MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - Ecricome 2023

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

# Exercice 1

## Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Les calculs matriciels donnent :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Les matrices $AB$ et $BA$ sont toutes deux triangulaires supérieures, donc leurs valeurs propres sont leurs éléments diagonaux :

$$\mathrm{Sp}(AB) = \{-1, 2\} = \mathrm{Sp}(BA).$$

   Comme des deux matrices carrées d'ordre 2 ont chacune deux valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés sont tous de dimension 1, et il suffit donc pour chacun de trouver un vecteur propre non-nul pour en obtenir une base.

   Ainsi $AB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $E_2(AB) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   De même, $E_{-1}(BA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   Comme $AB + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il est clair que $(AB+I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff AB\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $E_{-1}(AB) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

   De même, $BA - 2I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(BA - 2I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff BA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $E_2(BA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Soient $A$ et $B$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $\lambda$ une valeur propre non nulle de $AB$ et $X$ un vecteur propre associé, donc non-nul et vérifiant $ABX = \lambda X$.

   a) Si on avait $BX = 0$, alors on aurait aussi $ABX = 0 \iff \lambda X = 0 \iff X = 0$ puisque $\lambda$ est supposée non nul. C'est absurde car un vecteur propre ne peut être nul, et par conséquent $BX \neq 0$.

   b) Par définition de $X$, et grâce à l'associativité du produit matriciel, on peut écrire :

$$(BA)BX = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX,$$

   et comme $BX \neq 0$, la relation $(BA)BX = \lambda BX$ exprime bien que $BX$ est vecteur propre de $BA$ pour la valeur propre $\lambda$.

3. Supposons que 0 est une valeur propre de $AB$ ; soit $X$ un vecteur propre associé, donc non-nul et vérifiant $ABX = 0$.
   a) Supposons $B$ inversible : alors $BX \neq 0$, sinon on pourrait écrire :
   $$B^{-1}(BX) = 0 \iff (B^{-1}B)X = 0 \iff X = 0,$$
   ce qui contredit à nouveau le fait que $X$ est un vecteur propre.
   Mais alors, comme en 2.b), on peut écrire :
   $$(BA)BX = B(ABX) = B \times 0 = 0,$$
   Donc $(BA)BX = 0.BX$ et $BX$ qui est non-nul, est bien un vecteur propre de $BA$ qui admet donc la valeur propre 0.
   b) Supposons $B$ non-inversible. Alors $\mathrm{rg}(B) < n$, et comme $\mathrm{rg}(BA) \leqslant \mathrm{rg}(B)$, alors $\mathrm{rg}(BA) < n$, ce qui implique que $BA = BA - 0.I_n$ n'est pas non plus inversible : 0 est bien valeur propre de $BA$.
4. Les questions 2. et 3. ont permis de montrer que toute valeur propre de $AB$, quelle soit nulle ou non, est encore valeur propre de $BA$, donc : $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathrm{Sp}(BA)$.
   Mais les rôles de $A$ et $B$ étant symétriques, un raisonnement en tout point analogue montre qu'en échangeant les rôles, on a aussi $\mathrm{Sp}(BA) \subset \mathrm{Sp}(AB)$.
   Ainsi par double inclusion : $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.
5. Les matrices $AB$ et $BA$, si elles ont le même spectre, n'ont pas forcément les mêmes sous-espaces propres, comme le montre l'exemple traité à la question 1.

## Partie 2

On considère $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant $n$ valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes.
Soit $B$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un $n$-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
   a) La relation précédente fournit le polynôme annulateur demandé : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, qui est bien non nul (car les $\alpha_k$ sont non tous nuls), et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   b) Un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ admet au plus $n-1$ racines distinctes. Or par ailleurs, toute valeur propre de $A$ doit être racine de $Q$. On en conclut que $A$ admet au plus $n-1$ valeurs propres distinctes, ce qui contredit totalement l'hypothèse faite au départ sur $A$.
   c) On en déduit qu'il n'existe aucun $n$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ de réels non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$, ce qui revient à dire que la seule combinaison linéaire nulle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$ des matrices $(I_n = A^0, A, \ldots, A^{n-1})$, est celle où les $\alpha_k$ sont tous nuls.
   La famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est donc libre.
7. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$, et $X$ un vecteur propre associé.
   a) On sait que la matrice $A$, carrée d'ordre $n$, possède $n$ valeurs propres distinctes, et $n$ sous-espaces propres chacun de dimension supérieure ou égale à 1.
   Or la somme des dimensions des sous-espaces propres est toujours inférieure ou égale à $n$ : la seule solution ici est donc que chaque sous-espace propre soit de dimension 1.
   À ce titre, le sous-espace propre associé à une valeur propre quelconque de $A$ est engendré par un seul vecteur non nul de ce sous-espace : le vecteur propre $X$ répond à ce critère, et $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X)$.

b) Puisque $X$ est un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$, alors :

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad BAX = B(AX) = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

Mais comme $AB = BA$, on a aussi : $BAX = ABX$.

c) Ainsi : $A(BX) = \lambda BX$, ce qui prouve que $BX \in E_\lambda(A)$, donc que $BX \in \mathrm{Vect}(X)$ d'après 7.a).

8. On a donc montré que pour tout vecteur propre $X$ de $A$, $BX$ appartient à $\mathrm{Vect}(X)$, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \mu X$ : le vecteur $X$ est donc aussi vecteur propre de $B$.

9. a) La matrice $A$ qui est carrée d'ordre $n$, possède $n$ valeurs propres distinctes ; elle est donc, d'après le critère suffisant, diagonalisable : il existe une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour $A$, telle que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad AX_i = \lambda_i X_i.$$

Comme on l'a vu à la question 8., les vecteurs $X_i$ sont aussi des vecteurs propres pour $B$.

b) Pour tout entier $i$ de $[\![1\,;n]\!]$, on note $\mu_i$ le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$.
On a alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ :

$$ABX_i = A(\mu_i X_i) = \mu_i(AX_i) = \mu_i(\lambda_i X_i) = \lambda_i \mu_i X_i.$$

Ceci prouve que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i \mu_i \in \mathrm{Sp}(AB)$ avec $X_i$ comme vecteur propre associé.
Mais comme $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AB$ n'a pas d'autres valeurs propres, et :

$$\mathrm{Sp}(AB) = \big\{\lambda_i \mu_i |\ i \in [\![1\,;n]\!]\big\}.$$

10. a) Considérons l'application $\varphi : \ P \mapsto \big(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\big)$, bien définie de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
Cette application est clairement linéaire : pour tous polytnômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, et pour tout réel $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha.P + Q) &= \big((\alpha.P + Q)(\lambda_1), \ldots, (\alpha.P + Q)(\lambda_n)\big) = \big(\alpha.P(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \ldots, \alpha.P(\lambda_n) + Q(\lambda_n)\big)\\ &= \alpha.\big(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\big) + \big(Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)\big)\\ &= \alpha.\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

Mais alors : comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n = \dim \mathbb{R}^n$, $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels si et seulement si cette application linéaire est injective.
Or :

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ P(\lambda_i = 0.$$

En clair : $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ appartient au noyau de $\varphi$ si et seulement s'il admet les $n$ réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour racines.
Comme l'énoncé le rappelle opportunément : seul le polynôme nul a cette propriété.
On en déduit que $\varphi$ est injective, et donc que c'est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) On a vu que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, il existe un réel $\mu_i$ tel que $BX_i = \mu_i X_i$.
Via l'isomorphisme $\varphi$ : le $n$-uplet $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ admet un unique antécédent par $\varphi$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, c'est-à-dire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad P(\lambda_i) = \mu_i \text{ et donc tel que } \forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad BX_i = P(\lambda_i)X_i.$$

c) Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ : $AX_i = \lambda_i X_i$, donc $P(A)X_i = P(\lambda_i)X_i$, et donc $P(A)X_i = BX_i$.
Les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $P(A)$ et $B$ coïncident donc sur la base de $\mathbb{R}^n$ représentée par la base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ : ils sont donc égaux, et leurs matrices représentatives sont donc elles-mêmes égales :

$$P(A) = B.$$

11. a) Tout d'abord, l'ensemble $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ AB = BA\}$ (le *commutant* de $A$) est non vide : il contient la matrice nulle ($A0 = 0 = 0A$), mais aussi la matrice identité $I_n$ et la matrice $A$...

D'autre part, pour toutes matrices $B$ et $C$ carrées d'ordre $n$ qui appartiennent à $\mathscr{C}(A)$, et pour tout réel $\alpha$ : $AB = BA$ et $AC = CA$, donc

$$(\alpha.B + C)A = \alpha.BA + CA = \alpha.AB + AC = A(\alpha.B + C),$$

donc $\alpha.B + C$ appartient encore à $\mathscr{C}(A)$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Comme la question 10. le démontre finalement : si $B$ est une matrice qui commute avec $A$, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $B = P(A)$.

Réciproquement, tout polynôme $P(A)$ de la matrice $A$ commute évidemment avec $A$, donc appartient à $\mathscr{C}(A)$.

Par double inclusion, on en déduit qu'effectivement :

$$\mathscr{C}(A) = \{P(A) |\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}.$$

c) Le résultat qu'on vient d'établir signifie donc que :

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k.A^k \middle| (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

et donc que $\mathscr{C}(A) = \text{Vect}(A^0 = I_n, A, \ldots, A^{n-1})$. Or cette famille génératrice de $\mathscr{C}(A)$ est aussi libre d'après la question 6.

On en déduit donc que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une *base* de $\mathscr{C}(A)$, et par conséquent :

$$\dim \mathscr{C}(A) = n.$$

# Exercice 2

1. Parmi toutes les hypothèses faites sur $f$, on remarque que ses valeurs propres sont toutes supposées strictement positives : 0 n'est donc pas valeur propre de $f$, ce qui est un critère permettant de conclure que $f$ est injectif. Et comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $f$ est en fait un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. a) Dans un espace euclidient $E$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$, un endomorphisme $\varphi$ de $E$ est *symétrique* si et seulement s'il vérifie la propriété :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle.$$

b) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel dont est ici muni cet espace : comme $f$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, sa matrice représentative dans la base canonique est une matrice symétrique, soit :

$${}^{\mathrm{t}}A = A.$$

c) C'est du cours à nouveau : $A$ étant symétrique réelle, elle est donc diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale. Il existe donc bien une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, telle que ${}^{\mathrm{t}}PAP$ soit diagonale.

d) Tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ admet une unique décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ dans la somme directe orthogonale $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdot \oplus E_{\lambda_n}(f)$, qui permet d'écrire, par linéarité de $f$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Les $x_i$ sont deux à deux orthogonaux, donc :

$$\langle f(x)\,, x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,, \sum_{i=1}^{n} x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i\,, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ||x_i||^2.$$

Or, toujours du fait que les $x_i$ sont deux à deux orthogonaux : $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2$ ; par ailleurs, puisque les valeurs propres $\lambda_i$ sont rangées dans l'ordre croissant :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_1 ||x_i||^2 \leqslant \lambda_i ||x_i||^2 \leqslant \lambda_n ||x_i||^2 \Longrightarrow \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ||x_i||^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2,$$

ce qui est bien : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 ||x||^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \lambda_n ||x||^2.$

e) D'après la double inégalité précédente : si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ (vecteur nul), alors $||x|| = 0$ et par conséquent $0 \leqslant \langle f(x)\,, x \rangle \leqslant 0$, donc $\langle f(x)\,, x \rangle = 0$.
Réciproquement, si $\langle f(x)\,, x \rangle = 0$, alors puisque les valeurs propres de $f$ sont toutes strictement positives, on a :

$$0 \leqslant \lambda_1 ||x||^2 \leqslant 0 \Longrightarrow \lambda_1 ||x||^2 = 0 \overset{\lambda_1 > 0}{\Longrightarrow} ||x||^2 = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n},$$

donc par double implication, on a bien :

$$\langle f(x)\,, x \rangle = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

3. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
   a) Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ :
$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x)\,, x\rangle - \langle u\,, x\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x)_i x_i - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \quad \text{où } f(x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i.$$
   b) La fonction $g$ est donc polynômiale en les $n$ variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
   On peut donc calculer sa dérivée partielle $\partial_1(g)$ par rapport à la première variable $x_1$ ; on commence pour cela par réécrire la somme double de l'expression de $g(x)$, en isolant la variable $x_1$ et en remarquant que $a_{i,j} = a_{j,i}$ puisque $A$ est symétrique :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{i,j}x_i x_j = a_{1,1}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$$
$$= a_{1,1}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_1 x_j + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}x_i x_j.$$
   Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_1(g)(x) = \frac{1}{2}\big(2a_{1,1}x_1 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_j\big) - u_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j - u_j.$$
   c) De façon tout à fait analogue, on a pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_i(g)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - u_i,$$
   donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :
$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \partial_1(g)(x) \\ \vdots \\ \partial_n(g)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j - u_1 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j - u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = f(x) - u,$$
   puisque $f$ est représentée par la matrice $A$.
4. D'après la relation précédente : $\nabla g(x) = 0 \iff f(x) - u = 0 \iff f(x) = u$ ; comme $f$ est un automorphisme, le gradient de $g$ s'annule en un unique vecteur $x = f^{-1}(u)$ noté $m$, qui est de fait l'unique point critique de la fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
5. Pour tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ :
$$\frac{1}{2}\langle f(x-m)\,, x-m\rangle = \frac{1}{2}\langle f(x) - \underbrace{f(m)}_{=u}\,, x-m\rangle \text{ par linéarité de } f$$
$$= \frac{1}{2}\big(\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle - \langle f(x), m\rangle + \langle u, m\rangle\big) \text{ par bilinéarité du produit scalaire}$$
$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \frac{1}{2}\langle u, x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, f(m)\rangle + \frac{1}{2}\langle u, m\rangle \text{ car } f \text{ est symétrique}$$
$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle + \frac{1}{2}\langle u, m\rangle \text{ car } \langle x, f(m)\rangle = \langle x, u\rangle = \langle u, x\rangle$$
$$= g(x) + \frac{1}{2}\langle u, m\rangle$$

Or : $\quad g(m) = \frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle - \langle u, m\rangle = \frac{1}{2}\langle u, m\rangle - \langle u, m\rangle = -\frac{1}{2}\langle u, m\rangle$,
donc on a bien obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle = g(x) - g(m).$$

6. Le résultat de la question 2.d) assure que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle \geqslant \lambda_1 ||x-m||^2 \geqslant 0$ et $\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle = 0 \iff x-m=0 \iff x=m$.
D'après la question précédente, cela se réécrit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) - g(m) \geqslant 0 \text{ et } g(x) - g(m) = 0 \iff x = m.$$

On vient donc de démontrer $g$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ en un unique élément de $\mathbb{R}^n$, qui est son unique point critique $m$.

On considère un réel $\alpha$ de $\left]0\,;\frac{1}{\lambda_n}\right]$ et un vecteur $m_0$ de $\mathbb{R}^n$, et on définit par récurrence des vecteurs $m_p$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{p+1} = mp - \alpha \nabla g(m_p).$$

7. Soient $a, h$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   a) Par linéarité et symétrie de $f$, bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle f(a+h), a+h\rangle &= \langle f(a)+f(h), a+h\rangle = \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle f(h), a\rangle + \langle f(h), h\rangle\\ &= \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle h, f(a)\rangle + \langle f(h), h\rangle\\ &= \langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle.\end{aligned}$$

   b) On a alors, par définition de $g$ :

$$\begin{aligned}g(a+h) &= \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle - \langle u, a+h\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle\big) - \langle u, a\rangle - \langle u, h\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle f(a), a\rangle - \langle u, a\rangle + (\langle f(a), h\rangle - \langle u, h\rangle) + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle\\ &= g(a) + \langle \nabla g(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle \text{ puisque } \nabla g(a) = f(a) - u.\end{aligned}$$

8. a) Si on applique l'égalité précédente avec $a = m_p$ et $h = -\alpha\nabla g(m_p)$, on obtient :

$$g(m_p - \alpha\nabla g(m_p)) = g(m_p) - \alpha\langle \nabla g(m_p), \nabla g(m_p)\rangle + \frac{1}{2}\langle -\alpha f(\nabla g(m_p)), -\alpha\nabla g(m_p)\rangle$$

$$\iff g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha||\nabla g(m_p)||^2 + \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla g(m_p), \nabla g(m_p)\rangle.$$

   b) En reprenant le résultat de la question 2.d), on peut écrire : $\langle f(\nabla g(m_p), \nabla g(m_p)\rangle \leqslant \lambda_n ||\nabla g(m_p)||^2$, donc avec ce qui précède :

$$g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha||\nabla g(m_p)||^2 + \frac{\alpha^2\lambda_n}{2}||\nabla g(m_p)||^2 \iff g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha\Big(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\Big)||\nabla g(m_p)||^2.$$

9. a) On rappelle ici que $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{\lambda_n}$, donc :

$$0 < \frac{\alpha\lambda_n}{2} \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 \geqslant 1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2} \geqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow -\alpha\Big(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\Big)||\nabla g(m_p)||^2 \leqslant -\alpha||\nabla g(m_p)||^2 < 0.$$

   Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p)$ et la suite réelle $\big(g(m_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Par ailleurs : $\forall p \in \mathbb{N}$, $g(m_p) \geqslant g(m)$ puisque $g(m)$ est le minimul global de $g$ sur $\mathbb{R}^n$.
   La suite $\big(g(m_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc aussi minorée : elle est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone.

L'énoncé admettait alors que la suite $\big(g(m_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$.

b) En reprenant l'égalité de la question 5. avec $x = m_p$, puis en combinant avec 2.d), on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad g(m_p)-g(m) = \frac{1}{2}\langle f(m_p-m), m_p-m\rangle \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1 ||m_p-m||^2 \Longrightarrow 0 \leqslant ||m_p-m||^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\big(g(m_p)-g(m)\big).$$

c) Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} g(m_p) = g(m) \iff \lim\limits_{p\to+\infty} g(m_p) - g(m) = 0$, le théorème d'encadrement (une norme est toujours positive) permet de conclure que :

$$\lim_{p\to+\infty} ||m_p - m||^2 = 0 \iff \lim_{p\to+\infty} ||m_p - m|| = 0.$$

10. Dans cette question, on suppose que $n = 2$, que $u = (2, 1)$ et $f :\ (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$.

a) L'application $f$ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ : pour tout $\big((x, y), (x', y')\big) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x, y) + (x', y')\big) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (2\lambda x + 2x' + \lambda y + y', \lambda x + x' + 2\lambda y + 2y') \\ &= \lambda(2x + y, x + 2y) + (2x' + y', x' + 2y') = \lambda f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

De plus, la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ qui est symétrique : $f$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

b) Dans le graphique de gauche, la suite $\big(g(m_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante lorsque $\alpha = \alpha_0$, mais ne l'est pas lorsque $\alpha = \alpha_1$.

Dans le graphique de droite, les points $m_p$ du plan convergent bien (au sens de la convergence dans $\mathbb{R}^2$) vers un point donné lorsque $\alpha = \alpha_0$, alors que cela ne semble pas du tout être le cas lorsque $\alpha = \alpha_1$ (il semble y avoir deux "points attracteurs" dans ce cas).

On peut donc conclure, puisque l'énoncé assure qu'une seule des deux valeurs de $\alpha$ vérifie les hypothèses, que c'est $\alpha_0$ qui convient.

c) Le graphique de droite suggère que le point du plan duquel se rapprochent indéfiniment les points $m_p$, a pour coordonnées entières $(1, 0)$.

d) Il s'agit ici de calculer les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique $f$, qui sont celles de sa matrice représentative $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ : ce sont les réels $\lambda$ tels que $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow (2-\lambda)L_1 - L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & (2-\lambda)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Il vient donc que $A - \lambda I_2$ est non-inversible si et seulement si :

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3.$$

L'endomorphisme $f$ admet donc bien des valeurs propres toutes strictement positives.
La plus grande est $\lambda = 3$, et $\alpha_0 = 0,2$ vérifie : $\alpha_0 \in \left]0\,;\frac{1}{3}\right]$, donc les hypothèses de l'énoncé sont bien vérifiées.

Enfin, pour tout $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\langle f(x, y), (x, y)\rangle - \langle (2, 1), (x, y)\rangle = \frac{1}{2}\big((2x+y)x + (x+2y)y\big) - (2x+y) = x^2+y^2+xy-2x-y$$

Donc $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y - 2 \\ 2y + x - 1 \end{pmatrix}$, et tout point critique de $g$ est solution du système :

$$\begin{cases} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 4 - 4x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x = -3 \iff x = 1 \\ y = 2 - 2x = 0 \end{cases}.$$

La fonction $g$ admet donc un unique point critique $m = (1, 0)$ en lequel elle atteint, d'après toute l'étude précédente, son minimum global ; c'est aussi le point vers lequel converge la suite de points du plan $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

# Problème

## Partie 1

On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : \ x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. Très simplement, la fonction $F$ est définie en `Python` :

```python
import numpy as np

def F(x):
    return np.exp(x)/(1+np.exp(x))
```

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0 \Longrightarrow 1 + e^x > 0$ donc la fonction $F$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad \text{qu'on note } f(x).$$

La fonction $f$ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) \times (1+e^x - 2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

3. Il est clair que pour tout réel $x$, $F'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, donc $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $1 - e^x$ : comme $1 - e^x > 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$, la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ puis strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs : $\quad F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{0}{1+0} = 0$.

De même : $\quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{(e^x)^2} = e^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$,

et lim $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{0}{(1+0)^2} = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/4$ | $\searrow$ | $0$ |

4. Les fonctions $f$ et $F$ sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est bien un domaine symétrique par rapport à l'origine 0, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{e^x \times e^{-x}}{e^x(1+e^{-x})} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+e^x)}{2(1+e^x)} = \frac{1-e^x}{2(1+e^x)}$$

Or $F(x) - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - (1+e^x)}{2(1+e^x)} = \frac{e^x - 1}{2(1+e^x)}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x) - \frac{1}{2} = -\Big(F(x) - \frac{1}{2}\Big),$$

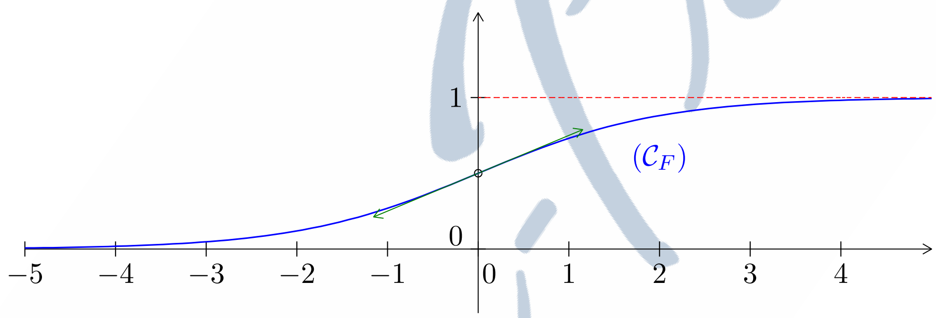
ce qui signifie que la fonction $F - \frac{1}{2}$ est impaire.

Ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} \times e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{\big(e^x(1+e^{-x})\big)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x),$$

donc $f$ est une fonction paire.

5. Comme $f' = F''$ s'annule en changeant de signe en $x = 0$, la courbe de $F$ admet un point d'inflexion d'abscisse 0 ; en ce point, la tangente qui a un coefficient directeur égal à $f(0) = \frac{1}{4}$, traverse la courbe.
   Le résultat précédent sur $F - \frac{1}{2}$ exprime aussi que la courbe de $F$ admet un centre de symétrie de coordonnées $(0\,, \frac{1}{2})$.
   Enfin la courbe de $F$ admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = 1$ (au voisinage de $+\infty$) et $y = 0$ (au voisinage de $-\infty$).




6. La fonction $F$ est continue (car de classe $\mathcal{C}^\infty$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : d'après le théorème éponyme, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I = ]-\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)\,; \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[ = ]0\,;1[$.
   On obtient l'expression de la bijection réciproque $F^{-1}$ en résolvant, pour tout $y \in ]0\,;1[$, l'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = y \iff \frac{e^x}{1+e^x} = y \iff e^x = y + ye^x \iff e^x(1-y) = y \iff e^x = \frac{y}{1-y} \iff x = \ln\Big(\frac{y}{1-y}\Big),$$

   Donc : $\quad \forall x \in ]0\,;1[, \quad F^{-1}(x) = \ln\Big(\frac{y}{1-y}\Big).$

## Partie 2

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, puisque d'exposant $\alpha = 2 > 1$.
   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est donc absolument convergente : elle est par conséquent convergente.
   L'énoncé admettait ensuite que : $\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

8. La fonction $f$ est, d'après l'étude précédente, continue et positive sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $A > 0$ : $\displaystyle\int_0^A f(x)\mathrm{d}x = F(A) - F(0) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

   Or $f$ est paire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ : ceci achève de justifier que $f$ est une densité de probabilité.

   Enfin : $F$ est une primitive de $f$ qui tend vers 1 en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$ : c'est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ qui admet $f$ pour densité.

9. On a déjà vu que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$, donc $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^{-x}$ et $x^2f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2e^{-x}$.

   Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x$ sont convergentes d'après le cours sur la loi exponentielle (elles correspondent respectivement à l'espérance et au moment d'ordre 2 d'une loi $\mathcal{E}(1)$ : par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}x$ sont donc convergentes, et aussi absolument convergentes puisque les fonctions intégrées sont positives sur $[0\,;+\infty[$.

   Il reste à remarquer que puisque $f$ est paire, alors la fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$, tandis que $x \mapsto x^2f(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ : les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}x$ sont donc toutes deux absolument convergentes ; la variable aléatoire $X$ de densité $f$ admet donc une espérance et un moment d'ordre 2, donc une variance.

10. a) On a déjà remarqué l'utilité de la parité de $f$ à la question précédente ; la fonction $x \mapsto xf(x)$ est alors continue sur $\mathbb{R}$, et avec le changement de variable $t = -x$, les intégrales qui suivent sont de même nature, donc ici convergentes :

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{-\infty} (-t)f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{-\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$$

   soit : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

   b) On a déjà justifié que $X$ admet une espérance ; celle-ci est égale à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ d'après le résultat précédent.}$$

11. Par le même changement de variable, mais sachant que cette fois la fonction $x \mapsto x^2f(x)$ est paire :

$$\int_{-\infty}^{0} x^2f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}x.$$

   On a déjà justifié que la variable aléatoire $X$ admet un moment d'ordre 2 ; il est donné par l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x.$$

   La variable aléatoire $X$ admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x \text{ puisque } E(X) = 0.$$

Pour démontrer la deuxième formule de l'énoncé : on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$, en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 &\longrightarrow\quad u'(x) &= 2x \\ v'(x) &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} &\longrightarrow\quad v(x) &= -\frac{1}{1+e^x} \end{aligned}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$, donc pour tout $A>0$ :

$$\int_0^A \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{1+e^x}\right]_0^A + 2\int_0^A \frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \frac{A^2}{1+e^A} + 2\int_0^A \frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$ converge, et puisque $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A^2}{1+e^A}=0$ par croissances comparées : on peut passer à la limite dans la relation précédente, qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$$

donc :

$$V(X) = 4\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x = 4\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x,$$

la dernière forme de l'intégrale étant obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fonction intégrée par $e^{-x}$ (opération neutre).

12. Soit $n$ un entier naturel non nul ; pour tout $A>0$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x &\longrightarrow\quad u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^{-nx} &\longrightarrow\quad v(x) &= -\tfrac{1}{n}e^{-nx} \end{aligned}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^A xe^{-nx}\mathrm{d}x &= \Big[-\frac{1}{n}xe^{-nx}\Big]_0^A + \frac{1}{n}\int_0^A e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}Ae^{-nA} + \frac{1}{n}\Big[-\frac{1}{n}e^{-nx}\Big]_0^A = -\frac{1}{n}Ae^{-nA} - \frac{1}{n^2}e^{-nA} + \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-nA}=0$ (car $-n<0$) et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} Ae^{-nA}=0$ par croissances comparées, on en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$, ce qui signifie que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x$ converge et :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}.$$

**Remarque :** on peut ici donner une rédaction plus rapide en utilisant le cours sur la loi exponentielle. En effet, la loi exponentielle de paramètre $n$ admet pour densité la fonction

$$h:\ x\mapsto\begin{cases} ne^{-nx} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Or on sait qu'une variable aléatoire qui suit cette loi admet une espérance qui vaut $\dfrac{1}{n}$ ; puisque $h$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$, cela garantit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} nxe^{-nx}\mathrm{d}x$, et donne la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{+\infty} nxe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \iff \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}.$$

13. Il faut ici un peut d'initiative pour voir comment démarrer la démonstration de la relation demandée ; on peut partir du membre de droite pour écrire, vu que toutes les intégrales concernées convergent :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\left((-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x\right)+(-1)^N\int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\left((-1)^{n-1}xe^{-nx}\right)+(-1)^N\frac{xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\left(-x\sum_{n=1}^{N}(-e^{-x})^n+(-1)^N\frac{xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\left(-x.\frac{-e^{-x}-(-1)^{N+1}e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}+\frac{(-1)^N xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \quad \text{car } -x.\frac{-(-1)^{N+1}e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}=-\frac{(-1)^N xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$4\left(\sum_{n=1}^{N}\left((-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x\right)+(-1)^N\int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x\right)=4\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=V(X).$$

14. a) Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$ : il est clair que $R_N(x)$ est toujours positif, et

$$|R_N(x)|=R_N(x)=xe^{-(N+1)x}\times\frac{1}{1+e^{-x}}\leqslant xe^{-(N+1)x} \text{ car } 0<\frac{1}{1+e^{-x}}<1 \text{ et } xe^{-(N+1)x}\geqslant 0.$$

b) Les fonctions concernées par l'inégalité précédente sont continues et positives sur $[0\,;+\infty[$, et leurs intégrales de 0 à $+\infty$ sont convergentes : par croissance et positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$0\leqslant\int_0^{+\infty}R_N(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}xe^{-(N+1)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(N+1)^2} \text{ d'après 12.}$$

Puisque bien sûr $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{(N+1)^2}=0$, le théorème d'encadrement assure bien que :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}R_N(x)\mathrm{d}x=0.$$

15. Au vu du résultat de la question 12., la relation obtenue à la question 13. se réécrit :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad V(X)=4\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+(-1)^N\int_0^{+\infty}R_N(x)\mathrm{d}x\right).$$

Le résultat de 14.b) implique que $\lim\limits_{N\to+\infty}(-1)^N\displaystyle\int_0^{+\infty}R_N(x)\mathrm{d}x=0$ puisque $(-1)^N$ est bornée (par $-1$ et 1) ; d'autre part, le résultat de la question 7 et la valeur admise par l'énoncé assurent que $\lim\limits_{N\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

On peut donc passer à la limite quand $N$ tend vers $+\infty$ dans l'égalité vérifiée par $V(X)$, et on obtient bien :

$$V(X)=4\times\left(\frac{\pi^2}{12}+0\right)=\frac{\pi^2}{3}.$$

## Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\otimes, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, toutes de même loi que $X$.

L'énoncé admet que $X^2$ admet une variance et que $V(X^2) = \dfrac{16\pi^4}{45}$.

16. Les variables aléatoires $(X_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes car les $X_i$ le sont (lemme des coalitions), de même loi, admettant d'après la partie précédente une espérance commune $E(X_i^2) = V(X_i) = \dfrac{\pi^3}{3}$ et une variance comme $V(X_i^2) = \dfrac{16\pi^4}{45}$ d'après l'énoncé.

    La loi faible des grands nombres affirme alors directement que $V_n = \dfrac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ converge en probabilité vers $\dfrac{\pi^3}{3}$.

17. La fonction $\psi :\ x \mapsto \sqrt{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et les variables aléatoire $V_n$ est à valeurs positives : d'après le cours, on peut directement affirmer que la suite de variables aléatoires $\big(\psi(V_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\psi\big(\frac{\pi^2}{3}\big) = \pi$.
    La suite de variables aléatoires cherchées est donc définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sqrt{3V_n} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$

18. Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0\,;1[$. Comme $F^{-1}$ est, d'après la partie 1, bijective de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$, l'univers-image de $F^{-1}(U)$ est bien $\mathbb{R}$ comme $X$, et la fonction de répartition de cette variable aléatoire est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}\big(F^{-1}(U) \leqslant x\big) = \mathbf{P}\big(U \leqslant F(x)\big) \text{ car } F \text{ est continue, strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

    Or pour tout $x \in \mathbb{R},\ F(x) \in ]0\,;1[$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}\big(U \leqslant F(x)\big) = F(x)$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}\big(F^{-1}(U) \leqslant x\big) = F(x).$$

    Ce résultat signifie que $F^{-1}(U)$ et $X$ ont la même fonction de répartion, donc suivent la même loi.

19. Le résultat précédent et l'expression de $F^{-1}$ calculée à la fin de la partie 1. permettent de simuler la variable aléatoire $X$ : il suffit de simuler $F^{-1}(U)$, où $U$ est simulée par l'appel à la fonction `rd.random()`.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def realisation_X():
    U = rd.random()
    X = np.log(U/(1-U))
    return X
```

20. Sachant simuler $X$, on peut alors simuler la variable aléatoire $T_n$ définie à la question 17. On rappelle que les résultats des appels successifs à la fonction `rd.random()` peuvent être considérés mutuellement indépendants : il en est donc de même des résultats des appels successifs à la fonction `realisation_X`.

```
def estimation_pi(n):
    T = 0
    for i in range(1,n+1):
        T = T+realisation_X()**2
    return (3/n*T)**(0.5)        # puissance 1/2 ou numpy.sqrt...
```

21. a) La fonction $\Phi$ : $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, réduite.

Elle a pour dérivée la fonction $\varphi$ : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui redémontre le résultat classique selon lequel $\Phi$ est continue (car dérivable), strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\big]\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)\big[=]0\,;1[$.

Le réel $0,975$ appartient bien à $]0\,;1[$, et possède donc un unique antécédent réel $z$, qui vérifie donc $\Phi(z) = 0,975$ (et il est bon de savoir que $z \approx 1,96$, valeur très couramment utilisée).

L'énoncé admet d'ailleurs que $z \leqslant 2$ et demande de considérer la majoration $\pi \leqslant 4$.

b) Les équivalences suivantes :

$$\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z \iff -z \leqslant \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left(V_n - \frac{\pi^2}{3}\right) \leqslant z \iff -z \leqslant \frac{V_n - \frac{\pi^2}{3}}{\sqrt{\frac{16\pi^4}{45n}}} \leqslant z,$$

conduisent à mettre en œuvre le théorème de la limite centrée pour les variables aléatoires $(X_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ :

Elles sont bien mutuellement indépendantes et de même loi, admettent une espérance et admettent une variance non nulle ; puisque leur moyenne empirique est la variable aléatoire $V_n$ déjà étudiée, le théorème de la limite centrée assure alors que la suite de variables aléatoires centrées réduites $V_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{V_n - \frac{\pi^2}{3}}{\sqrt{\frac{16\pi^4}{45}}}\right) = \dfrac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left(V_n - \dfrac{\pi^2}{3}\right)$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, réduite.

Par conséquent on peut écrire, grâce au travail fait au début de cette question :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(-z \leqslant V_n^* \leqslant z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 1,95 - 1 = 0,95.$$

c) On réécrit de nouvelles équivalences pour isoler $\dfrac{\pi^2}{3}$ au milieu d'une double inégalité :

$$\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z \iff -z \leqslant \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left(V_n - \frac{\pi^2}{3}\right) \leqslant z \iff -\frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}} \leqslant V_n - \frac{\pi^2}{3} \leqslant \frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}}$$

$$\iff V_n + \frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}} \geqslant \frac{\pi^2}{3} \geqslant V_n - \frac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}}$$

Comme $\pi \leqslant 4$ et $z \leqslant 2$, on a $\dfrac{4\pi^2 z}{3\sqrt{5n}} \leqslant \dfrac{4 \times 16 \times 2}{3\sqrt{5n}} = \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}$, donc :

$$\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z \Longrightarrow V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}} \geqslant \frac{\pi^2}{3} \geqslant V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}}$$

En termes de probabilités, on a donc :

$$\mathbf{P}\left(\frac{128}{3\sqrt{5n}} \geqslant \frac{\pi^2}{3} \geqslant V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right)$$

Donc $\left[V_n - \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}\,; V_n + \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{\pi^2}{3}$ au niveau de confiance 95% qui ne dépend bien ni de $\pi$, ni de $z$.

d) On peut continuer dans le même esprit :

$$V_n+\frac{128}{3\sqrt{5n}} \geqslant \frac{\pi^2}{3} \geqslant V_n-\frac{128}{3\sqrt{5n}} \iff 3V_n+\frac{128}{\sqrt{5n}} \geqslant \pi^2 \geqslant 3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}} \iff \sqrt{3V_n+\frac{128}{\sqrt{5n}}} \geqslant \pi \geqslant \sqrt{3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}}}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ ($3V_n - \frac{128}{\sqrt{5n}}$ est bien positif pour $n$ assez grand, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{128}{\sqrt{5n}} = 0$).

On a donc : $\mathbf{P}\left(\sqrt{3V_n+\frac{128}{\sqrt{5n}}} \geqslant \pi \geqslant \sqrt{3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}}}\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n-\frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right)$,

donc $\left[\sqrt{3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}}}\,;\sqrt{3V_n+\frac{128}{\sqrt{5n}}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\pi$ au niveau de confiance 95%.

22. Le graphique de l'énoncé fait bien apparaître la convergence (en probabilité) de l'estimateur $T_n = \sqrt{3V_n}$ vers $\pi$.

Il fait aussi apparaître le fait que $T_n = \sqrt{3V_n}$ est toujours compris entre les deux bornes $\sqrt{3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}}}$ et $\sqrt{3V_n+\frac{128}{\sqrt{5n}}}$ de l'intervalle de confiance, dont l'étendue (la largeur) tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Un point intéressant également est le fait que la borne inférieure de l'intervalle de confiance vaut 0 tant que $\sqrt{3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}}}$ n'est pas positif : en toute rigueur, on aurait donc dû en toute généralité choisir $\sqrt{\max(3V_n-\frac{128}{\sqrt{5n}},0)}$ comme borne inférieure de l'intervalle de confiance (d'où la précaution prise dans la rédaction de la question précédente où on a dit "pour $n$ assez grand"...)

23. Le graphique est sans appel : pour toutes les valeurs de $n$ entre 1 et $10^3$, on a systématiquement plus de 95% d'appartenance de $\pi$ à l'intervalle de confiance proposé, ce qui plaide en faveur d'une constante qualité de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance voulu.

La pertinence de l'intervalle proposé résidera donc davantage dans son étendue, qui doit être d'autant plus faible (ce qui exigera des valeurs assez grandes de $n$) pour que l'approximation de $\pi$ qu'on en déduit atteigne la précision voulue. Le niveau de confiance 95% est certes atteint pour de faibles valeurs de $n$, mais comme le montre le graphique de la question précédente, c'est dû au fait que l'intervalle en question est très large !