Concours ECRICOME 2023, correction

ECT2 *22/23*

EXERCICE 1

PARTIE 1

1. On peut compléter la fonction Python de la façon suivante :

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u = u1
    for k in range(2,n+1):
        u = 5/12*u+1/3
    return u
```

2. (a) Pour tout réel x on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x=\frac{5}{12}x+\frac{1}{3} &\iff x-\frac{5}{12}x=\frac{1}{3} \\ &\iff \left(1-\frac{5}{12}\right)x=\frac{1}{3} \\ &\iff \frac{7}{12}x=\frac{1}{3} \\ &\iff x=\frac{1}{3}\times\frac{12}{7} \\ &\iff x=\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{l'équation } x=\frac{5}{12}x+\frac{1}{3} \text{ admet } \ell=\frac{4}{7} \text{ comme unique solution (sur } \mathbb{R}).}$$

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-\ell \\ &= \frac{5}{12}u_n+\frac{1}{3}-\frac{4}{7} \\ &= \frac{5}{12}u_n+\frac{7-12}{21} \\ &= \frac{5}{12}u_n-\frac{5}{21} \\ &= \frac{5}{12}\left(u_n-\frac{\frac{5}{21}}{\frac{5}{12}}\right) \\ &= \frac{5}{12}\left(u_n-\frac{5}{21}\times\frac{12}{5}\right) \\ &= \frac{5}{12}\left(u_n-\frac{12}{21}\right) \\ &= \frac{5}{12}\left(u_n-\frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{5}{12}\left(u_n-\ell\right) \\ &= \frac{5}{12}v_n. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\geq 1} \text{ est bien géométrique, de raison } \frac{5}{12}.}$$

Remarque : une façon plus élégante de mener le calcul est la suivante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{12}\ell + \frac{1}{3}\right) \quad \text{(car } \ell \text{ est solution de l'équation } x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}\text{)} \\ &= \frac{5}{12}u_n - \frac{5}{12}\ell \\ &= \frac{5}{12}(u_n - \ell) \\ &= \frac{5}{12}v_n. \end{aligned}$$

(c) Comme la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ (*cf* question précédente), on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{v_n = \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} v_1.}$$

(d) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} v_n = v_1\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \quad &\text{d'où} \quad u_n - \ell = (u_1 - \ell)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \quad (\textit{cf} \text{ définition de } (v_n)_{n\geq 1}) \\ &\text{d'où} \quad u_n - \frac{4}{7} = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \\ &\text{d'où} \quad u_n = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

On a obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.}$$

PARTIE 2

3. (a) On a :

$$\boxed{AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\times 4 + 4\times 3 \\ 3\times 4 + 8\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+12 \\ 12+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix}}$$

et

$$\boxed{AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\times(-1) + 4\times 1 \\ 3\times(-1) + 8\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}.}$$

(b) Avec le résultat de la question précédente, on obtient :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12X_1$$

et :

$$AX_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5X_2.$$

Comme $X_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que :

$\boxed{\text{2 et 5 sont des valeurs propres de } A \text{ et que } X_1 \text{ est un vecteur propre pour } A \text{ -associé à la valeur propre 12-}}$

$\boxed{\text{et } X_2 \text{ est un vecteur propre pour } A \text{ -associé à la valeur propre 5-.}}$

4. On a : $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en posant $a = 4$, $b = -1$, $c = 3$ et $d = 1$.
Le déterminant de la martice P est donné par :

$$\det(P) = ad - bc = 4 \times 1 - (-1) \times 3 = 7 \neq 0$$

donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q.}$$

5. On a :

$$\begin{array}{rcl}
PDP^{-1} & = & PDQ \quad (\textit{cf} \text{ question précédente}) \\
 & = & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\
 & = & \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\
 & = & \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ -15 & 20 \end{pmatrix} \\
 & = & \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 48 + 15 & 48 - 20 \\ 36 - 15 & 36 + 20 \end{pmatrix} \\
 & = & \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \\
 & = & A.
\end{array}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

6. Notons P_n la propriété définie par : «$A^n = PD^nP^{-1}$».
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Initialisation :
On a :

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

donc P_0 est vraie.
Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
On a :

$$\begin{array}{rcl}
A^{n+1} & = & A^nA \\
 & = & PD^nP^{-1}A \quad (P_n \text{ vraie}) \\
 & = & PD^nP^{-1}PDP^{-1} \quad (\textit{cf} \text{ question précédente}) \\
 & = & PD^nIDP^{-1} \\
 & = & PD^nDP^{-1} \\
 & = & PD^{n+1}P^{-1}.
\end{array}$$

Donc P_{n+1} est vraie (lorsque P_n l'est).

Conclusion :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } A^n = PD^nP^{-1}.}$$

7. (a) On a :

$$\begin{aligned} P^{-1}X &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\textit{cf} \text{ question 4.}) \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} A^nX &= PD^nP^{-1}X \quad (\textit{cf} \text{ question 6.}) \\ &= PD^n\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{(car } D \text{ est diagonale)} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12^n \\ -3.5^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4.12^n + 3.5^n \\ 3.12^n - 3.5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{A^nX = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4.12^n + 3.5^n \\ 3.12^n - 3.5^n \end{pmatrix}.}$$

PARTIE 3

8. • Comme on suppose que le jour 1 il fait beau, il est impossible qu'il pleuve le jour 1. D'où :

$$\boxed{b_1 = P(B_1) = 0.}$$

• Le jour 1, il fait beau (*cf* hypothèse). La probabilité qu'il fasse beau le lendemain est donc égale à $\frac{3}{4}$ et celle qu'il pleuve le lendemain est égale à $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; c'est-à-dire que l'on a :

$$\boxed{a_2 = P(A_2) = \frac{3}{4} \text{ et } b_2 = P(B_2) = \frac{1}{4}.}$$

9. (a) Il est clair que la famille (A_n, B_n) est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \frac{3}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{3} \quad (*). \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: sachant qu'il fait beau le jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{3}{4}$, d'où : $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$.
Sachant qu'il pleut le jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$, d'où : $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
On obtient aussi avec la formule des probabilités totales et le même système complet d'événements :

$$\begin{array}{rcl} P(B_{n+1}) & = & P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ & = & P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{2}{3} \quad (**). \end{array}$$

Détail de $(**)$: sachant qu'il fait beau le jour n, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, d'où : $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
Sachant qu'il pleut le jour n, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, d'où : $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$.
On a bien obtenu :

$$\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) \text{ et } P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n).}$$

Remarque : en toute rigueur, on devrait traiter le cas $n = 1$ à part pour ne pas être amené à conditionner par un événement de probabilité nulle. Ce cas est facile à vérifier avec la question précédente :

$$\frac{3}{4}P(A_1)+\frac{1}{3}P(B_1) = \frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{3}\times 0 = \frac{3}{4} = P(A_2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}P(A_1)+\frac{2}{3}P(B_1) = \frac{1}{4}\times 1+\frac{2}{3}\times 0 = \frac{1}{4} = P(B_2).$$

(b) On a :

$$\begin{array}{rcl} M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} & = & \frac{1}{12}A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \frac{9}{12}a_n + \frac{4}{12}b_n \\ \frac{3}{12}a_n + \frac{8}{12}b_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \text{ (d'après la question précédente -et les définitions de } (a_n)_{n\geq 1} \text{ et } (b_n)_{n\geq 1}\text{-).} \end{array}$$

On a bien obenu :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.}$$

(c) Comme la famille (A_n, B_n) est un système complet d'événements, on a : $P(A_n)+P(B_n) = 1$ ce qui se réécrit :

$$\boxed{a_n + b_n = 1.}$$

10. (a) Notons P_n la propriété définie par : « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ».

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Initialisation :
On a :

$$M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

donc P_1 est vraie.

Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= MM^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (P_n \text{ vraie}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad (\textit{cf} \text{ question } 9.(\text{b})). \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\textit{cf} \text{ question précédente}) \\ &= \left(\frac{1}{12}A\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12^{n-1}}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4.12^{n-1} + 3.5^{n-1} \\ 3.12^{n-1} - 3.5^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{d'après la question } 7.(\text{b})) \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4.\frac{12^{n-1}}{12^{n-1}} + 3.\frac{5^{n-1}}{12^{n-1}} \\ 3.\frac{12^{n-1}}{12^{n-1}} - 3.\frac{5^{n-1}}{12^{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 + 3\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \\ 3 - 3\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \text{ et } b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.}$$

11. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \quad \text{(d'après la question 9.(a))} \\ & = & \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}(1-a_n) \quad \text{(d'après la question 9.(c))} \\ & = & \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}a_n \\ & = & \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}\right) a_n + \dfrac{1}{3} \\ & = & \dfrac{5}{12}a_n + \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

On a bien obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}.}$$

(b) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}.$$

Donc, avec $u_1 = 1$, les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ coïncident $(*)$. Avec la question 2.(d), on en déduit que l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{a_n = \left(1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.}$$

Remarque : on retrouve bien le résultat de la question 10.(b).

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & 1 - a_n \quad \text{(d'après la question 9.(c))} \\ & = & 1 - \left(\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{7}\right) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ & = & 1 - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} - \dfrac{4}{7} \\ & = & \dfrac{7}{7} - \dfrac{4}{7} - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} \\ & = & \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1}. \end{array}$$

On a obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.}$$

Remarque : on retrouve bien le résultat de la question 10.(b).

12. Comme $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0.$$

On en déduit (*cf* question 10.(b)) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = \frac{3}{7}.}$$

13. (a) La probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour est :

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9 \cap B_{10}\right).$$

Or :

$$\begin{aligned} & P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_9 \cap B_{10}\right) \\ = \; & P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_8}(A_9) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_9}(B_{10}) \\ = \; & 1 \times \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{3}{4}}_{8 \text{ termes}} \times \frac{1}{4} \quad (*) \\ = \; & \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: *cf* les «règles qui régissent la météo» de la destination.

Donc :

$$\boxed{\text{la probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour est égale à } \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^8.}$$

(b) La probabilité que le voyageur reparte sous la pluie est égale à :

$$P(B_{10}) = b_{10}.$$

Avec la question 10.(b), on obtient donc que :

$$\boxed{\text{la probabilité que le voyageur reparte sous la pluie est égale à : } \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9.}$$

EXERCICE 2

PARTIE 1

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $1+\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{>0}>1>0$. Comme la fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$ bien défini.
   Par conséquent :
   $$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. • Notons u la fonction définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $u(x)=1+\mathrm{e}^{x}$. On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$f(x)=\ln(u(x))$$
   d'où, pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}.}$$
   • D'après le point précédent, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$f'(x)=\frac{\overbrace{\mathrm{e}^{x}}^{>0}}{\underbrace{1+\mathrm{e}^{x}}_{>1}}>0.$$
   Par conséquent :
   $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3. • On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\mathrm{e}^{x}=1$. Or, $\lim\limits_{z\to 1}\ln(z)=\ln(1)=0$, d'où, par composition :
   $$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)=0.}$$
   • D'après le point précédent :
   $$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote au voisinage de } -\infty \text{ : la droite d'équation } y=0.}$$

4. (a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\mathrm{e}^{x}=+\infty$. Or, $\lim\limits_{z\to+\infty}\ln(z)=+\infty$, d'où, par composition :
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)=+\infty.}$$
   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned}x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)&=\ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\\&=\ln\left(\mathrm{e}^{x}\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right)\\&=\ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{0}\right)\\&=\ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\\&=f(x).\end{aligned}$$
   On a bien obtenu, pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$\boxed{f(x)=x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right).}$$

(c) Avec la question précédente, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) - x = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) - x = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Or, par composition (et somme) : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$, d'où, à nouveau par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'éqaution } y = x \text{ est bien asymptote à la courbe } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

(d) On a déjà vu dans la question précédente que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - x = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Or, pour tout x de $\mathbb{R}$, $1 + \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{>0} > 1$, d'où, pour tout x de $\mathbb{R}$, par stricte croissance de la fonction ln sur $]1, +\infty[$:

$$\underbrace{\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)}_{=f(x)-x} > \ln(1) = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est au dessus de la droite } (D) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

5. Une équation de la tangente (T_0) à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Or :

$$f(0) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{0}\right) = \ln(2) \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{1 + \mathrm{e}^0} = \frac{1}{2}$$

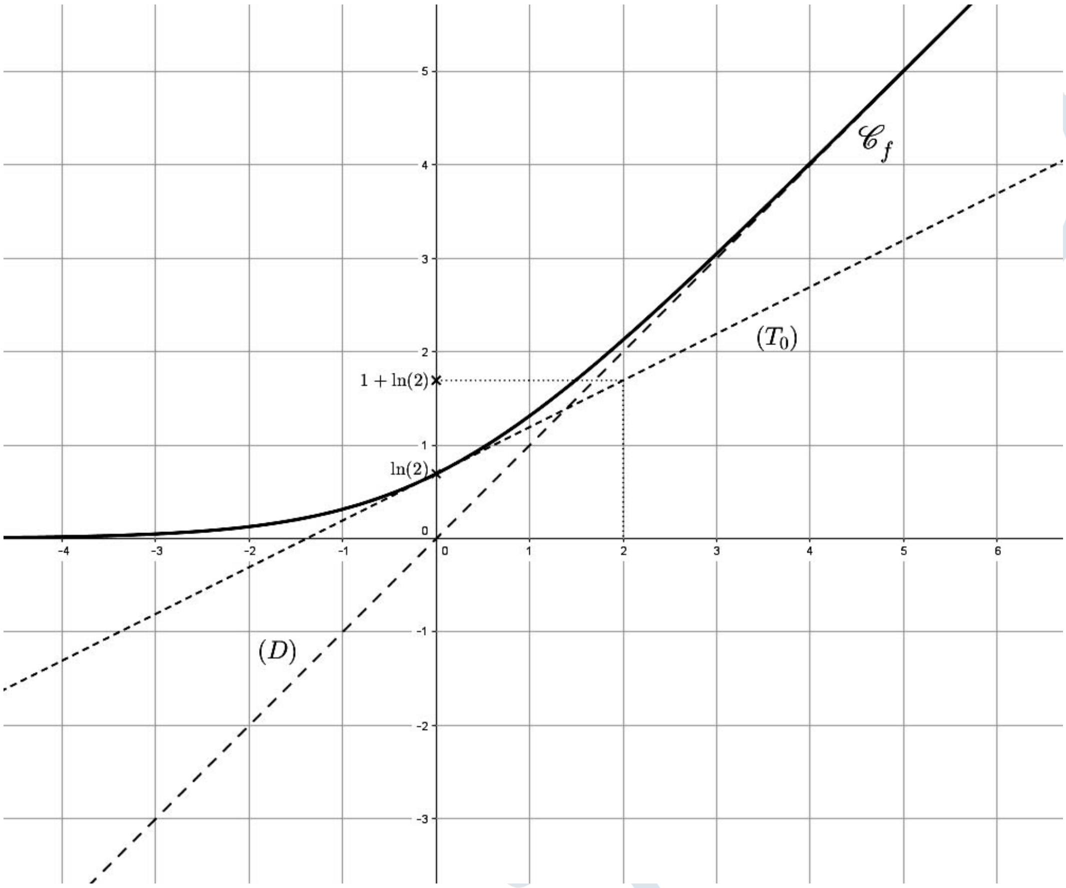
donc :

$$\boxed{\text{une équation de } (T_0) \text{ est : } y = \frac{1}{2}x + \ln(2).}$$

6. (a) D'après ce qui précède, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Les allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ et des droites (D) et (T_0) sont les suivantes :



Remarque : dans cette question, il convient de tenir compte :

- du fait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- des limites de f en $+\infty$ et $-\infty$,
- de la valeur de $f(0)$,
- du fait que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de cette droite sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 2

7. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soit x un élément de $[0, 1]$. On a :

$$\begin{array}{lll}
n+1 \geq n & \text{d'où} & (n+1)x \geq nx \quad (x \geq 0) \\
& \text{d'où} & -(n+1)x \leq -nx \\
& \text{d'où} & \mathrm{e}^{-(n+1)x} \leq \mathrm{e}^{-nx} \quad (\text{par croissance de } x \longmapsto \mathrm{e}^x \text{ sur } \mathbb{R}) \\
& \text{d'où} & 1+\mathrm{e}^{-(n+1)x} \leq 1+\mathrm{e}^{-nx} \\
& \text{d'où} & \ln\left(1+\mathrm{e}^{-(n+1)x}\right) \leq \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right) \quad (\text{par croissance de } x \longmapsto \ln(x) \text{ sur } [1, +\infty[) \\
& \text{d'où} & g_{n+1}(x) \leq g_n(x).
\end{array}$$

On a bien obtenu, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $[0, 1]$:

$$\boxed{g_{n+1}(x) \leq g_n(x).}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a, pour tout x de $[0,1]$:

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x).$$

On en déduit (par croissance de l'intégrale avec des bornes triées dans l'ordre croissant) : $\displaystyle\int_0^1 g_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui se réécrit :

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geq 0} \text{ est bien décroissante.}}$$

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Pour tout x de $[0,1]$, on a : $1+\mathrm{e}^{-nx} > 1$. Avec la stricte croissance de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ sur $[1,+\infty[$, on en déduit que, pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$\ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right) > \ln(1) = 0.$$

Par conséquent :

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ et donc minorée (par 0). Comme elle est de plus décroissante (*cf* question précédente), on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geq 0} \text{ est convergente.}}$$

8. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 1 \times \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x \times \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{-n\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \quad (*) \\
&= \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) - 0 + n\int_0^1 x\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par intégration par parties, les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$ étant dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$.

On a bien, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{I_n = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x.}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [0,1],\ 1+\mathrm{e}^{-nx} \geq 1 \quad \text{d'où} \quad \forall x \in [0,1],\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} \leq 1 \quad \left(\text{par décroissance de } x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ sur } [1,+\infty[\right) \\
&\text{d'où} \quad \forall x \in [0,1],\ \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}} \leq x\,\mathrm{e}^{-nx} \quad \left(\forall x \in [0,1],\ x\,\mathrm{e}^{-nx} \geq 0\right) \\
&\text{d'où} \quad \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

d'où $\quad n\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leq n\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \quad (n \geq 0)$

d'où $\quad \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leq \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$

d'où $\quad I_n \leq \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ (*cf* question précédente).

Avec ce que l'on a vu dans la question 7.(c), on peut en effet conclure que, l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.}$$

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[x \times \left(\frac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(\frac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right)\mathrm{d}x \quad (*)\\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} - 0 + \frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}\\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right]_0^1\\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} - \left(\frac{-1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^2} + \frac{1}{n^2}\\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{-\mathrm{e}^{-n}+1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par intégration par parties, les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ étant dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$.

On a en effet, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}.}$$

(d) D'après les deux questions précédentes, on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\left(\frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$0 \leq I_n \leq \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) - \mathrm{e}^{-n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

On montre comme plus haut que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) = 0.$$

De plus, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ (par composition), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{-n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0.$$

Par conséquent (par somme) :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) - \mathrm{e}^{-n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0.$$

Le théorème d'encadrement permet donc de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

9. (a) La fonction suivante convient :

```
import numpy as np

def gn(n,x):
    return np.log(1+np.exp(-n*x))
```

(b) Vu la figure obtenue, on peut conjecturer que :

$$\boxed{\text{la suite } (nI_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$$

Remarque : de plus, vu le code fourni, il semble que la limite de la suite $(nI_n)_{n\geq 1}$ soit $\dfrac{\pi^2}{12}$.

EXERCICE 3

1. - Pour tout x de $]-\infty, s[$, $f(x) = 0 \geq 0$ et, pour tout x de $[s, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\overbrace{2s^2}^{>0}}{\underbrace{x^3}_{\geq s^3 > 0}} \geq 0.$

   Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)$ est positif.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de s (car constante sur $]-\infty, s[$ et un quotient de polynômes -dont le dénominateur ne s'annule pas- sur $]s, +\infty[$).
   - Comme f est nulle sur $]-\infty, s[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

   Pour tout réel A de $[s, +\infty[$:

$$\int_s^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_s^A \frac{2s^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = s^2\int_s^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = s^2\left[\frac{-1}{x^2}\right]_s^A = s^2\left(\frac{-1}{A^2} - \left(\frac{-1}{s^2}\right)\right) = s^2\left(\frac{-1}{A^2} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{-s^2}{A^2} + 1$$

   et comme : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{-s^2}{A^2} + 1 = 1$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que l'on a : $\displaystyle\int_s^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

   Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_s^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

   Finalement:

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

2. Soit x un réel. Déterminons $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

   - Cas $x < s$. On a alors :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

   - Cas $s \leq x$. On a alors :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}t + \int_s^x \frac{2s^2}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + s^2\int_s^x \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= s^2\left[\frac{-1}{t^2}\right]_s^x \\
&= s^2\left(\frac{-1}{x^2} - \left(\frac{-1}{s^2}\right)\right) \\
&= \frac{-s^2}{x^2} + 1 \\
&= -\left(\frac{s}{x}\right)^2 + 1.
\end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, s[\\ 1 - \left(\dfrac{s}{x}\right)^2 & \text{si} \quad x \in [s, +\infty[\end{cases}.}$$

3. Pour tout x de $]s, +\infty[$, on a :

$$F'(x) = 0 - 2 \times \left(\frac{-s}{x^2}\right) \times \left(\frac{s}{x}\right)^1 = \frac{2s^2}{x^3}.$$

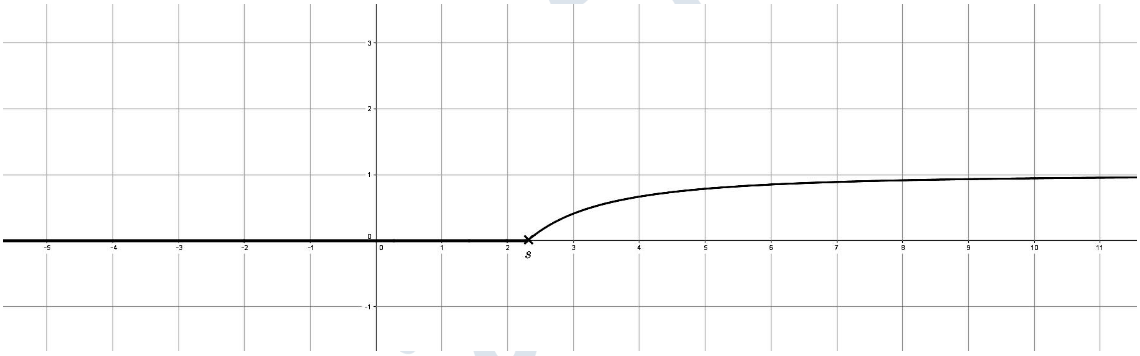
Comme F est continue en s (F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité), on en déduit le tableau de variations suivant :

x	s	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	0 $\nearrow$	1

Détails : $F(s) = 1 - \left(\dfrac{s}{s}\right)^2 = 1 - 1^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{s}{x} = 0$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2 = 1.$$

La courbe représentative de F (sur $\mathbb{R}$) est la suivante :



Remarques :

- Une autre démarche pour obtenir la dérivée de F sur $]s, +\infty[$ consiste à constater que f est continue sur $]s, +\infty[$ ce qui permet d'affirmer que F est dérivable sur $]s, +\infty[$ et que, pour tout x de cet ensemble, on a : $F'(x) = f(x)$.

- La fonction F est dérivable sur $]s, +\infty[$ car la fonction $x \longmapsto \left(\dfrac{s}{x}\right)^2$ est dérivable sur $]s, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales (le dénominateur ne s'annulant pas sur $]s, +\infty[$). En revanche, la fonction F n'est pas dérivable en s, c'est la raison pour laquelle on a considéré x appartenant à $]s, +\infty[$ et pas à $[s, +\infty[$ lors du calcul de la dérivée de F (F est néanmoins dérivable à droite de s et l'égalité $F'(x) = \dfrac{2s^2}{x^3}$ est valable pour tout x de $[s, +\infty[$ en assimilant dérivée et dérivée à droite dans le cas particulier $x = s$, ce qui est peut-être toléré vu la question posée).

4. (a) On a vu dans la question précédente que F est continue et strictement croissante sur $[s, +\infty[$. Avec le théorème de la bijection, on en déduit que :

$$\boxed{F \text{ réalise une bijection de } [s, +\infty[\text{ sur } \left[F(s), \lim_{x \to +\infty} F(x)\right[= [0, 1[.}$$

(b) Soit y un élément de $[0, 1[$. On a :

$$\begin{array}{lll} 0 \leq y < 1 & \text{d'où} & 0 \geq -y > -1 \\ & \text{d'où} & 1 \geq 1 - y > 0 \\ & \text{d'où} & 1 \leq \dfrac{1}{1-y} \quad (\text{par décroissance de } x \longmapsto \dfrac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[) \\ & \text{d'où} & \sqrt{1} \leq \sqrt{\dfrac{1}{1-y}} \quad (\text{par croissance de } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ sur } [1, +\infty[) \\ & \text{d'où} & 1 \leq \sqrt{\dfrac{1}{1-y}} \\ & \text{d'où} & s \leq s\sqrt{\dfrac{1}{1-y}} \quad (s > 0) \\ & \text{d'où} & s \leq G(y). \end{array}$$

On a donc bien, pour tout y de $[0, 1[$:

$$\boxed{G(y) \in [s, +\infty[.}$$

(c) Soit y un élément de $[0, 1[$. On a :

$$F(G(y)) = F\left(s\sqrt{\frac{1}{1-y}}\right) \underset{(*)}{=} 1 - \left(\frac{s}{s\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-y}} = 1 - \frac{1-y}{1} = 1 - 1 + y = y.$$

Détail de $(*)$: d'après la question précédente, $s\sqrt{\dfrac{1}{1-y}} \geq s$ et d'après la question 2., pour tout z de $[s, +\infty[$, $F(z) = 1 - \left(\dfrac{s}{z}\right)^2$.

On a bien obtenu, pour tout y de $[0, 1[$:

$$\boxed{F(G(y)) = y.}$$

5. (a) La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1[$ est la fonction F_U définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x-0}{1-0} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}.}$$

(b) • Soit x un élément de $[s, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(V \leq x) & = & P(G(U) \leq x) \\ & = & P(F(G(U)) \leq F(x)) \quad (*) \\ & = & P(U \leq F(x)) \quad (**) \\ & = & F_U(F(x)) \\ & = & F(x) \quad (\text{car } 0 \leq F(x) < 1 \text{ -}cf \text{ question 3.}) \end{array}$$

Détail de $(*)$: justifions que les événements $[G(U) \leq x]$ et $[F(G(U)) \leq F(x)]$ sont égaux. Si l'événement $[G(U) \leq x]$ est réalisé, alors on a : $G(U) \leq x$ et, par croissance de F, $F(G(U)) \leq F(x)$ donc l'événement $[F(G(U)) \leq F(x)]$ est réalisé.
Supposons que l'événement $[F(G(U)) \leq F(x)]$ est réalisé et montrons que l'événement $[G(U) \leq x]$ l'est. S'il ne l'était pas, on aurait $G(U) > x$ et, par stricte croissance de F sur $[s, +\infty[$, on aurait $F(G(U)) > F(x)$ ce qui est exclu.
Détail de $(**)$: d'après la question 4.(c), qui s'applique car U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$ ce qui permet de supposer que U est à valeurs dans $[0, 1[$ (une densité de U est la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$ qui est nulle en dehors de $[0, 1[$).

On a bien obtenu, pour tout x de $[s, +\infty[$:

$$\boxed{P(V \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).}$$

- Soit x un élément de $]-\infty, s[$. D'après la question 4.(b) (qui s'applique car on peut supposer que U est à valeurs dans $[0, 1[$), $G(U)$ est à valeurs dans $[s, +\infty[$, d'où :

$$P(V \leq x) = P\left(G(U) \leq x\right) = P(\varnothing) = 0.$$

On a bien obtenu, pour tout x de $]-\infty, s[$:

$$\boxed{P(V \leq x) = 0.}$$

(c) Notons F_V la fonction de répartition de V. D'après la question précédente, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < s \\ F(x) & \text{si} \quad s \leq x \end{cases} \underset{(cf\ 2.)}{=} \begin{cases} F(x) & \text{si} \quad x < s \\ F(x) & \text{si} \quad s \leq x \end{cases} = F(x).$$

Par conséquent, V et S ont la même fonction de répartition, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{V \text{ est une variable aléatoire de même loi que } S.}$$

6. On peut compléter la fonction `S` de la façon suivante :

```
import numpy.random as rd

def S(s):
    U = rd.random()
    S = s*np.sqrt(1/(1-U))
    return S
```

Détail : on utilise la question précédente qui permet d'affirmer que si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $G(U)$ $\left(= s\sqrt{\dfrac{1}{1-U}}\right)$ a la même loi que S.

7. La variable aléatoire S admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, auquel cas : $E(S) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.
Comme f est nulle sur $]-\infty, s[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Pour tout réel A de $[s, +\infty[$:

$$\int_s^A x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_s^A x\frac{2s^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2s^2\int_s^A \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2s^2\left[\frac{-1}{x}\right]_s^A = 2s^2\left(\frac{-1}{A} - \left(\frac{-1}{s}\right)\right) = 2s^2\left(\frac{-1}{A} + \frac{1}{s}\right) = \frac{-2s^2}{A} + 2s$$

et comme : $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{-2s^2}{A} + 2s = 2s$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que l'on a : $\displaystyle\int_s^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_s^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2s = 2s.$$

Finalement :

$$\boxed{S \text{ admet une espérance, donnée par : } E(S) = 2s.}$$

8. La variable aléatoire S admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance, c'est-à-dire, si et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Comme f est nulle $]-\infty, s[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or, pour tout réel A de $[s, +\infty[$:

$$\int_s^A x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_s^A x^2 \frac{2s^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \int_s^A \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2s^2\,[\ln(x)]_s^A = 2s^2\,(\ln(A) - \ln(s))$$

et comme : $\lim\limits_{A\to+\infty} 2s^2\,(\ln(A) - \ln(s)) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
Par conséquent :

$$\boxed{S \text{ n'admet pas de variance.}}$$

9. La probabilité qu'un employé ait un salaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$ est donnée par :

$$\begin{aligned} P\left(S \geq \frac{3}{2}s\right) &= 1 - F\left(\frac{3}{2}s\right) \\ &= 1 - \left(\frac{s}{\frac{3s}{2}}\right)^2 \quad (\textit{cf} \text{ question 2.}) \\ &= 1 - \left(\frac{2s}{3s}\right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{4}{9} \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

On a en effet obtenu que :

$$\boxed{\text{la probabilité qu'un employé ait un salaire d'au moins } \frac{3}{2}s \text{ est égale à : } \frac{4}{9}.}$$

10. La variable aléatoire N_n est égale au nombre de réalisations de l'événement «le salarié considéré a un salaire horaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$», événement qui se réalise avec probabilité (constante) $\dfrac{4}{9}$ (*cf* question précédente) au cours de n expériences successives aléatoires indépendantes (par indépendance mutuelle de S_1, S_2, …, S_n).
On en déduit que :

$$\boxed{N_n \text{ suit la loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{4}{9}\right).}$$

11. D'après la question précédente, N_n admet une espérance et une variance, donnée par :

$$\boxed{E(N_n) = n \times \frac{4}{9} = \frac{4n}{9} \text{ et } V(N_n) = n \times \frac{4}{9} \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{4n}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20n}{81}.}$$

12. La probabilité qu'au plus 2 employés parmi les n aient un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
& P\left(N_n \leq 2\right) \\
= \ & P\left([N_n = 0] \cup [N_n = 1] \cup [N_n = 2]\right) \\
= \ & P(N_n = 0) + P(N_n = 1) + P(N_n = 2) \quad (*) \\
= \ & \binom{n}{0}\left(\frac{4}{9}\right)^0\left(1 - \frac{4}{9}\right)^{n-0} + \binom{n}{1}\left(\frac{4}{9}\right)^1\left(1 - \frac{4}{9}\right)^{n-1} + \binom{n}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(1 - \frac{4}{9}\right)^{n-2} \quad \left(\text{car } N_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{4}{9}\right)\right) \\
= \ & \frac{n!}{0!n!}\left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{(n-2)!}{2!(n-2)!}\frac{16}{91}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \\
= \ & \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!}\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2(n-2)!}\frac{16}{91}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \\
= \ & \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{4n}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{8n(n-1)}{91}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité 2 à 2 des événements $[N_n = 0]$, $[N_n = 1]$ et $[N_n = 2]$.
Finalement :

$$\boxed{\text{la probabilité qu'au plus 2 employés parmi les } n \text{ aient un salaire horaire d'au moins } \frac{3}{2}s}$$

$$\boxed{\text{est égale à : } \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{4n}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{8n(n-1)}{91}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}.}$$

13. (a) Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, S_k admet une espérance, donnée par : $E(S_k) = E(S) = 2s$ (*cf* question 7.). On en déduit que M_n admet une espérance qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
E(M_n) &= E\left(\frac{1}{2n}\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n}E\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) \\
&= \frac{1}{2n}\left(E(S_1) + E(S_2) + \ldots + E(S_n)\right) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{2n}\underbrace{(2s + 2s + \ldots + 2s)}_{n \text{ termes}} \\
&= \frac{1}{2n} \times 2sn \\
&= s.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{E(M_n) = s.}$$

(b) Dans ce programme, on simule S_1, S_2, …, S_{1000} via 1000 simulations de la variable aléatoire S (avec $s = 1330$) et à la fin de celui-ci :

$$\boxed{F \text{ contient la liste des valeurs prises par } M_1, M_2, \ldots, M_{1000}.}$$

(c)

- On obtient des courbes différentes car :

$$\boxed{\text{les valeurs contenues dans la liste } F \text{ sont obtenues à partir de simulations}}$$

$$\boxed{\text{de } S\text{, simulations qui sont aléatoires.}}$$

- Vu les courbes obtenues :

$$\boxed{\text{on peut conjecturer que plus } n \text{ est grand, plus les valeurs prises par } M_n \text{ sont proches de } s \text{ (=1330 ici).}}$$