pourquoi le programme et le graphique précédent justifient qu'il existe deux réels a et b tels que, pour toute ville, le réel $\frac{a}{t^b}$, où t est l'effectif de celle-ci, est une approximation raisonnable du rang de celle-ci dans la liste des villes classées par ordre décroissant de population ?

Quelle grandeur peut-on calculer pour confirmer ce que l'on constate graphiquement ? Quelle méthode peut-on utiliser pour obtenir le meilleur couple (a, b) en un certain sens ?

b) On suppose que l'on a pour toutes les villes , $r = \frac{a}{t^b}$, r étant le rang de cette ville, t son effectif, a et b deux réels identiques pour toutes les villes. Si x est l'effectif d'une des villes françaises, quelle est, en fonction de a, b, x et n, la proportion de villes dont la population urbaine est supérieure ou égale à x ?

• On suppose désormais que T suit la loi de Pareto de paramètre $\theta > 1$ et $x_0 > 0$, c'est à dire qu'elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \theta \frac{x_0^\theta}{x^{\theta+1}} \text{ si } x \geq x_0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On note $\text{Par}(\theta, x_0)$ cette loi.

2.a) Déterminer la fonction de répartition F de T.

b) En calculant $\mathbb{P}([T > x])$, montrer que ce résultat est cohérent avec le résultat de la question 1 et exprimer x_0 et θ en fonction de a, b et n.

c) Montrer que $\mathbb{E}(T)$ existe et vaut $\dfrac{\theta}{\theta - 1} x_0$.

3. Soit $x \geq x_0$, on note $\mathbb{P}_x$ la probabilité conditionnelle sachant $[T > x]$.

a) Montrer que pour tout $t \geq x \geq x_0$, $\mathbb{P}_x(T > t) = \left(\dfrac{x}{t}\right)^\theta$.

b) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_x(t) = \mathbb{P}_x([T \leq t])$. De quelle loi F_x est-elle la fonction de répartition ? Quelle est alors l'espérance de cette loi ?

4. Soit $\delta \in]1, +\infty[$.

• On suppose que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ dont f_Y est une densité, continue sur $[x_0, +\infty[$, F_Y la fonction de répartition. On suppose que $\forall x \geq x_0,\ \mathbb{P}([Y \geq x]) > 0$.

a) Soit $x \geq x_0$. Montrer que la fonction G_x définie sur $\mathbb{R}$ par $G_x : t \mapsto \mathbb{P}_{[Y \geq x]}(Y \leq t)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité.

• On suppose que pour tout $x \geq x_0$, l'espérance d'une variable aléatoire de fonction de répartition G_x existe et vaut δx.

b) En déduire que pour tout $x \geq x_0$, $(\delta - 1) x f_Y(x) = \delta(1 - F_Y(x))$.

c) Résoudre l'équation différentielle $(1 - \delta)xy' - \delta y = 0$ sur $[x_0, +\infty[$.

d) En conclure que Y suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

Solution

1.a) Cette relation peut aussi s'écrire $\ln(r) = \ln(a) - b\ln(t)$. On a représenté le nuage de points $(\ln(t_i), \ln(r_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ on constate un très bon alignement des points, donc on peut considérer qu'une telle relation est raisonnable.

On peut par ailleurs calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les $\ln(t_i)$ et les $\ln(r_i)$. S'il est proche de 1 en valeur absolue, on peut alors valider la relation.

On trouve $-0,9947$ ce qui confirme l'utilisation de ce modèle.

Pour obtenir (a, b) on peut réaliser un ajustement aux moindres carrés du nuage de points $(\ln(t_i), \ln(r_i))$.

b) Notons $r(x)$ le rang de la ville d'effectif x, cette proportion vaut $\dfrac{r(x)}{n} = \dfrac{a}{nx^b}$.

2.a) Si $x < x_0$, alors $F(x) = 0$. Si $x \geq x_0$, $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \theta \frac{x_0^\theta}{t^{\theta+1}} dt = x_0^\theta \left[-\frac{1}{t^\theta}\right]_{x_0}^{x} = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta$.

b) On a donc que si x est l'effectif d'une ville, $\mathbb{P}([T > x]) = \dfrac{x_0^\theta}{x^\theta}$. Si l'on rapproche ce résultat du résultat de la question précédente on peut alors considérer que cette probabilité correspond à la valeur trouvée dans cette question soit $\dfrac{a}{nx^b}$. Ces deux résultats sont donc cohérents en identifiant θ à b et x_0^θ à $\dfrac{a}{n}$ donc x_0 à $\left(\dfrac{a}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$.

c) On s'intéresse à la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ i.e. de $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \theta \frac{x_0^\theta}{t^\theta} dt$. La fonction $H : t \mapsto \dfrac{\theta}{-\theta + 1} \dfrac{{x_0}^\theta}{t^{\theta-1}}$ est une primitive de la fonction dans l'intégrale qui admet une limite finie égale à 0 en $+\infty$. Donc cette intégrale est convergente et vaut $-H(x_0) = \dfrac{\theta}{\theta - 1} x_0$.

3.a) Par définition, $\mathbb{P}_x(T > t) = \dfrac{\mathbb{P}(T > t] \cap [T > x)}{\mathbb{P}([T > x]} = \dfrac{1 - F(t)}{1 - F(x)}$ puisque $t \geq x$. Finalement $\mathbb{P}_x(T > t) = \dfrac{\left(\frac{x_0}{t}\right)^\theta}{\left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta} = \left(\frac{x}{t}\right)^\theta$.

b) D'après la question précédente, $F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq x \\ 1 - \left(\frac{x}{t}\right)^\theta & \text{sinon.} \end{cases}$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi Par(θ, x). D'où l'espérance de cette loi existe et vaut $\dfrac{\theta}{\theta - 1} x$.

4.a) En reprenant la méthode utilisée dans le 4.a), on obtient que :

$$G_x(t) = \begin{cases} \dfrac{F_Y(t) - F_Y(x)}{1 - F_Y(x)} & \text{si } t > x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que G_x est bien la fonction de répartition d'une variable à densité. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x\}$ et

$$G_x'(t) = \begin{cases} \dfrac{f_Y(t)}{1 - F_Y(x)} & \text{si } t > x \\ 0 & \text{si } t < x. \end{cases}$$

d'où une densité...

b) On peut donc en déduire que pour tout $x \geq x_0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} t f_Y(t)dt$ converge et vérifie : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t f_Y(t)dt = \delta x(1 - F_Y(x))$.

En utilisant une primitive, on voit que la fonction $K : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} t f_Y(t)dt$ est de classe C^1 sur $[x_0, +\infty[$ et vérifie $K'(x) = -x f_Y(x)$. Donc, pour tout $x \geq x_0$, $-x f_Y(x) = \delta(1 - F_Y(x) - x f_Y(x))$ i.e $(\delta - 1)x f_Y(x) = \delta(1 - F_Y(x))$.

c) Sur $[x_0, +\infty[$, $(1 - \delta)xy' - \delta y = 0 \iff y' = \dfrac{\delta}{(1-\delta)x} y$. Posons $\beta = \dfrac{\delta}{\delta - 1}$. Les solutions sont de la forme $y = \lambda \exp(-\beta(\ln(x)) = \dfrac{\lambda}{x^\beta}$ avec λ réel.

d) Si l'on pose pour tout $x \geq x_0$, $\varphi(x) = 1 - F_Y(x)$, φ vérifie l'équation différentielle précédente et $\varphi(x_0) = 1$ d'où $\lambda = x_0^\beta$ et pour tout $x \geq x_0$, $F_Y(x) = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\beta$. On en conclut que Y suit la loi Par $\left(\dfrac{\delta}{\delta - 1}, x_0\right)$.