MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - EMLyon 2023

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE 1

Dans cet exercice, x désigne un élément de $]0\,;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On démontre la double inégalité demandée, très classique, en rappelant que la fonction inverse est continue et décroissante sur $]0\,;+\infty[$, de sorte que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k\,;k+1],\quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Puisque $k < k+1$, l'inégalité de la moyenne donne alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{k+1}(k+1-k) \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}(k+1-k),\ \text{soit}\ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Par sommation de l'inégalité précédente pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

où : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \overset{[j=k+1]}{=} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = S_n - 1$, tandis que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_n - \frac{1}{n}$,

Et enfin : $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles.

On a donc bien démontré : $\forall n \geqslant 2,\quad S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n}.$

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$: $\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$, donc la double inégalité donne l'encadrement de S_n :

$$\forall n \geqslant 2,\ S_n - 1 \leqslant \ln(n) \iff S_n \leqslant 1 + \ln(n)\ \text{et}\ \ln(n) \leqslant S_n - \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} + \ln(n) \leqslant S_n,$$

Donc : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\quad \frac{1}{n} + \ln(n) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)}$

d) En divisant les membres de la double inégalité précédente par $\ln(n)$ qui est strictement positif pour tout entier $n \geqslant 2$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2,\quad \frac{1}{n\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1,$$

où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} + 1 = 0 + 1 = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$,

ce qui prouve l'équivalent :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

2. **Informatique**.

a) Analysons ligne par ligne la fonction proposée :

```
def rang(a):  # un seuil a est passé en argument de la fonction
    k=1 # la variable k correspondra au rang courant
    s=1 # initialisation : S1 = 1/1 = 1
    while s < a:  # tant que la valeur de s ne dépasse pas le seuil a
        k = k+1   # on considère le rang suivant
        s = s+1/k # on ajoute à la somme l'inverse du nouvel entier k
    return k      # valeur du rang courant après la sortie de boucle
```

On comprend donc que cette fonction renvoie, si donc donne la valeur 50 au réel a passé en argument, le plus petit rang k tel que $S_k > 50$.

b) Le code suivant :

```
from numpy import exp
exp(49)
```

renvoie : `1.9073465724950998e+21`, qui est donc une valeur approchée de e^{49}.

Comme on sait que : $S_n \leqslant \ln(n) + 1$, alors pour $N = \lfloor e^{49} \rfloor$ (partie entière), il est clair que $S_N \leqslant 49 + 1 = 50$, donc que le premier rang k tel que $S_k > 50$ sera supérieur à N, sans doute proche vu l'équivalent précédent. Autant dire au passage, que l'ordinateur va prendre un temps très long pour trouver ce rang, puisqu'il explore un à un tout les entiers jusque là !

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0\,;x]$. La somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j$ est celle des termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$ puisque $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, donc selon la formule du cours :

$$\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

b) En intégrant la relation précédente de 0 à x, ce qui est posssible puisque $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$ est une fonction poynômiale, donc continue sur $[0,;x]$, tandis que $t \mapsto \frac{1-t^n}{1-t}$ est aussi continue sur $[0\,;x]$ où $1-t \neq 0$:

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t \iff \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\Big)\mathrm{d}t$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{t^k}{k}\Big]_0^x = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \iff \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t}$$

c) Pour tout $t \in [0\ x]$: $0 \leqslant t \leqslant x(<1)$, donc $1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x > 0$ et $1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$ par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

En multipliant tous les membres de cette double inégalité par $t^n \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall t \in [0\,;x], \quad 0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.$$

Les fonctions concernées sont continues (selon la variable t) sur $[0\,;x]$ et $0 \leqslant x$, donc par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}.$$

Comme $x \in]0\,;1[$: alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} = 0$.

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

d) Les résultats des deux questions précédentes permettent donc d'écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$, ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge , et a pour somme totale :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

EXERCICE 2

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

a) On réalise ici le calcul classique de la fonction de répartition F_n de Z_n, en justifiant soigneusement chaque étape : pour tout réel x, on commence par calculer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_n > x) &= \mathbf{P}\big(\min(X_1,\ldots,X_n) > x\big) = \mathbf{P}\big([X_1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\big) \text{ par définition du } \min \\
&= \mathbf{P}(X_1 > x) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n > x) \quad \text{par mutuelle indépendance des } (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \\
&= \big(\mathbf{P}(X_1 > x)\big)^n = \big(1 - \mathbf{P}(X_1 \leqslant x)\big)^n \qquad \text{car les } (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ suivent la même loi}
\end{aligned}$$

Or d'après le cours sur la loi uniforme : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(X_1 \leqslant x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = 1 - \mathbf{P}(Z_n > x) = 1 - \big(1 - \mathbf{P}(X_1 \leqslant x)\big)^n = \begin{cases} 1-(1-0)^n = 0 \text{ si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-(1-1)^n = 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

b) La façon la plus rapide de justifier que Z_n est une variable à densité est la suivante :

On remarque dans les calculs précédents, que $F_n = 1-(1-F_{X_1})^n$, où F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et en 1 puisque c'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0\,;1]$ qui a été étudiée en cours.

Vues les opérations réalisées à partir de F_{X_1} pour obtenir F_n, on peut donc dire que F_n conserve les propriétés précédentes de F_{X_1}, ce qui garantit que Z_n est une variable à densité.

c) On obtient alors une densité de Z_n par dérivation de F_n, sauf en 0 et en 1 où on décide de conserver l'expression de F_n' qu'on va obtenir sur $]0\,;1[$, de sorte qu'une densité f_n de Z_n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 - n.(-1).(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1} \text{ si } x \in [0\,;1] \\ 0 \text{ sinon (dérivation d'une constante)} \end{cases}.$$

2. **Informatique.**

La fonction qui suit simule une réalisation de la variable aléatoire Z_{10}, comme minimum de 10 réalisations de la loi uniforme à densité sur $[0\,;1]$:

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return min(random(10))
```

3. On étudie ici la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, pour tout réel x :

$$\forall x \in]-\infty\,;0],\ F_n(x) = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

$$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ F_n(x) = 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$$

$$\forall x \in]0\,;1[,\ F_n(x) = 1-(1-x)^n \text{ avec } 0 < 1-x < 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} 1-(1-x)^n = 1-0 = 1$$

Ainsi : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases},$

Et donc $F_n(x)$ tend vers $F(x)$ où F est la fonction de répartition de la variable certaine égale à 1, en tout point de continuité de cette dernière (soit pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

On en conclut que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable certaine égale à 1.

4. a) On rappelle que $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$: l'événement $[Z_n = X_n]$ est réalisé si et seulement si X_n est le minimum des n premières variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$, donc si et seulement si X_n est inférieur ou égal aux $(n-1)$ autres variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{n-1}$: on peut en fait écrire l'égalité d'événements

$$[Z_n = X_n] = [X_n \leqslant Z_{n-1}] = [Z_{n-1} - X_n \geqslant 0]$$

Or : Z_{n-1} qui ne dépend que de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ est, d'après le lemme des coalitions, indépendante de X_n.

On peut donc appliquer le résultat admis dans l'énoncé de la question 4 : la variable aléatoire $Z_{n-1} - X_n$ a pour densité la fonction g_{n-1}, de sorte que :

$$\mathbf{P}(Z_n = X_n) = \mathbf{P}(Z_{n-1} - X_n \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} g_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}, \quad \text{CQFD.}$$

b) On vient de voir que $\mathbf{P}(Z_n = X_n) = \mathbf{P}(T_n = 0) = \dfrac{1}{n}$: ce résultat suffit pour conclure que T_n n'est *pas* une variable à densité, car sinon on aurait, pour tout réel x, $\mathbf{P}(T_n = x) = 0$.

c) **Informatique**. La fonction suivante calcule et renvoie une réalisation de la variable aléatoire $T_n = Z_n - X_n = \min(X_1, \ldots, X_n) - X_n$.

On prendra garde au fait que l'appel `random(n)` renvoie un vecteur de n réalisation indépendantes d'une loi uniforme sur $[0\,;1]$, mais qu'elles sont numérotées de 0 à $n-1$ en `Python`.

```python
def VarT(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    X = random(n)
    return min(X) - X[n-1]
```

5. a) La variable aléatoire T_{500} ne semble pas discrète, elle semble bien prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[-1\,;0]$ qui n'est pas dénombrable (les 20000 valeurs ont été rassemblées en 2000 barres de l'histogramme selon les intervalles de longueur $\frac{1}{2000}$ régulièrement distribués sur $[-1\,;0]$).

   b) Le rectangle à droite de la figure a une hauteur égale à 50, ce qui pour un échantillon de 20000 valeurs signifie que la fréquence d'apparition de la valeur 0 est égale à $\dfrac{50}{20000} = \dfrac{1}{400}$.

   Ce n'est pas exactement égal à $\mathbf{P}(T_{500} = 0) = \dfrac{1}{500}$ mais c'est assez proche en termes d'ordre de grandeur : la différence pourrait être imputée à la fluctuation d'échantillonnage.

PROBLÈME

Préliminaire

1. D'après le résultat rappelé en préambule, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est, puisque E et $\mathbb{R}$ sont de dimension finies respectivement égales à n et 1, de dimension finie et :

$$\dim E^* = \dim E \times \dim \mathbb{R} = \dim E.$$

2. Soit φ un élément de E^*, c'est-à-dire une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

   a) L'image $\mathrm{Im}\varphi$ de φ est toujours un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée, ici $\mathbb{R}$. Par conséquent : $\dim \mathrm{Im}\varphi \leqslant \dim \mathbb{R} = 1$, ce qui implique que $\mathrm{Im}\varphi$ est soit de dimension 1, soit de dimension 0.

   b) Si $\dim \mathrm{Im}\varphi = 0$, alors cela signifie que $\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) |\ x \in E\}$ est réduit à $\{0_E\}$, et donc que : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = 0_E$. Dans ce cas, donc, φ est l'application nulle.

   Sinon $\dim \mathrm{Im}\varphi = 1 = \dim \mathbb{R}$, et comme $\mathrm{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, cela implique donc que $\mathrm{im}\varphi = \mathbb{R}$: par définition, cela signifie que $\varphi :\ E \to \mathbb{R}$ est surjective.

   c) Dans le cas où φ n'est pas l'application nulle : alors $\dim \mathrm{Im}\varphi = 1$ et φ est surjective, d'après ce qui précède.

   Le théorème du rang s'applique alors, qui donne :

$$\dim \ker\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim E \iff \dim \ker\varphi = \dim E - 1,$$

   ce qui signifie bien que $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**.

   Dans cette question, $p \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_p[x]$, qui est de dimension $p + 1$.

   On considère l'application $g :\ E \to \mathbb{R}$ définie par : $\quad \forall P \in E,\ g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$

a) Il est clair que pour tout $P \in E$, $g(P) \in \mathbb{R}$ (une intégrale est un nombre réel).
Pour P et Q éléments quelconques de E, et pour un réel λ quelconque :

$$g(\lambda.P+Q) = \int_0^1 \big(\lambda.P(t)+Q(t)\big)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda.g(P)+g(Q) \text{ par linéarité de l'intégrale,}$$

donc g est bien une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$: $g \in E^*$.

b) Il est clair que g n'est pas l'application nulle : si P est le polynôme constant égal à 1, alors $g(P) = 1 \neq 0$.
D'après le préliminaire, g est alors surjective et surtout, $\dim \ker g = \dim E - 1 = p + 1 - 1 = p$.

c) Pour $k \in \{1, \ldots, p\}$, on considère la fonciton polynôme $Q_k :\ x \mapsto x^k - \frac{1}{k+1}$.
Il est clair que : $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$, $\deg(Q_k) = k$, donc la famille $(Q_1, \ldots, Q_p)$ est échelonnée en degrés : c'est une famille libre de E.
De plus, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$:

$$g(Q_k) = \int_0^1 \Big(Q_k(t) - \frac{1}{k+1}\Big)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^k\mathrm{d}t - \frac{1}{k+1}.(1-0) = \Big[\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big]_0^1 - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0,$$

donc en fait : $(Q_1, \ldots, Q_p)$ est une famille libre de p vecteurs appartenant tous à $\ker g$, qui est lui-même un espace de dimension p : $(Q_1, \ldots, Q_p)$ est par conséquent une base du noyau $\ker g$.

4. **Second exemple**.
Dans cette question, on conserve $E = \mathbb{R}_p[x]$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $f :\ E \to \mathbb{R}$ est définie par $f(P) = P(0)$.

a) Pour tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$, $P(0)$ est bien un réel (c'est en fait le coefficient constant de P).
Pour P et Q éléments quelconques de E, et pour un réel λ quelconque :

$$f(\lambda.P + Q) = (\lambda.P + Q)(0) = \lambda.P(0) + Q(0) = \lambda.f(P) + f(Q),$$

donc f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$: c'est bien un élément de E^*.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_p[x]$:
$f(P) = 0 \iff P(0) = 0 \iff 0$ est racine de $P \iff$ le coefficient constant de P est nul.
On en déduit que : $mathrmker f = \mathrm{Vect}(x, x^2, \ldots, x^p)$ où x^k désigne, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction puissance k-ième.
La famille $(x, x^2, \ldots, x^p)$ est génératrice de $\ker f$ et elle est libre, comme sous-famille de la base canonique de E : c'est une base du noyau de f.

5. Dans cette question, on revient au cas général.
Soient f et g deux éléments de E^*, non nuls, tels que $\ker f \subset \ker g$.

a) Puisque f et g sont non nuls, alors d'après ce qui a été vu dans le préliminaire,

$$\dim \ker f = \dim E - 1 = \dim \ker g.$$

On sait alors que l'inclusion $\ker f \subset \ker g$ et l'égalité des dimensions des deux noyaux, assurent l'égalité d'espaces vectoriels :

$$\ker f = \ker g.$$

b) Puisque f est non nul, alors $\ker f$ est un hyperplan de E, et par conséquent $\ker f$ est strictement inclus dans E : il existe donc bien un vecteur x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.

c) Comme 0_E appartient toujours au noyau de f, $x_0 \neq 0_E$ et $\dim \mathrm{Vect}(x_0) = 1$. Par conséquent, $\dim \ker f + \dim \mathrm{Vect}(x_0) = \dim E - 1 + 1 = \dim E$.
Par ailleurs, considérons un élément x de $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda.x_0$, et $f(x) = 0 \iff \lambda.f(x_0) = 0$. Comme $x_0 \notin \ker f$, $f(x_0) \neq 0$, donc $\lambda = 0$, et :

$$x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) \Longrightarrow x = 0_E, \text{ donc } \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) \subset \{0_E\}.$$

L'inclusion réciproque est toujours vraie puisque $\ker f$ et $\text{Vect}(x_0)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, donc à ce titre chacun d'eux contient 0_E.

Ainsi : $\begin{cases} \ker f \cap \text{Vect}(x_0) = \{0_E\} \\ \dim \ker(f) + \dim \text{Vect}(x_0) = \dim E \end{cases}$ donc $\ker(f)$ et $\text{Vect}(x_0)$ sont supplémentaires dans E :

$$\ker f \oplus \text{Vect}(x_0) = E.$$

d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$: c'est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ puisque c'est une combinaison linéaire de f et g.

Comme f et g ont le même noyau :

$$\forall x \in \ker f,\ h(x) = g(x_0)f(x) - f(x_0)g(x) = g(x_0).0 - f(x_0).0 = 0.$$

Par ailleurs : $h(x_0) = g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0) = 0$,

donc pour tout élément x de $\text{Vect}(x_0)$, $h(x) = h(\lambda.x_0) = \lambda.h(x_0) = 0$.

Comme $\ker f$ et $\text{Vect}(x_0)$ sont supplémentaires dans E, on en conclut que : $\forall x \in E,\ h(x) = 0$, c'est-à-dire que h est l'application nulle.

e) Le résultat précédent signifie que sous les hypothèses formulées au début de la question sur f et g, il existe $x_0 \in E \setminus \ker f$ tel que :

$$g(x_0)f - f(x_0)g = 0 \iff g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f,$$

puisque $f(x_0)$ est un réel non nul. Les deux formes linéaires f et g sont donc proportionnelles.

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. a) Soit H un hyperplan de E, et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H : cette base est en particulier une famille libre de $n-1$ vecteurs de E qui est de dimension n, donc d'après le théorème de la base incomplète (opportunément rappelé par l'énoncé au début du problème), il existe un n-ième vecteur e_n de E qui complète cette famille de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ soit une base de E.

b) Soit φ l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ défini par : $\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ 1 \text{ si } i = n \end{cases}$.

Une application linéaire est entièrement définie, et de façon unique, par les images qu'elle attribue aux éléments d'une base de E : c'est bien le cas ici.

D'ailleurs, pour tout vecteur x de E, décomposé de façon unique dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ (où les x_i sont donc des réels), la linéarité de φ permet d'écrire :

$$\varphi(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i) = 0 \iff x_n = 0,$$

donc $\ker(\varphi) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \middle| \ x_n = 0 \right\} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geqslant 2$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de formes linéaires sur E, ainsi que l'application $f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array}$.

L'énoncé tenait pour acquis que f est une application linéaire.

7. Soit $x \in E$:

$$x \in \ker f \iff \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) = (0, \dots, 0) \iff \forall i \in \{1, \dots, p\},\ f_i(x) = 0$$

$$\iff \forall i \in \{1, \dots, p\},\ x \in \ker f_i \iff x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i.$$

Les équivalences qu'on vient d'écrire assurent bien l'égalité d'ensembles :

$$\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i.$$

8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.

a) Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$: par définition même de la surjectivité, le vecteur ε_1 de $\mathbb{R}^p$ admet au moins un antécédent x par f dans E.

b) Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ des réels tels que $\alpha_1.f_1 + \ldots + \alpha_p.f_p$ soit l'application nulle dans E^* ; cela signifie que :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.f_i(x) = 0.$$

Si on écrit cette égalité pour l'antécédent de ε_1 dont on a précédemment justifié l'existence, alors cette égalité devient :

$$\alpha_1 = 0 \text{ puisque } \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) = (1, 0, \dots, 0).$$

En procédant de même avec un antécédent x_i par f de chacun des vecteurs ε_i de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on obtient successivement les relations :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i.f_i(x_2) = 0 \iff \alpha_2 = 0 \dots, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.f_i(x_p) = 0 \iff \alpha_p = 0.$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.f_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0,$

Ce qui démontre que la famille de formes linéaires $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^*.

9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.

a) L'hypthèse faite suppose alors que $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^p$, et plus précisément que $\mathrm{Im} f$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^p$: en termes de dimensions, cela implique que

$$\dim \mathrm{Im} f = m < p.$$

b) Soit alors $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $\mathrm{Im} f$: c'est en particulier une famille libre de $\mathbb{R}^p$, qu'on peut compléter puisque $m < p$, en une base $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

Puisque $m < p$, on a ce faisant complété la famille $(e_1, \dots, e_m)$ avec $m - p \geqslant 1$ vecteurs supplémentaires : par conséquent, on peut dire que $m \leqslant p - 1$ et donc que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}).$$

Or $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$, en tant que sous-famille de la base $(e_1, \dots, e_p)$: c'est donc une base de H, donc $\dim H = p - 1$ et H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ qui contient $\mathrm{Im} f$.

c) D'après la question 6. : H étant un hyperplan de $\mathbb{R}^p$, c'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Or si on décompose tout élément y de $\mathbb{R}^p$ sous la forme $y = \sum_{i=1}^{p} y_i.\varepsilon_i$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, alors :

$$\forall y = (y_1, \ldots, y_p), \quad \varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i.\varphi(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i.y_i,$$

où les $a_i = \varphi(\varepsilon_i)$ sont indépendants de y et sont non tous nuls, sinon φ est la forme linéaire nulle.

Il reste à dire, pour conclure cette question difficile, que : puisque $\mathrm{Im} f \subset H = \ker \varphi$, alors :

$$\forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Im} f \text{ donc } \varphi\big(f(x)\big) = 0 \iff \varphi\big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big) = 0 \iff \sum_{i=1}^{p} a_i.f_i(x) = 0.$$

Il existe donc des réels $(a_1, \ldots, a_p)$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} a_i.f_i$ est l'application nulle : la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée dans E^*.

10. On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^*.

a) On a démontré à la question 9., l'implication :

$$f \text{ n'est pas surjective } \Longrightarrow (f_1, \ldots, f_p) \text{ est liée.}$$

Par contraposée, on a donc l'implication :

$$(f_1, \ldots, f_p) \text{ est libre } \Longrightarrow f \text{ est surjective.}$$

b) L'application $f :\ E \to \mathbb{R}^p$, étant surjective, on a donc : $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^p$ et $\dim \mathrm{Im} f = p$.
Le théorème du rang assure alors que :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f \iff \dim \mathrm{Im} f = n - p.$$

D'après la question 7., ce résultat d'écrit aussi :

$$\dim \Big(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \Big) = n - p.$$

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est muni du produit scalaire $\langle\ ;\ \rangle$.
Pour $a \in E$, on note f_a l'application qui à tout élément x de E, associe le réel $f_a(x) = \langle a\, , x\rangle$.

11. Soit $a \in E$.

a) L'application f_a est bien définie de E dans $\mathbb{R}$, il reste donc simplement à montrer qu'elle est linéaire.
Or pour tous vecteurs x et y de E, et pour tout réel λ, d'après la bilinéarité du produit scalaire :

$$f_a(\lambda.x + y) = \langle a\, , \lambda.x + y\rangle = \lambda.\langle a\, , x\rangle + \langle a\, , y\rangle = \lambda.f_a(x) + f_a(y),$$

donc f_a est bien une forme linéaire sur E, c'est-à-dire un élément de E^*.

b) Par définition : $\quad x \in \ker(f_a) \iff \langle a\, , x\rangle = 0 \iff x \perp a$, donc

$$\ker f_a = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}.$$

c) Si f_a est l'application nulle, alors en particulier :

$$f_a(a) = 0 \iff \langle a\,,a\rangle = 0 \iff ||a||^2 = 0 \iff a = 0_E.$$

12. **Théorème de représentation des formes linéaires**

On considère maintenant l'application $\Phi : \; E \to E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\Phi(a) = f_a$.

a) Pour tous éléments a et b de E, et pour un réel λ quelconque, on a pour tout $x \in E$:

$$\Phi(\lambda.a + b)(x) = f_{\lambda.a+b}(x) = \langle \lambda.a + b\,, x\rangle = \lambda.\langle a\,, x\rangle + \langle b\,, x\rangle = \lambda.f_a(x) + f_b(x),$$

d'où l'égalité d'applications :

$$\Phi(\lambda.a + b) = \lambda.f_a + f_b = \lambda.\Phi(a) + \Phi(b),$$

ce qui prouve que Φ est linéaire.

b) Comme on l'a vu dès la question 1. de ce problème, les espaces vectoriels E et E^* sont de même dimension.
Par conséquent, pour que $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels il suffit que cette application linéaire soit soit injective, soit surjective.
On on a démontré à la question 11.c) que : f_a est l'application nulle $\Longrightarrow a = 0_E$, ce qui se réécrit :

$$\Phi(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \Longrightarrow a = 0_E,$$

et donc : $\ker\Phi \subset \{0_E\}$. Comme Φ est linéaire, l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc $\ker(\Phi) = \{0_E\}$ et Φ est bien injective : c'est un isomorphisme de E dans E^*.

c) Ce qu'on vient de démontrer signifie que : pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe un unique élément a de E tel que $\Phi(a) = \varphi \iff f_a = \varphi$, ou encore :

$$\text{il existe un unique } a \in E \text{ tel que : } \quad \forall x \in E,\; \varphi(x) = \langle a\,, x\rangle.$$

13. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.**

a) On redémontre ici le résultat très classique selon lequel l'application $\langle\ ;\ \rangle : \; (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

- D'abord : la trace d'une matrice étant la somme de ses éléments diagonaux, $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ est, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un réel.
- **linéarité à droite** :
  Pour toutes matrices A, B, B' de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ :

  $$\langle A\,, \lambda.B{+}B'\rangle = \mathrm{tr}\big({}^{\mathrm{t}}A(\lambda.B{+}B')\big) = \mathrm{tr}\big(\lambda.\,{}^{\mathrm{t}}AB{+}{}^{\mathrm{t}}AB'\big) = \lambda.\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB){+}\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB') = \lambda.\langle A\,, B\rangle{+}\langle A, B'\rangle,$$

  par linéarité de la trace.
- **symétrie** :
  Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}AB$ est encore une matrice carrée d'ordre p, dont la diagonale reste inchangée par transposition ; par conséquent, ${}^{\mathrm{t}}AB$ et sa transposée ont la même trace.
  Or d'après les propriétés de la transposée, on a aussi : ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) = {}^{\mathrm{t}}BA$, donc :

  $$\forall (A, B) \in \big(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})\big)^2, \quad \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}BA) \iff \langle A\,, B\rangle = \langle B\,, A\rangle.$$

- **positivité et caractère défini** :

Pour toute matrice $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: les coefficients de ${}^{\mathrm{t}}A$ sont $a'_{i,j}=a_{j,i}$ et d'après la formule du produit matriciel, les coefficients diagonaux de la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont :

$$\forall i\in[\![1\,;p]\!],\quad ({}^{\mathrm{t}}AA)_{i,i}=\sum_{k=1}^{p}a'_{i,k}a_{k,i}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}^2.$$

Par conséquent : $\quad\forall A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ \langle A\,,A\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}({}^{\mathrm{t}}AA)_{i,i}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}^2\geqslant 0.$

Ces calculs prouvent de plus l'équivalence :

$$\langle A\,,A\rangle=0\iff\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}^2=0\iff\forall(i,k)\in[\![1\,;p]\!]^2,\ a_{i,k}=0$$

car une somme de réels positifs est nulle, si et seulement si chacun des termes de la somme est nul.

Ceci prouve donc que : $\langle A\,,A\rangle=0\iff A=0_p$, donc que $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire définie positive : c'est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) D'après le résultat obtenu à la question 12., appliqué ici au cas où $E=\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: pour toute forme linéaire $\varphi:\ E\to\mathbb{R}$, il existe un unique vecteur de $E=\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une unique matrice B carrée d'ordre p, telle que pour tout vecteur de E, c'est-à-dire pour toute matrice M carrée d'ordre p, on ait :

$$\varphi(M)=\langle B\,,M\rangle=\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}BM).$$

En notant $A={}^{\mathrm{t}}B$, définie de façon unique car B l'est, on a bien démontré l'existence et l'unicité d'une matrice $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\quad\varphi(M)=\mathrm{tr}(AM).$$