MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - EMLyon 2023

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE 1

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on pose : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont, et :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x+1 > 0$, $x^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Calcul des limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$.

b) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $u_n > 0$", est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ $u_0 = 1$ est défini par l'énoncé, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie. On a supposé (H.R.) que u_n est bien défini et $u_n > 0$, donc $e{-}u_n$ est bien défini et $e^{-u_n} > 0$ par stricte positivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Par quotient de deux réels strictement positifs, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{u_n}$ est bien défini et strictement positif, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2. **Informatique**.

a) La fonction cherche à calculer le plus petit entier n tel que $u_n > a$ (sous réserve qu'il existe), donc on calcule les termes successifs de la suite tant qu'au contraire, $u_n \leqslant a$.

```python
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u <= a :
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

b) La fonction `Python` suivante a été corrigée par rapport à celle de l'énoncé qui contient une erreur : l'inégalité de la boucle while était dans le Mauvais sens ! → pour s'en convaincre on pourra aller lire de sujet Edhec ECS 2016 dans lequel l'erreur n'a pas été commise...

```python
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u > a :
        u = exp(-u)/u
        n = n+1
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5 : cela signifie que $u_6 > 10^6$ (et que c'est le premier terme qui vérifie cela) et que $u_5 <= 10^{-6}$ (et que c'est le premier terme qui a cette propriété).

Tout ceci plaide en défaveur d'une convergence de la suite (u_n) : on peut déjà imaginer que la suite (u_{2n}) des termes de rangs pairs de la suite diverge vers $+\infty$, tandis que la suite des termes de rangs impairs (u_{2n+1}) converge vers 0, ce qui assurera que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

c) Pas de boucle `while` dans cette fonction, une simple boucle `for` suffit :

```python
def suite(n):
    from numpy import exp
    u = 1
    for n in range(1,n+1):
        u = exp(-u)/u
    return u
```

3. Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.

a) La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont,
et : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$, donc g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - x^2 = -\infty$ et $g(0) = e^0 - 0^2 = 1$.
La fonction g est continue - car dérivable - et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$:
d'après le théorème éponyme, elle réalise donc une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans
l'intervalle-image $]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,;g(0)] =]-\infty\,;1]$.

b) Comme 0 appartient à l'intervalle-image précédent, le théorème de la bijection assure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$, seul réel positif, non nul
(car $g(0) = 1 \neq 0$), qui vérifie l'égalité :

$$g(\alpha) = 0 \iff e^{-\alpha} = \alpha^2 \iff \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = \alpha \iff f(\alpha) = \alpha.$$

Par équivalences, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution positive α.

c) On passe par une comparaison d'images :

$$g\Big(\frac{1}{e}\Big) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = e^{-1/e} - e^{-2} \text{ et } g(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1.$$

Comme $3 > e > 2$, alors $-\frac{1}{e} \geqslant -\frac{1}{2} > -2$, donc $e^{-1/e} > e^{-2}$ et $g\big(\frac{1}{e}\big) > 0$.
Par contre, $\frac{1}{e} < 1$ et $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, donc :

$$g\big(\tfrac{1}{e}\big) > g(\alpha) = 0 > g(1) \iff \frac{1}{e} < \alpha < 1 \text{ par stricte décroissance de } g \text{ sur } [0\,;+\infty[.$$

4. a) D'après la relation de récurrence qui définit la suite (u_n) :

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{e^{-1}}{1} = e^{-1} \text{ et } u_2 = f(u_1) = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-\frac{1}{e}}$$

Or comme on l'a déjà vu, $1 - \frac{1}{e} > 0$ donc $e^{1-\frac{1}{e}} > e^0$, soit $u_2 > u_0$.

b) Le plus simple ici est de raisonner par récurrence, en montrant que $\mathcal{P}(n)$: "$u_{2n+2} > u_{2n}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ On vient de voir que $u_2 > u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $u_{2n+4} > u_{2n+2}$.

On a supposé (H.R.) que : $u_{2n+2} > u_{2n}$, donc par décroissance stricte de f sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit successivement :

$$f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}) \iff u_{2n+1} < u_{2n+3}, \text{ puis } f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1}) \iff u_{2n+4} > u_{2n+2},$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} > u_{2n}$, et la suite (u_{2n}) est bien (strictement) croissante.

c) L'hérédité de la récurrence précédente a fait apparaître l'implication désormais vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} > u_{2n} \Longrightarrow f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}), \text{ soit } u_{2n+3} < u_{2n+1}.$$

Cela signifie que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes *de rangs impairs* de la suite (u_n), est décroissante.

Or d'après 1.b) tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, donc la suite (u_{2n+1}) est aussi minorée par 0 : elle est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone.

5. Pour $x \in]0\,;+\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$, et $h(0) = 0$.

a) Pour tout réel x strictement positif : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ est strictement positif, donc $h(x) = f\big(f(x)\big)$ est bien défini, et vaut

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = e^{-e^{-x}/x} \times xe^x = xe^{x-e^{-x}/x}.$$

b) La fonction h est déjà continue sur $]0\,;+\infty[$ car c'est le cas de f, continue sur cet intervalle comme quotient de fonctions qui le sont, et qui est à valeurs dans $]0\,;+\infty[$: h est la composée de deux fonctions continues sur $]0\,;+\infty[$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to0^+} x - \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} e^{x-e^{-x}/x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{x-e^{-x}/x} = 0 \times 0 = 0 = h(0)$.

La fonction h est donc continue en 0, et par conséquent elle l'est aussi sur tout l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) On sait déjà que $h(0) = 0$, donc que 0 est solution de l'équation $h(x) = x$.

Pour tout $x > 0$:

$$h(x) = x \iff xe^{x-e^{-x}/x} = x \iff e^{x-e^{-x}/x} = 1 \iff x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \iff e^{-x} - x^2 = 0 \iff g(x) = 0.$$

On a déjà démontré en 3.b) que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$: il en est donc de même pour l'équation équivalente $h(x) = x$ sur cet intervalle.

Finalement, l'équation $h(x) = x$ admet bien deux solutions dans $[0\,;+\infty[$: 0 et α.

d) La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \geqslant 0$, et comme de plus :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1})$, alors par unicité de la limite et vu que h est continue sur $[0\,;+\infty[$, la limite ℓ est une solution positive de l'équation $h(x) = x$.
Cette limite ne peut pas être α puisque $u_1 = e^{-1} < \alpha$ (voir les questions 3.c) et 4.a)) et la suite est (strictement) décroissante. On en déduit donc par élimination, que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0.$$

6. On peut se contenter ici de remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = f(u_{2n-1})$, où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n-1} = 0^+$ d'après la question précédente ; comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, alors par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_{2n-1}) = +\infty = \lim_{n\to+\infty} u_{2n}.$$

La suite (u_{2n}) des termes de rangs pairs n'est donc pas majorée, mais elle admet bien une limite qui est infinie.

EXERCICE 2

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I - Réduction de la matrice A

1. a) La matrice $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, car ses trois colonnes sont égales et non-nulles.

b) De ce qui précède, on déduit que $A - 2I$ n'est pas inversible, donc que 2 est valeur propre de A.
Le théorème du rang assure par ailleurs que, puisque A est une matrice carrée d'ordre 3 :

$$\dim E_2(A) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I) = 3 - 1 = 2.$$

c) On résout ici le système : $(A - 2I)X = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$: en l'écrivant on constate que les trois lignes du système sont égales, et :

$$(A - 2I)X = 0_{3,1} \iff x + y + z = 0 \iff x = -y - z.$$

Ainsi : $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a trouvé une famille génératrice de $E_2(A)$ formée de deux vecteurs non colinéaires : $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de ce sous-espace propre.

d) D'après le théorème spectral : la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est inférieure ou égal à 3, puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On a déjà ici $\dim E_2(A) = 2$, et un sous-espace propre est toujours de dimension au moins égale à 1 : on en déduit que A a au plus une autre valeur propre.

2. a) Dans cette sous-question, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et U est le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il est alors clair que $MU = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+i \end{pmatrix}$ est le vecteur-colonne dont les éléments sont les sommes des coefficients de chaque ligne de M.

b) Si on applique ce résultat à la matrice A, on constate que : $AU = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot U$, ce qui prouve que le vecteur non-nul U est un vecteur propre pour la valeur propre 5.
Comme on l'a dit auparavant à la question 1.d), le théorème spectral assure alors que $\dim E_5(A) = 1$, et par conséquent U, vecteur non-nul de $E_5(A)$, constitue à lui seul une base de ce sous-espace propre.

3. D'après ce qui précède : A est bien diagonalisable (vu que $\dim E_2(A) + \dim E_5(A) = 3$), semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, via la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ obtenue en juxtaposant les vecteurs de base des deux sous-espaces propres.
Les trois matrices A, D et P sont liées par la formule de changement de base :

$$A = PDP^{-1}.$$

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel : $\begin{cases} x' &= 3x + y + z \\ y' &= x + 3y + z \\ z' &= x + y + 3z \end{cases}$, d'inconnues x, y, z trois fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

4. On résout le système différentiel (S) par la méthode habituelle, en introduisant les vecteurs-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (où x, y, z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

Pour tout réel t, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = AX(t)$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = DP^{-1}X(t), \text{ soit } Y'(t) = DY(t),$$

puisque $A = PDP^{-1} \iff P^{-1}A = DP^{-1}$. Le système $Y' = DY$ s'écrit aussi, en revenant aux composantes : $\begin{cases} a' = 2a \\ b' = 2b \\ c' = 5c \end{cases}$. Les solutions sont donc de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix}, \text{ où } (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Les solutions du système différentiel (S) sont donc les vecteurs-colonnes X de fonctions de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} -(c_1+c_2)e^{2t} + c_3e^{5t} \\ c_1e^{2t} + c_3e^{5t} \\ c_2e^{2t} + c_3e^{5t} \end{pmatrix}, \text{ où } (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

5. a) C'est le théorème de Cauchy qui assure que le système différentiel (S) à coefficients constants, admet une unique solution X_0 qui vérifie $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b) On cherche donc une solution X_0 de la forme obtenue à la question 4., et qui vérifie la condition initiale :

$$X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & -1 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} & & & & 3c_3 & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & -1 & \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 0 & \end{array} \right.$$

   On obtient donc : $c_3 = 0$ puis $c_1 = -1$ et $c_2 = 0$. L'unique solution cherchée est donc définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_0(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Partie III - Un second système différentiel.

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Comme B est une matrice carrée d'ordre 2, on peut utiliser ici le déterminant pour chercher ses valeurs propres :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } B \iff B - \lambda.I_2 \text{ est non-inversible} \iff \det(B - \lambda.I_2) = 0.$$

   Comme $B - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, les valeurs propres λ de B sont donc les solutions de l'équation :

$$(-1-\lambda)(3-\lambda) - (-4) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0.$$

   On en déduit que B admet une seule valeur propre, à savoir $\lambda = 1$.

7. La matrice B n'est évidemment *pas* diagonalisable. Si elle l'était, elle serait alors semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui présente partout sur sa diagonale sa seule valeur propre, via une matrice de passage P inversible.

   Or D est en fait la matrice identité, et la formule de changement de base donnerait alors :

$$B = PDP^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

   La matrice B ne serait alors pas seulement semblable à I_2, elle lui serait *égale*, ce qui n'est bien sûr pas le cas !

   On a donc démontré par l'absurde, que B n'est pas diagonalisable.

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

   On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) L'argument le plus efficace ici pour justifier que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, consiste à dire qu'il s'agit d'une famille libre car formée de deux vecteurs non-colinéaires, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, ce qui suffit pour conclure.

b) Les calculs matriciels avec la matrice B, permettent de calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$:

$$B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

donc $f(v_1) = (2, -1) = v_1$, et $f(v_2) = (1, -1)$ dont on remarque facilement que cela s'écrit aussi : $f(v_2) = v_1 + v_2$.

c) La matrice de f dans la base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ est par conséquent :

$$T = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

d) La formule de changement de base donne la relation : $B = QTQ^{-1}$, où Q est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (v_1, v_2), c'est-à-dire $Q = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

9. On considère dans cette dernière question, le système différentiel $(\Sigma)\begin{cases}x' &= -x - 4y\\ y' &= x + 3y\end{cases}$.

En posant $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ où x et y sont des fonctions réelles dérivables, le système s'écrit $X' = \begin{pmatrix}-1 & -4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, soit $X' = BX$.

On pose alors $Y = Q^{-1}X$, et le système est équivalent au suivant :

$$Y' = Q^{-1}X' = Q^{-1}BX = Q^{-1}BQY, \text{ soit } Y' = TY$$

En posant $Y = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, le nouveau système s'écrit donc : $\begin{cases}a' = a + b\\ b' = b\end{cases}$.

Les solutions de l'équation différentielle $b' = b$ sont les fonctions $b :\ t \mapsto C_2e^t$, où $C_2 \in \mathbb{R}$.

On doit donc résoudre l'équation différentielle $a'(t) = a(t) + C_2e^t$:

l'équation différentielle homogène associée est $a' = a$, qui a la même forme générale des solutions $a :\ t \mapsto C_1e^t$ que précédemment, solutions auxquelles il faut rajouter une solution particulière a_p telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ a_p'(t) = a_p(t) + C_2e^t$.

On doit savoir dans ce cas, que $a_p(t) = C_2te^t$ convient, en effet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_p'(t) = C_2.\left(1.e^t + te^t\right) = C_2.te^t + C_2e^t = a_p(t) + C_2e^t.$$

On en déduit donc que les solutions a sont de la forme $a :\ t \mapsto C_1e^t + C_2.te^t$.

Le système $Y' = TY$ a donc pour solutions : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix}C_1e^t + C_2te^t\\ C_2e^t\end{pmatrix}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Il reste donc à dire que les solutions du système (Σ) sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = QY(t) = \begin{pmatrix}2C_1e^t + 2C_2te^t - C_2e^t\\ -C_1e^t - C_2te^t\end{pmatrix}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

EXERCICE 3

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

   a) La fonction h est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions de référence continues sur cet intervalle.

   Par ailleurs, les croissances comparées assurent que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0 = h(0)$, donc h est aussi continue au point 0 : finalement, h est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   b) Pour étudier la dérivabilité de h en 0, on écrit le taux d'accroissement de la fonction en ce point : pour $x > 0$,

   $$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

   Cette limite infinie assure que h n'est *pas* dérivable en 0.

   c) Il est clair par définition, que 0 est un antécédent de lui-même par h puisque $h(0) = 0$.

   Pour tout $x > 0$: $h(x) = 0 \iff x\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$, donc 0 admet exactement deux antécédents par h, qui sont 0 et 1.

2. Pour tout x dans $[0\,;1]$, on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x) = \begin{cases} -h(1) = 0 \text{ si } x = 0 \\ -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x) \text{ si } 0 < x < 1 \\ -h(1) - 0 = 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$.

   La fonction g est, d'après l'étude de h, continue sur $[0\,;1]$ et dérivable sur $]0\,;1[$, avec pour tout $x \in]0\,;1[$:

   $$h'(x) = -\big(1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x}\big) - \big(-1\times\ln(1-x) + (1-x)\times\frac{-1}{1-x}\big) = -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 = \ln(1-x) - \ln(x).$$

   On résout alors, pour $x \in]0\,;1[$:

   $$\ln(1-x) - \ln(x) > 0 \iff \ln(1-x) > \ln(x) \iff 1-x > x \iff 1 > 2x \iff \frac{1}{2} > x$$

   On aura utilisé ici la stricte croissance de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$ pour la deuxième équivalence. On en déduit le tableau de variations de g sur $[0\,;1]$:

x	0		$1/2$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

   La fonction g admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$ qui vaut :

   $$g\big(\frac{1}{2}\big) = -h\big(\frac{1}{2}\big) - h\big(\frac{1}{2}\big) = -2\times\frac{1}{2}\ln\big(\frac{1}{2}\big) = \ln(2).$$

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

3. Dans cette question, U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1\,;n]\!]$.

   On a donc : $U(\Omega)=[\![1\,;n]\!]$, et $\forall i\in[\![1\,;n]\!],\ p_i=\mathbf{P}(U=i)=\dfrac{1}{n}$.

   Par conséquent, U admet bien une entropie, donnée par la somme finie :

$$H(U)=-\sum_{i=1}^{n}h\big(\tfrac{1}{n}\big)=-\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{n}\ln(n)=\frac{1}{n}\ln(n)\times n=\ln(n).$$

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0\,;1[$.

   On a donc : $X(\Omega)=\{0\,;1\}$ et $\mathbf{P}(X=1)=p$, $\mathbf{P}(X=0)=1-p$, de sorte que X admet une entropie donnée par la somme finie à deux termes :

$$H(X)=-\sum_{x\in X(\Omega)}h\big(\mathbf{P}(X=x)\big)=-h(p)-h(1-p)=g(p),$$

   où g est la fonction étudiée à la partie I.

   L'étude de g montre bien que : $H(X)\leqslant\ln(2)$, avec égalité si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.

5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé.

   a) Les variables aléatoires X_1 et X_2 ne prennent chacune que deux valeurs : 0 et 1, donc X_1+X_2 prend les valeurs $\{0,1,2\}$ qui constituent son univers-image $(X_1+X_2)(\Omega)$.

   b) L'événement $[Z=1]$ est réalisé si et seulement si X_1+X_2 prend une valeur impaire, donc si et seulement si $[X_1+X_2=1]=\big([X_1=1]\cap[X_2=0]\big)\cup\big([X_1=0]\cap[X_2=1]\big)$ est réalisé.

   L'union qu'on vient d'écrire étant disjointes et les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes, on en déduit :

$$p=\mathbf{P}(Z=1)=\mathbf{P}(X_1=1)\times\mathbf{P}(X_2=0)+\mathbf{P}(X_1=0)\times\mathbf{P}(X_2=1)=p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1).$$

   c) D'après la formule précédente :

$$1-2p=1-2p_1-2p_2+4p_1p_2\quad\text{et}\quad(1-2p_1)(1-2p_2)=1-2p_1-2p_2+4p_1p_2,$$

   donc effectivement, $1-2p=(1-2p_1)(1-2p_2)$.

6. Soit $p\in]0\,;1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

   a) La variable aléatoire S_n est la somme de n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes, de même paramètre p : S_n suit donc la loi binomiale de paramètres (n,p).

$$S_n(\Omega)=[\![0\,;n]\!]\text{ et }\forall k\in S_n(\Omega),\quad\mathbf{P}(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

   b) Montrons par récurrence, comme suggéré par l'énoncé, que $\mathcal{P}(n)$: "$1-2\mathbf{P}(Z_n=1)=(1-2p)^n$", est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=1$: $S_1=X_1$ et $\mathbf{P}(Z_1=1)=\mathbf{P}(X_1=1)=p$, donc $1-2\mathbf{P}(Z_1=1)=(1-2p)^1$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $1-2\mathbf{P}(Z_{n+1}=1)=(1-2p)^{n+1}$.

On remarque ici que $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} X_k = S_n + X_{n+1}$, et par conséquent :

$[Z_{n+1} = 1] = [\text{"}S_{n+1} \text{ est impair"}] = \big([\text{"}S_n \text{ est impair"}] \cap [X_{n+1} = 0]\big) \cup \big([\text{"}S_n \text{ est pair"}] \cap [X_{n+1} = 1]\big)$,

Donc en fait, par définition de Z_n :

$$[Z_{n+1} = 1] = \big([Z_n = 1] \cap [X_{n+1} = 0]\big) \cup \big([Z_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1]\big) = [Z_n + X_{n+1} = 1].$$

Comme Z_n ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$: d'après le lemme des coalitions, Z_n et X_{n+1} sont indépendantes ; on se retrouve donc dans la situation de la question 5. où Z_n joue le rôle de X_1, et X_{n+1} joue le rôle de X_2.
Le résultat de 5.c) s'applique donc, qui donne :

$$1 - 2\mathbf{P}(Z_{n+1} = 1) = \big(1 - 2\mathbf{P}(Z_n = 1)\big)\big(1 - 2\mathbf{P}(X_{n+1} = 1)\big) \overset{H.R.}{=} (1 - 2p)^n \times (1 - 2p) = (1 - 2p)^{n+1},$$

donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - 2\mathbf{P}(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$, ou encore : $\mathbf{P}(Z_n = 1) = \dfrac{1 - (1 - 2p)^n}{2}$.

c) Comme Z_n est une variable de Bernoulli, le résultat de la question 4. s'applique et Z_n admet une entropie qui vérifie : $H(Z_n) \leqslant \ln(2)$, avec égalité si et seulement si :

$$\mathbf{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{2} \iff \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} = \frac{1}{2} \iff (1 - 2p)^n = 0 \iff 1 - 2p = 0 \iff p = \frac{1}{2}.$$

Partie III - Des variables à densité

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,; b]$, où a et b sont des réels tels que $a < b$.

a) Une densité de U est définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_U(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Comme $h(0) = 0$, on en déduit que : $\forall t \in \mathbb{R},\ h \circ f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{b-a} \ln(b - a) \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

La fonction $h \circ f$ étant nulle en-dehors de $[a\,; b]$ et constante sur $[a\,; b]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)\mathrm{d}t$ est en fait convergente, et U admet une entropie.

b) D'après ce qui précède :

$$H(U) = -\int_{-\infty}^{a} 0 \text{ d}t - \int_a^b -\frac{1}{b - a} \ln(b - a)\mathrm{d}t - \int_a^{+\infty} 0 \text{ d}t = \frac{b - a}{b - a} \ln(b - a) = \ln(b - a).$$

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Une densité f de X est définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

D'après le cours sur la loi exponentielle, on sait que X admet une espérance qui vaut $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, et que ce fait vient de la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\lambda}$.

b) La densité f de X est soit nulle, soit strictement positive, donc $h \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in]-\infty\,;0[$, $h \circ f(t) = h(0) = 0$, tandis que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$h \circ f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.\ln\left(\lambda e^{-\lambda t}\right) = \ln(\lambda).\lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} = \ln(\lambda) f(t) - \lambda t f(t).$$

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|h \circ f(t)\right| \leqslant |\ln(\lambda)| f(t) + \lambda |t| f(t)$, d'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et par positivité de f sur $\mathbb{R}$.

Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes toutes les deux (et valent respectivement 1 et $\frac{1}{\lambda}$), alors $h \circ f(t)\mathrm{d}t$ est également convergente, par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives.

La variable aléatoire X admet donc une entropie qui vaut :

$$H(X) = -\ln(\lambda)\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} t(ft)\mathrm{d}t = -\ln(\lambda) \times 1 + \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1 - \ln(\lambda).$$

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
La densité usuelle de la variable aléatoire X est la fonction ϕ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

a) D'après le cours sur la loi normale : $\quad E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.
La formule de Koenig-Huygens permet alors de retrouver le moment d'ordre 2 (qui est bien défini) de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \iff E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2.$$

Toujours d'après le cours sur les variables à densité, l'existence même de ce moment d'ordre 2 assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)\mathrm{d}t$, qui vaut ainsi $\sigma^2 + m^2$.

b) La fonction φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $h \circ \phi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad h \circ \phi(t) = \phi(t) \cdot \ln\big(\phi(t)\big) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \times \Big(-\ln(\sigma) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\phi(t)\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t$ est (absolument) convergente et vaut 1. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2\phi(t)\mathrm{d}t$ est aussi (absolument) convergente et égale, d'après le théorème de transfert, à $E\big((X-m)^2\big)$ qui est en fait égale par définition à $V(X) = \sigma^2$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\circ\phi(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente ; X admet donc une entropie qui vaut :

$$\begin{aligned}H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ \phi(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2\phi(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \times 1 + \frac{1}{2\sigma^2} \times \sigma^2 \boxed{= \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}.}\end{aligned}$$