

CORRECTION : EDHEC 2023

**Exercice 1 :**

| Algèbre linéaire, trace, matrices, diagonalisation

- 1) Comme M est la matrice représentative de f , on sait que $\dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Ker}(M)$. Or, par le théorème du rang on sait que $\dim \text{Ker}(M) = n - \text{rg}(M) = n - 1$. Donc :

$$\dim \text{Ker}(f) = n - 1.$$

Comme le noyau de f n'est pas réduit à zéro, on sait que f n'est pas bijectif, donc :

$$0 \text{ est une valeur propre de } f.$$

- 2) a) Comme M est de rang 1, on sait que toutes ses colonnes sont proportionnelles, en notant C_i la i -ème colonne de M on sait alors qu'il existe des réels $\ell_2, \dots, \ell_n$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, C_i = \ell_i C.$$

Posons alors $L = (1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n)$ et on obtient bien :

$$M = CL.$$

**Remarque**

| Pour ceux qui ne sont pas entièrement satisfaits, faites le calcul à la main CL et vous verrez clairement apparaître la matrice M .

- b) Par définition de la trace on sait que $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

$$\text{De plus, } LC = (1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n) \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = m_{1,1} + \sum_{i=2}^n \ell_i m_{i,1}. \text{ Considérons alors } i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \text{ comme d'après la}$$

question précédente $C_i = \ell_i C$, on a en particulier : $m_{i,i} = \ell_i m_{i,1}$. On obtient donc $\sum_{i=2}^n \ell_i m_{i,1} = \sum_{i=2}^n m_{i,i}$, puis :

$$\text{Tr}(M) = LC.$$

- c) $M^2 = CLCL = C\text{Tr}(M)L = \text{Tr}(M)CL = \text{Tr}(M)M$. La première égalité découle de la question 2)a), la deuxième de la question 2)b), la troisième découle du fait que $\text{Tr}(M)$ est un réel, puis la dernière de la 2)a). On a donc :

$$M^2 = \text{Tr}(M)M.$$

3) Remarquons à l'aide de la question 2)b) :

$MC = CLC = C\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M)C$, comme C est non nul, $\text{Tr}(M)$ est une valeur propre de M associée au vecteur propre C , et comme M représente f dans la base canonique on peut conclure :

$\text{Tr}(M)$ est une valeur propre de f .

4) On suppose $\text{Tr}(M) = 0$. D'après la question 2)c) on remarque le polynôme $P(x) = x^2 - \text{Tr}(M)x$ est annulateur de M , ses deux racines sont clairement 0 et $\text{Tr}(M)$. Les deux valeurs propres possible pour f (car M représente f dans la base canonique) sont donc 0 et $\text{Tr}(M)$.

Par la première question de l'exercice, on sait que 0 est bien une valeur propre de f et par la question précédente $\text{Tr}(M)$ est aussi une valeur propre de f .

Les valeurs propres de f sont 0 et $\text{Tr}(M)$.

Comme on suppose ici que $\text{Tr}(M) = 0$ alors f possède une unique valeur propre qui est 0. Dès lors, à l'aide de la question 1) :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_0(f)) = n - 1 \neq n.$$

f n'est pas diagonalisable.

Remarque

| Un raisonnement par l'absurde est acceptable aussi pour cette question.

5) Dans l'argument de la question précédente nous avons déjà justifié (indépendamment de l'hypothèse $\text{Tr}(M) = 0$) que les valeurs propres de f sont 0 et $\text{Tr}(M)$.

Comme on suppose ici $\text{Tr}(M) \neq 0$, f possède deux valeurs propres distinctes. De plus, on sait que $\dim E_0(f) = n - 1$ et comme C est un vecteur propre associé à la valeur propre $\text{Tr}(M)$, on sait que $\dim E_{\text{Tr}(M)}(f) \geq 1$. On obtient alors que la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est supérieur ou égale à n , mais par le cours on sait que cette somme est inférieur ou égale à n , ainsi elle est égale et on peut conclure :

f est diagonalisable.

6) a) Supposons $ac \neq b$.

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right)z = 0 \\ \left(c - \frac{b}{a}\right)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{1}{c} - \frac{a}{b}$ et $c - \frac{b}{a}$ sont non nuls, en effet ces deux quantités valent 0 si et seulement si $ac - b = 0$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Les deux dernières lignes du système donnent alors $y = z = 0$. On en déduit donc que la première donne aussi $x = 0$. On vient donc de montrer que la seule solution au système $AX = 0$ est $X = 0_3$. Ainsi, le noyau de A est réduit au singleton nul et par conséquent A est inversible, ce qui est absurde.

$$\boxed{ac = b.}$$

- b) La deuxième colonne de A est proportionnelle à la première, en effet $a \times C_2 = C_1$ (en utilisant $ac = b$). De même, on a $b \times C_3 = C_1$ (en utilisant $b/c = a$ car $b \neq 0$). De plus, comme la première colonne de A est non nulle ($a \neq 0$), on peut conclure :

$$\boxed{\text{rg}(A) = 1.}$$

- 7) a) Par le théorème du rang et la question précédente on sait que le noyau de A est de dimension 2, donc 0 est une valeur propre de A et son sous-espace propre associé est de dimension 2.

En utilisant la partie 1, on remarque, en notant C la colonne 1 de A :

$$AC = \begin{pmatrix} 1 + 1 + 1 \\ a + a + b/c \\ b + ca + b \end{pmatrix} = 3C \text{ (à l'aide de la relation } ac = b\text{)}. \text{ Comme } C \neq 0, \text{ on sait que 3 est une valeur}$$

propre de A associé au vecteur propre C . Le même raisonnement que celui de la question 5 nous permet d'affirmer (car A représente g dans la base canonique) :

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 3.}}$$

- b) Comme A vérifie les hypothèse de la partie 1, on sait que $A^2 = \text{Tr}(A)A = 3A$. Une récurrence immédiate montre alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = 3^{n-1}A$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } A^n \text{ appartient à Vect}(A).}$$

**Exercice 2 :**

I Loi de Pareto, densité, intégrales impropres, python

- 1) f est positive et continue sur $] -\infty, 1[$ car c'est la fonction nulle. Soit $x \geq 1$, comme $c > 2$ et $x^{c+1} > 0$, f est continue et positive sur $[1, +\infty[$ comme quotient bien définie de telles fonctions. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et positive sur $\mathbb{R}$.

Comme f est nulle sur $] -\infty, 1[$, $\int_{-\infty}^1 f(t)dt$ converge et vaut 0. Considérons $A > 1$,

$$\int_1^A f(t)dt = c \int_1^A t^{-c-1}dt = c \left[\frac{t^{-c}}{-c} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^c}. \text{ Comme } c > 2,$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(t)dt = 1.$$

Cette limite étant finie, on sait alors par la relation de Chasles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge et vaut } 1.$$

f peut être considérée comme une densité.

- 2) Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, et que $t \mapsto tf(t)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, on sait que :

X possède une espérance si et seulement si $\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

$$\text{Soit } A > 1, \int_1^A tf(t)dt = c \int_1^A t^{-c}dt = c \left[\frac{t^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A = \frac{c}{1-c} \left(\frac{1}{A^{c-1}} - 1 \right).$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient alors :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A tf(t)dt = \frac{c}{c-1}.$$

La limite étant finie, on en déduit :

X admet un moment d'ordre 1 qui vaut $\frac{c}{c-1}$.

De même, on sait que :

X possède un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.

$$\text{Soit } A > 1, \int_1^A t^2 f(t)dt = c \int_1^A t^{-c+1}dt = c \left[\frac{t^{-c+2}}{-c+2} \right]_1^A = \frac{c}{2-c} \left(\frac{1}{A^{c-2}} - 1 \right).$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient alors car $c > 2$:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A t^2 f(t)dt = \frac{c}{c-2}.$$

La limite étant finie, on en déduit que X admet un moment d'ordre deux, donc une variance. La formule de Koenig-Huygens nous donne alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 = \frac{-c}{(c-2)(c-1)^2}.$$

$$X \text{ possède une variance qui vaut } \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}.$$

3) Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on sait que pour $x < 1$ $F(x) = 0$.

Soit $x \geq 1$,

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = c \int_1^x t^{-c-1}dt = c \left[\frac{t^{-c}}{-c} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^c}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

4) a) Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on sait que $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.

Si $x < 0$: $G(x) = 0 = F(x)$.

Si $x \geq 0$: $G(x) = \mathbb{P}(\ln(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq e^x) = F(e^x)$.

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(e^x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

b) En utilisant la question précédente et la question 3), on obtient (car $e^x \geq 1$ pour $x \geq 0$) :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre c . Comme la fonction de répartition caractérise la loi :

$$Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } c.$$

```
c) import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulX(c) :
    return np.exp(rd.exponential(c))
```

En effet, comme $Y = \ln(X)$, on a $X = e^Y$ et on sait que Y suit une loi exponentielle de paramètre c .

```
5) def simulZ(c) :
    return simulX(c) * simulX(c)
```

6) L'existence du moment d'ordre 1 et du moment d'ordre 2 de Z découle du fait que Z est un produit de variables aléatoires indépendantes qui possèdent un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2.

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes : $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$ par la question 2).

De même, le lemme des coalitions nous assure l'indépendance entre X_1^2 et X_2^2 donc :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2 X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2) \mathbb{E}(X_2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}.$$

La formule de Koenig-Huygens nous donne alors :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \left(\frac{c^2}{(c-1)^2}\right)^2 = \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-1)^4(c-2)^2} = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.$$

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{c^2}{(c-1)^2}, \mathbb{E}(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2} \text{ et } \mathbb{V}(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.$$

- 7) a) cY_1 est une transformation affine de Y_1 , c'est donc une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f_{cY_1}(t) = \frac{1}{|c|} f_{Y_1}\left(\frac{t-0}{c}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{c}{c} e^{-c\frac{t}{c}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \text{ car } Y_1 \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } c. \text{ On reconnaît alors une densité d'une loi exponentielle de paramètre 1, comme la densité caractérise la loi :}$$

cY_1 et cY_2 suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

Remarque

I On pouvait aussi simplement utiliser les propriétés du cours sur la loi exponentielle ...

- b) Comme la loi exponentielle de paramètre 1 coïncident avec la loi gamma de paramètre 1, on sait que cY_1 et cY_2 suivent la loi gamma de paramètre 1. De plus, comme X_1 et X_2 sont indépendantes et que cY_1 et cY_2 sont respectivement fonction de X_1 et de X_2 , le lemme des coalitions nous donne l'indépendance entre cY_1 et cY_2 . On obtient alors, par stabilité de la loi gamma :

$cY_1 + cY_2$ suit la loi gamma de paramètre 2.

- 8) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{c}(cY_1 + cY_2) \leq x\right) = K(cx)$.

Comme K est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Ainsi, par composition avec la fonction $x \mapsto cx$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on sait que H est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par conséquent, $Y_1 + Y_2$ est à densité et une densité h de $Y_1 + Y_2$ est donnée par H' là où elle est dérivable et en attribuant une valeur arbitraire positive ailleurs. On obtient alors :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cK'(cx) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Comme $cY_1 + cY_2$ suit la loi gamma de paramètre 2, pour $x \geq 0$ on a en notant k une densité de $cY_1 + cY_2$:

$$K'(cx) = k(cx) = \frac{(cx)^{2-1} e^{-cx}}{\Gamma(2)} = cxe^{-cx}.$$

Finalement,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- b) $Z(\Omega) = [1, +\infty[$.

Si $x < 1$: $F_Z(x) = 0$.

Si $x \geq 1$: $F_Z(x) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) = \mathbb{P}(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x)) = \mathbb{P}(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x)) = H(\ln(x))$.

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ H(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Pour les mêmes raisons que celles citées à la question 8)a) on sait que Z est une variable aléatoire à densité et une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} H'(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Pour $x \geq 1$, $H'(\ln(x)) = h(\ln(x)) = c^2 \ln(x) e^{-c \ln(x)} = \frac{c^2 \ln(x)}{x^c}$ par la question 8)a). On obtient finalement :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

9) a) Soit $\alpha > 1$, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A > 1$, posons :
$$\begin{cases} u(t) = \ln(x) & u'(t) = \frac{1}{x} \\ v'(t) = x^{-\alpha} & v(t) = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v étant clairement de classe C^1 sur $[1, A]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx &= \left[\frac{\ln(x) x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \int_1^A x^{-\alpha} dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^A \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{A^{\alpha-1}(\alpha-1)} \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} = 0$ par croissance comparée car $\alpha - 1 > 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}(\alpha-1)} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Cette dernière limite étant finie, on peut conclure :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

b) Comme on sait que $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ existent, on a :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_1^{+\infty} x c^2 \frac{\ln(x)}{x^{c+1}} dx = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} = c^2 \frac{1}{(1-c)^2} = \frac{c^2}{(c-1)^2}.$$

L'avant dernière égalité découle de la question précédente.

$$\text{De même, } \mathbb{E}(Z^2) = \int_1^{+\infty} x^2 c^2 \frac{\ln(x)}{x^{c+1}} dx = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} = c^2 \frac{1}{(1-(c-1))^2} = \frac{c^2}{(c-2)^2}.$$

Comme on retrouve bien les mêmes moments d'ordre 1 et 2, on peut conclure que l'on retrouve bien la même espérance et la même variance.

**Exercice 3 :**

I Pile ou Face, discrètes, python.

- 1) a) Si on obtient Pile au premier lancer alors X prend la valeur 0, et si on n'obtient que des Faces alors il n'y aura jamais "avant la premier Pile", donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit alors $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\ &= q^k p.\end{aligned}$$

La loi de X est donnée par : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = q^k p \end{cases}$.

- b) Remarquons à l'aide de la question précédente, que la variable aléatoire $T = X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p . Ainsi, $X = T - 1$ est une combinaison linéaire d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, donc X admet bien une espérance et une variance et on a :

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$

**Remarque**

I On pouvait évidemment faire plus compliqué en calculant à la main...

- 2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$, Supposons l'événement $(Q = k)$ réalisé, alors $X = 3k + R$. Comme R ne prend que trois valeurs (0, 1 et 2), on en déduit que $X = 3k$ ou $X = 3k + 1$ ou $X = 3k + 2$, on a donc l'inclusion :

$$(Q = k) \subset (X = 3k) \cup (X = 3k + 1) \cup (X = 3k + 2)$$

Réciproquement, si X prend une des trois valeurs $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$ alors d'après le principe de la division euclidienne, on a nécessairement $Q = k$. Finalement,

$(Q = k) = (X = 3k) \cup (X = 3k + 1) \cup (X = 3k + 2).$

- b) Soit $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q = k) &= \mathbb{P}((X = 3k) \cup (X = 3k + 1) \cup (X = 3k + 2)) \\ &= \mathbb{P}(X = 3k) + \mathbb{P}(X = 3k + 1) + \mathbb{P}(X = 3k + 2) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= q^{3k} p + q^{3k+1} p + q^{3k+2} p \quad (\text{par la question 1)a)}) \\ &= p q^{3k} (1 + q + q^2) \\ &= (1 - q) q^{3k} \frac{1 - q^3}{1 - q} \quad (1 + q + q^2 \text{ est une somme géométrique})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - q^3)(q^3)^k \\
&= (1 - q^3)(1 - (1 - q^3))^k
\end{aligned}$$

 Q suit la loi $\text{BN}(1 - q^3)$.

3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R = 0) &= \mathbb{P}(X = 3Q) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} X = 3k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 3k) && (\text{par incompatibilité}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k} \\
&= p \frac{1}{1 - q^3} \\
&= \frac{1 - q}{1 - q^3} \\
&= 1 + q + q^2
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}(R = 1) = \mathbb{P}(X = 3Q + 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} X = 3k + 1\right)$. Donc un raisonnement similaire au pr c dent donne :

$$\mathbb{P}(R = 1) = \frac{q}{1 + q + q^2}.$$

Enfin pour $\mathbb{P}(R = 2)$, il suffit de remarquer $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, donc :

$$\mathbb{P}(R = 2) = 1 - \mathbb{P}(R = 1) - \mathbb{P}(R = 0) = 1 - \frac{1 + q}{1 + q + q^2} = \frac{q^2}{1 + q + q^2}.$$

$$\mathbb{P}(R = 0) = \frac{1}{1 + q + q^2}, \mathbb{P}(R = 1) = \frac{q}{1 + q + q^2} \text{ et } \mathbb{P}(R = 2) = \frac{q^2}{1 + q + q^2}.$$

$$4) \text{ Soit } i \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathbb{P}((R = 0) \cap (Q = i)) = \mathbb{P}(X = 3i) = pq^{3i} \text{ par 1)a).} \\ \mathbb{P}(R = 0)\mathbb{P}(Q = i) = \frac{1}{1 + q + q^2}(1 - q^3)(1 - (1 - q^3))^i = \frac{p}{1 - q^3}(1 - q^3)q^{3i} = pq^{3i} \end{cases}$$

On raisonne de même pour $(R = 1)$ et $(R = 2)$.

 Q et R sont indépendantes.

5) a) Notons Y une loi géométrique de paramètre p , on remarque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y - 1 = k) = \mathbb{P}(Y = k + 1) = q^k p.$$

Par conséquent X et $Y - 1$ suivent la même loi et comme la commande `rd.geometric(p)-1` renvoie une réalisation de $Y - 1$ donc de X :

 La fonction `simulX(p)` renvoie bien une réalisation de X .

```

b) import numpy as np
def div(p) :
    X = simulX(p)
    Q = np.floor(X/3)
    R = X - 3*Q
    return X,Q,R

```

**Problème :**

I Fonctions périodiques, algèbre linéaire et bilinéaire, trigonométrie

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, car $\cos$ est 2π périodique. On vient donc de montrer que pour tout k entier relatif, $h(k+n) = h(k)$. Comme h va de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ on obtient bien :

$$h \in F_n.$$

2) • Par définition de F_n , on a $F_n \subset E$.

• Notons 0_E l'application nulle de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $0_E(k+n) = 0 = 0_E(k)$. Donc $0_E \in F_n$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(h, g) \in F_n^2$, comme h et g sont des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, et que E est un espace vectoriel on sait que $\lambda h + g$ est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$(\lambda h + g)(k+n) = \lambda h(k+n) + g(k+n)$. Mais comme h et g sont dans F_n elle sont n -périodiques, donc : $h(k+n) = h(k)$ et $g(k+n) = g(k)$. On obtient alors :

$$(\lambda h + g)(k+n) = \lambda h(k) + g(k) = (\lambda h + g)(k).$$

Ainsi, la fonction $\lambda h + g$ est n -périodique et appartient à F_n .

$$F_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

3) Soit $f \in F_n$. $f(k) = f(nq+r) = f(n+n(q-1)+r) = f(n(q-1)+r)$ car f est n -périodique. On en déduit alors par itération successives que $f(n(q-1)+r) = f((n-2)q+r) = \dots = f(r)$.

$$f(k) = f(r).$$

**Remarque**

Pour faire propre il faudrait faire une récurrence pour démontrer que : Si f est n -périodique alors

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(pn) = f(p).$$

- 4) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$, écrivons alors $k = nq + r$ avec $r \in I_n$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, comme e_i est un élément de F_n la question 3) nous permet d'affirmer :

$$e_i(k) = e_i(r).$$

On en déduit alors : $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(r)$. De plus, par définition de e_i on a aussi :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f(i)e_i(r) = \begin{cases} f(i) \times 1 & \text{si } i = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} f(r) & \text{si } i = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On obtient donc $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(r) = 0 + \dots + 0 + f(r) \times 1 + 0 + \dots + 0 = f(r)$. D'après la question 3) on sait que $f(k) = f(r)$, on peut donc conclure :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k).}$$

- b) • D'après la question précédente on sait que la famille B_n est génératrice de F_n , en effet on a montré :

$$\forall f \in F_n, f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i.$$

- Montrons que B_n est libre dans F_n en considérant des scalaires $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i e_i = 0_E.$$

On a alors : $\forall k \in \mathbb{Z}, a_0 e_0(k) + \dots + a_{n-1} e_{n-1}(k) = 0$. En remplaçant k par 0 l'égalité précédente devient $a_0 \times 1 + 0 + \dots + 0 = 0$ donc $a_0 = 0$. En faisant de même en remplaçant k par 1, puis par 2, ..., puis par $n-1$, on obtient successivement : $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. La famille est bien libre.

$$\boxed{B_n \text{ est une base de } F_n.}$$

- c) D'après la décomposition de la question 4)a) :

$$\boxed{\forall f \in F_n, f = (f(0), \dots, f(n-1)) \text{ dans la base } B_n.}$$

- 5) a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g, h) \in F_n^3$.

- Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f(k) \in \mathbb{R}$ et $g(k) \in \mathbb{R}$, donc par somme $\langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$.

- $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)f(k) = \langle g, f \rangle$. Donc $\langle, \rangle$ est symétrique.

- $\langle \lambda f + g, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(k) + g(k))h(k) = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ par linéarité de la somme. donc $\langle, \rangle$ est linéaire à gauche, puis par symétrie on en déduit que $\langle, \rangle$ est bilinéaire.

- $\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 \geq 0$. Donc $\langle, \rangle$ est positive.

- Si $\langle f, f \rangle = 0$, comme pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ $f(k)^2 \geq 0$, on en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f(k) = 0$. La fonction f est donc nulle sur I_n , mais comme elle est dans F_n , on sait aussi que c'est une fonction n -périodique, ainsi elle est nulle sur $\mathbb{Z}$ (car elle est nulle sur un intervalle de longueur sa période). $\langle, \rangle$ est définie positive.

$$\boxed{\langle, \rangle \text{ est un produit scalaire sur } F_n.}$$

Remarque

Ce produit scalaire n'a rien d'extraordinaire en tenant compte de la question 4)c), en effet dans ce produit scalaire on somme les produits coordonnées par coordonnées des coefficients des éléments de F_n dans la base B_n , cela ressemble étrangement (ou pas) au produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$...

b) Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k) = \begin{cases} 0 + \dots + 1 \times 0 + 0 + \dots + 0 \times 1 + \dots + 0 & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)^2 = 0 + \dots + 0 + 1 + 0 + \dots + 0 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Où on utilise simplement la définition des e_i . Ainsi, la famille B_n est une famille orthonormale. La question 4)b) nous permet alors de conclure :

B_n est une base orthonormale de F_n pour ce produit scalaire.

c) D'après le résultat admis, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) && (\text{par linéarité}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{i=-1}^{n-2} \sin\left(a + \frac{(2i+1)b}{2}\right) && (\text{en posant } k = i + 1) \\ &= \sin\left(a + \frac{(2(n-1)+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(-2+1)b}{2}\right) && (\text{par télescopage}) \\ &= \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Comme $b \in]0, 2\pi[: \frac{b}{2} \in]0, \pi[$, donc $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$. L'égalité établie précédemment nous permet alors de conclure :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

d) • Posons $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ la question précédente donne alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)}{2 \sin\left(\frac{4\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{n}2\pi\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \quad (\text{car } \sin \text{ est } 2\pi \text{ périodique}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En raisonnant exactement de la même manière en posant cette fois $a = \frac{2\pi}{n}$ et $b = \frac{4\pi}{n}$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = \frac{\sin(0) - \sin(0)}{\sin\left(2\frac{2\pi}{n}\right)} = 0.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0.}$$

e)

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} h(k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}{2} \quad (\text{car } \cos(2a) = 2(\cos(a))^2 - 1). \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n}{2} \quad (\text{par linéarité et la question précédente})
\end{aligned}$$

Comme une norme est toujours positive, on obtient :

$$\boxed{\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}}.$$

6) a) Soient $f \in F_n$ et $k \in \mathbb{Z}$. Comme f est une application de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$, il est clair que $f(k+1) - f(k) \in \mathbb{R}$ donc $D(f) \in E$.

De plus, $D(f)(k+n) = f(k+1+n) - f(k+n) = f(k+1) - f(k) = D(f)(k)$ car f est n -périodique. Ceci étant vrai pour tout k de $\mathbb{Z}$, on obtient que $D(f)$ est n -périodique.

$$\boxed{D(f) \in F_n.}$$

b) La question précédente nous montre que l'application D va de F_n dans F_n .

Considérons alors $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $(f, g) \in F_n^2$:

$D(\lambda f + g)(k) = (\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k) = \lambda(f(k+1) - f(k)) + g(k+1) - g(k) = \lambda D(f)(k) + D(g)(k)$. Ceci étant vrai pour tout k de $\mathbb{Z}$: D est linéaire.

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } F_n.}$$

c) Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
 D(h)(k) &= h(k+1) - h(k) \\
 &= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) \\
 &= -2 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
 &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).
 \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité provient de l'égalité :

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin(a) \sin(b)$$

qui se justifie à l'aide des formules données dans l'énoncé et en utilisant aussi la parité de cos et l'impairité de sin. Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, D(h)(k) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).$$

d)

$$\begin{aligned}
 \|D(h)\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} D(h)(k)^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) && (\text{par la question précédente}) \\
 &= 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{4k\pi}{n}\right)}{2} && (\text{car } \sin(a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}) \\
 &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(n - \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)\right) \\
 &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) (n - 0) && (\text{par la question 5)d}) \\
 &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) n
 \end{aligned}$$

Une norme étant toujours positive, et comme $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$ on obtient bien :

$$\|D(h)\| = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{2n}.$$

7) a) Soit $(f, g) \in F_n^2$.

$$\begin{aligned}
 \langle f, \Delta(g) \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \Delta(g)(k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) (g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{i=-1}^{n-2} f(i+1)g(i)
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{i=-1}^{n-2} f(i+1)g(i) = f(0)g(-1) + \sum_{i=0}^{n-2} f(i+1)g(i) = f(n)g(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} f(i+1)g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i+1)g(i)$
car f et g sont n -périodique. On obtient donc :

$$\langle f, \Delta(g) \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{i=0}^{n-1} f(i+1)g(i)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
-\langle D(f), D(g) \rangle &= - \sum_{k=0}^{n-1} D(f)(k)D(g)(k) \\
&= - \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k))(g(k+1) - g(k)) \\
&= - \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) \\
&= - \sum_{i=1}^n f(i)g(i) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) \quad i = k+1
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{i=1}^n f(i)g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)g(i)$ en utilisant que $f(0)g(0) = f(n)g(n)$ par n périodicité de f et g . Ainsi, on a :

$$-\langle D(f), D(g) \rangle = -2 \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1).$$

On constate bien que :

$$\boxed{\langle f, \Delta(g) = -\langle D(f), D(g) \rangle.}$$

b) Soit $(f, g) \in F_n^2$,

$\langle \Delta(f), g \rangle = \langle g, \Delta(f) \rangle$ par symétrie du produit scalaire. La question précédente nous donne alors :

$$\langle g, \Delta(f) = -\langle D(g), D(f) \rangle.$$

Mais toujours par symétrie du produit scalaire on sait que $\langle D(g), D(f) \rangle = \langle D(f), D(g) \rangle$. On obtient donc :

$$\langle \Delta(f), g \rangle = \langle f, \Delta(g) \rangle.$$

Ceci étant vrai pour tout f et g de F_n , on a :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$$

- c) Comme Δ est un endomorphisme symétrique il admet des valeurs propres. Considérons λ une valeur propre et notons $f \in F_n$ un vecteur propre qui lui est associé. La question 7)a) nous donne :

$$\begin{aligned}
 \langle f, \Delta(f) \rangle = -\langle D(f), D(f) \rangle &\iff \langle f, \lambda f \rangle = -\|D(f)\|^2 && (f \text{ vecteur propre}) \\
 &\iff \lambda \langle f, f \rangle = -\|D(f)\|^2 \\
 &\iff \lambda \|f\|^2 = -\|D(f)\|^2 \\
 &\iff \lambda = -\frac{\|D(f)\|^2}{\|f\|^2} && (\text{car } f \neq 0)
 \end{aligned}$$

Comme une norme est positive, on obtient : $\lambda \leq 0$. Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres de Δ :

Les valeurs propres de Δ sont négatives ou nulles.

8) a) $\Delta(\varepsilon_0)(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1) = 1 - 2 + 1 = 0$.

$\varepsilon_0 \in \text{Ker}(\Delta)$.

b) Considérons $f \in \text{Ker}(\Delta)$,

$$\begin{aligned}
 \Delta(f)(k) = 0 &\iff \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = 0 \\
 &\iff \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1) \\
 &\iff \forall k \in \mathbb{Z}, D(f)(k) = D(f)(k-1) \\
 &\iff D(f) \text{ est constante sur } \mathbb{Z} && (\text{notons } c \text{ sa valeur}) \\
 &\iff \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+1) - f(k) = c \\
 &\implies \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) - f(k) = nc \\
 &\implies f(n) - f(0) = nc \\
 &\implies 0 = c && (\text{car } f \text{ est } n\text{-périodique et } n \neq 0)
 \end{aligned}$$

Comme $c = 0$, on obtient que $D(f)$ est l'application nulle sur $\mathbb{Z}$, d'où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(k+1) = f(k)$$

Ainsi, une récurrence immédiate montre que f est une fonction constante sur $\mathbb{Z}$, c'est donc une combinaison linéaire de ε_0 , et on a :

$$\text{Ker}(\Delta) \in \text{Vect}(\varepsilon_0).$$

Cette inclusion combinée avec celle que nous offre la question précédente nous donne :

$\text{Ker}(\Delta) = \text{Vect}(\varepsilon_0)$.

- 9) a) On sait que Δ est un endomorphisme symétrique il est donc diagonalisable dans une base orthonormale constituée de vecteurs propres de Δ . De plus, par la question 8)b) on sait que $\dim(\text{Ker}(\Delta)) \neq 0$, donc $0 \in \text{Sp}(\Delta)$ avec $E_0(\Delta) = \text{Vect}(\varepsilon_0)$. Ainsi, ε_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Comme $\|\varepsilon_0\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 1^2 = n$ on sait que le vecteur $\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0$ est un vecteur propre orthonormale pour la valeur propre 0. Donc :

Il existe un b.o.n de F_n de la forme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \right)$ constituée de vecteurs propres.

Comme $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$, on sait que $f \in \text{Vect}(\varepsilon_0)^\perp$ et on a aussi $\text{Vect}(\varepsilon_0)^\perp = E_0(\Delta)^\perp$.

De plus, Δ étant symétrique, on a le résultat suivant :

$$F_n = E_0(\Delta) \bigoplus^\perp \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\Delta) \setminus \{0\}} E_\lambda(\Delta) \right).$$

Donc : $f \in E_0(\Delta)^\perp \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\Delta) \setminus \{0\}} E_\lambda(\Delta)$. Ainsi, f est combinaison linéaire de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$:

Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ des réels tels que $f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$.

b) Utilisons le résultat de la question 7)a) en considérant $g = f$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \|D(f)\|^2 &= -\langle f, \Delta(f) \rangle \\
 &= -\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j f(\varepsilon_j) \right\rangle && \text{(par 9)a) et linéarité de } \Delta \\
 &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i \alpha_j \langle \varepsilon_i, f(\varepsilon_j) \rangle && \text{(par bilinéarité)} \\
 &= -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \lambda_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle && \text{(par orthogonalité entre les } \varepsilon_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 |\lambda_i| \|\varepsilon_i\|^2 && \text{(car les valeurs propres sont négatives)} \\
 &\geq c \sum_{i=1}^{n-1} \|\alpha_i \varepsilon_i\|^2 && \text{(car } c \text{ est le minimum des } |\lambda|) \\
 &\geq c \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i \right\|^2 && \text{(par le théorème de Pythagore)} \\
 &\geq c \|f\|^2
 \end{aligned}$$

$\|D(f)\|^2 \geq c \|f\|^2.$

10) a) Comme $\Delta(e_0) \in F_n$, utilisons le résultat de la question 4)b) :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \Delta(e_0)(k) = \sum_{i=0}^2 \Delta(e_0)(i) e_i(k).$$

$$\text{Or, } \Delta(e_0)(0) = e_0(0+1) - 2e_0(0) + e_0(0-1) = -2.$$

$$\Delta(e_0)(1) = e_0(1+1) - 2e_0(1) + e_0(1-1) = 1.$$

$$\Delta(e_0)(2) = e_0(2+1) - 2e_0(2) + e_0(2-1) = e_0(3) = e_0(0) = 1.$$

On en déduit que les coordonnées de $\Delta(e_0)$ dans la base B_3 sont $(-2, 1, 1)$. Comme A est la matrice représentative de Δ dans la base B_3 , on obtient bien :

La première colonne de A est ${}^t(-2 \ 1 \ 1)$.

b) On remarque facilement que $A^2 = -3A$ donc $P(x) = x^2 + 3x$ est un polynôme annulateur de A .

Les racines de ce polynôme sont 0 et -3 , qui sont donc les seules valeurs propres possibles pour Δ (car A représente Δ dans la base B_3).

Remarquons deux choses :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs étant non nuls, on vient de montrer que 0 et -3 sont bien des valeurs propres de Δ .
Donc :

Les valeurs propres de Δ sont 0 et -3 .

Comme -3 est la seule valeur propre non nulle de Δ , on a $c = 3$, on en déduit alors :

$$\forall f \in F_3, \|D(f)\|^2 \geq 3\|f\|^2.$$

c) Par les questions 5)e et 6)d on sait que :

$$\|h\|^2 = \frac{3}{2} \text{ et } \|D(h)\|^2 = 6 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

On remarque alors que $\|D(h)\|^2 = 3\|h\|^2$. Or, on sait que pour tout $f \in F_3$, on a :

$$\|D(f)\|^2 \geq 3\|f\|^2.$$

Comme h est un élément de F_3 , on peut conclure que

$$h \text{ réalise } \min_{f \in F_3} (\|D(f)\|^2 - 3\|f\|^2) \text{ et qu'il vaut } 0.$$