MATHÉMATIQUES - Edhec E 2022

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les produits JM et MJ de deux matrices carrées d'ordre 2, sont encore des matrices de ce format, et leur différence également : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = JM - MJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et λ, μ des réels quelconques :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\cdot M+\mu\cdot N) &= J(\lambda\cdot M+\mu\cdot N)-(\lambda\cdot M+\mu\cdot N)J = \lambda\cdot JM+\mu\cdot JN-\lambda\cdot MJ-\mu\cdot NJ\\ &= \lambda\cdot(JM-MJ)+\mu\cdot(JN-NJ) = \lambda\cdot\varphi(M)+\mu\cdot\varphi(N)\end{aligned}$$

   Donc $\varphi :\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est linéaire, c'est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. a) On calcule les images par φ des quatres matrices élémentaires de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

   - $\varphi(K_1) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = -K_2+K_3$
   - $\varphi(K_2) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} = -K_1+K_4$
   - $\varphi(K_3) = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = K_1-K_4$
   - $\varphi(K_4) = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = K_2-K_3$

   b) La matrice A de φ dans la base (K_1,K_2,K_3,K_4) rassemble en colonnes, les coefficients de la décomposition des images $\varphi(K_1),\varphi(K_2),\varphi(K_3),\varphi(K_4)$ dans la base (K_1,K_2,K_3,K_4). Au vu des résultats précédents :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\varphi(K_1) & \varphi(K_2) & \varphi(K_3) & \varphi(K_4)\end{array} \\ A = & \begin{pmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}K_1\\K_2\\K_3\\K_4\end{array}\end{array}$$

   c) On remarque que la matrice A est symétrique réelle : d'après le théorème admis du cours, on en déduit que A est diagonalisable, et il en est alors de même pour l'endomorphisme φ qu'elle représente.

3. a) En notant C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de la matrice A, on remarque que $C_1 = -C_4$ et $C_2 = -C_3$, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2)$. Comme C_1 et C_2 sont non nulles et non proportionnelles, alors la famille (C_1, C_2) est libre et de rang 2, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

   Comme (K_1,K_2,K_3,K_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors d'après une propriété de cours :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\big(\varphi(K_1),\varphi(K_2),\varphi(K_3),\varphi(K_4)\big) = \mathrm{Vect}(-K_2+K_3, -K_1+K4)$$

   puisqu'à nouveau, $\varphi(K_3) = -\varphi(K_1)$ et $\varphi(K_4) = -\varphi(K_2)$. Ainsi $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$, et possède une famille génératrice $(-K_2+K3, -K_1+K_4)$ de deux vecteurs : cette dernière est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

b) Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{rg}(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 4 - 2 = 2.$$

L'indication de l'énoncé nous incite à calculer : $\varphi(I) = JI - IJ = J - J = 0_2$ et $\varphi(J) = J^2 - J^2 = 0_2$, donc (I, J) est une famille de deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ qui est de dimension 2 : comme I et J sont non-nulles et non-colinéaires, elles forment une famille libre et donc une base, au vu de sa dimension, de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. a) Les calculs matriciels donnent :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

on remarque donc que $A^3 = 4A$, donc on a bien $A^3 - 4A = 0_4$.

b) Le résultat précédent signifie que $P(X) = X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de A ; les valeurs propres de A se trouvent donc *parmi* les racines de $P(X)$.

Or on peut factoriser immédiatement : $P(X) = (X^2 - 4)X = (X - 2)(X + 2)X$; les racines de P sont donc $\{-2, 0, 2\}$, et le spectre de A, et donc de φ, est inclus dans cet ensemble.

5. Le script `Scilab` proposé par l'énoncé calcule $\mathrm{rg}(A - 2I) = 3$ et $\mathrm{rg}(A + 2I) = 3$. Le théorème du rang assure alors que $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - 2\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 1 = \dim \mathrm{Ker}(\varphi + 2\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$.

Or ces deux noyaux, qui sont donc non réduits à $\{0_2\}$, sont par définition les sous-espaces propres de φ pour les valeurs propres 2 et -2 respectivement. Cela signifierait donc que -2 et 2 sont bien valeurs de φ, et que les sous-espaces propres associées sont chacun de dimension 1.

6. a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On résout successivement :

- $AX = 2X \iff (A - 2I)X = 0_{4,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & - & y & + & z & & & = & 0\ (L_1) \\ -x & - & 2y & & & + & t & = & 0\ (L_2) \\ x & & & - & 2z & - & t & = & 0\ (L_3) \\ & & y & - & z & - & 2t & = & 0\ (L_4) \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & -3y & - & z & + & 2t & = & 0\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ & & -y & - & 3z & - & 2t & = & 0\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\ & & y & - & z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & -3y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ & & & & -8z & - & 8t & = & 0\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ & & & & -4z & - & 4t & = & 0\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles : on peut supprimer L_4 par exemple, et le système est échelonné avec une variable libre (t). On écrit donc z en fonction de t, puis y et x par substitutions remontantes, ce qui donne :

$$\begin{cases} -2x - 2t = 0 \iff x = -t \\ -3y + 3t = 0 \iff y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{donc} \quad X = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}$$

- $AX=-2X \iff (A+2I)X=0_{4,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & & & = & 0\ (L_1) \\ -x & + & 2y & & & + & t & = & 0\ (L_2) \\ x & & & + & 2z & - & t & = & 0\ (L_3) \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0\ (L_4) \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 2t & = & 0\ L_2 \leftarrow 2L_2+L_1 \\ & & y & + & 3z & - & 2t & = & 0\ L_3 \leftarrow 2L_3-L_1 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ & & & & 8z & - & 8t & = & 0\ L_3 \leftarrow 3L_3-L_2 \\ & & & & -4z & + & 4t & = & 0\ L_4 \leftarrow 3L_4-L_2 \end{array}\right.$$

À nouveau les deux dernières lignes sont redondantes, et t est variable libre :

$$\begin{cases} 2x+2t=0 \iff x=-t \\ 3y+3t=0 \iff y=-t \\ z=t \end{cases} \qquad \text{donc} \quad X=\begin{pmatrix}-t\\-t\\t\\t\end{pmatrix} \text{ avec } t\in\mathbb{R} \text{ quelconque}$$

b) De ce qui précède on déduit que -2 et 2 sont bien valeurs propres de φ car les systèmes $AX=2X$ et $AX=-2X$ possèdent chacun une infinité de solutions.

On peut aussi en déduire les sous-espaces propres $E_2(\varphi)=\mathrm{Ker}(\varphi-2\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ et $E_{-2}(\varphi)=\mathrm{Ker}(\varphi+2\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$:

$$E_2(\varphi)=\left\{\begin{pmatrix}-t & t\\ -t & t\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-2}(\varphi)=\left\{\begin{pmatrix}-t & -t\\ t & t\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Ces deux sous-espaces propres sont chacun de dimension 1 car engendrés à chaque fois par une seule matrice non nulle.

Le dernier sous-espace propre est $E_0(\varphi)=\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}(I,J)$, dont on a vu à la question 3.b) qu'il est de dimension 2 : 0 est bien valeur propre de φ, de même que -2 et 2, et φ n'a pas d'autre valeurs propre d'après 4.a).

D'ailleurs la somme des dimensions des trois sous-espaces propres vaut $4=\dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui confirme que φ est diagonalisable (mais on le savait déjà).

Exercice 2

1. Le script suivant est un grand classique : tant que le joueur n'a pas perdu et n'a pas atteint le niveau maximal n, il tente un nouveau niveau qu'il passe avec la probabilité p ; ce dernier événement est simulé via la commande `rand() <= p` qui utilise la loi uniforme à densité sur $[0;1]$.

```
p = input('entrez la valeur de p dans ]0;1[ : ')
n = input('entrez la valeur de n : ')
X = 0
while X < n & rand() <= p
    X = X + 1
end
disp(X, 'le niveau du joueur est : ')
```

2. a) Il est clair que le niveau atteint par le joueur est compris entre 0 et n : $X_n(\Omega) \subset [\![0\,;n]\!]$.

   Le joueur peut échouer dès le premier niveau, auquel cas $[X_n = 0]$ est réalisé.

   Pour tout entier $k \in [\![1;n-1]\!]$: l'événement $[X_n = k]$ est réalisé si le joueur remporte les k premiers niveaux, ce qui est possible, et échoue au $k+1$-ième, ce qui est possible également.

   Enfin, l'événement $[X_n = n]$ est possible et réalisé si et seulement si le joueur passe avec succès les n niveaux du jeu.

   On a donc bien justifié que $X_n(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

   b) Comme dit ci-dessus, $[X_n = 0] = \overline{R_1}$ est réalisé si et seulement si le joueur échoue dès le premier niveau : $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p = q$.

   c) L'égalité d'événements : $[X_n = n] = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n$ issue des explications données en 2.a) et la formule des probabilités composées, amènent à écrire :

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}}(R_n) = p^n$$

   d) Pour tout entier $k \in [\![1\,;n-1]\!]$: $[X_n = k] = R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{k-1}}(R_k) \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) = p^k(1-p) = p^k q.$$

   Si $k = 0$, le résultat vaut $p^0(1-p) = q = \mathbb{P}(X_n = 0)$, donc cette formule générale est en fait valable pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

3. Au vu de ce qui précède, on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = n) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (p^k - p^{k+1}) + p^n = p^0 - p^{n-1+1} + p^n = 1 \qquad \text{après télescopage}$$

4. a) La variable aléatoire X_n est *finie*, elle admet donc une espérance donnée par la formule :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k q + np^n$$

   b) En réécrivant : $E(X_n) = pq \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$, on peut calculer la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$:

   - La somme $\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}$ correspond à la somme partielle d'une série géométrique dérivée, convergente puisque de raison $p \in]0\,;1[$.

     D'après la formule du cours : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \dfrac{1}{(1-p)^2} = \dfrac{1}{q^2}$.

   - Puisque $p \in]0\,;1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} np^n = 0$ par croissances comparées.

   Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = pq \times \dfrac{1}{q^2} + 0 = \dfrac{p}{q}$.

5. a) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque : pour tout entier $n \geqslant k+1$, on a $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, donc $k \in X_n(\Omega)$ et on a bien d'après ce qui précède, $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k q$ (alors que $\mathbb{P}(X_n = k) = 0$ tant que $n < k$).

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $\big(\mathbb{P}(X_n = k)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc stationnaire à partir du rang $k+1$; on peut donc écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = p^k q$$

Et comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p^k q = q \times \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1$, alors par définition on a bien montré que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X d'univers-image $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par la formule générale : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = p^k q$.

c) On pose $Y = X + 1$.

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $Y(\Omega) = \big\{k+1 |\ k \in X(\Omega)\big\} = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X + 1 = k) = \mathbb{P}(X = k-1) = p^{k-1}q.$$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre q, qui est donc suivie par Y. Le cours sur cette loi donne alors : $E(Y) = \dfrac{1}{q}$. Mais alors, par linéarité de l'espérance, $E(X)$ existe et vaut :

$$E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q}.$$

On remarque donc que $E(X) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 3

1. Puisque n est un entier supérieur ou égal à 1, la fonction $f_n :\ x \mapsto \dfrac{x}{x+n}$ est bien définie et dérivable sur $[0\,;1]$, avec :

$$\forall x \in [0\,;1], \quad f_n'(x) = \frac{1\cdot(x+n) - x\cdot 1}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

La fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;1]$:

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	0	↗	$\frac{1}{1+n}$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\mathrm{d}x.$

On remarque donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n} f_n(x)\mathrm{d}x.$

Or l'étude de fonction faite à la question précédente permet de constater que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;1], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1} \iff 0 \leqslant \frac{1}{n} f_n(x) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

La fonction f_n est continue sur $[0\,;1]$, donc d'après l'inégalité de la moyenne :

$$0\cdot(1-0) \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant dfrac1n(n+1)\cdot(1-0) \iff 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, comme série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.
Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Par définition, le fait que la série de terme général u_n converge, signifie que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles, est convergente. On note γ sa limite.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Par sommation de ces inégalités, on en déduit :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \iff 0 \leqslant S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n+1}.$$
   Le passage à la limite dans ce dernier encadrement donne :
   $$0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

   c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles est croissante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0.$$

5. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;1]$:
   $$\frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{a(x+k) - bk}{x(x+k)} = \frac{(ax(a-b)k}{x(x+k)}.$$
   Par identification des coefficients au numérateur avec $\dfrac{x}{k(x+k)}$, on en déduit que :
   $$\begin{cases} a & = 1 \\ (a-b)k & = 0 \end{cases} \iff a = b = 1, \qquad \text{donc } \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}.$$
   On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\cdot(1-0) - \Big[\ln(x+k)\Big]_0^1 = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k).$$

   b) Par sommation de la relation précédente, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \big(\ln(n+1) - \ln(1)\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \gamma$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln sur $]0\,;+\infty[$,
   donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \gamma$.

b) On retrouve ici une question extrêmement classique en voie ECE : il y a plusieur façons possibles de la rédiger.

- Avec l'Inégalité des Accroissements Finis : la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

  La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [n\,;n+1]$: $\quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} = \ln'(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

  D'après l'Inégalité des Accroissements Finis, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

  $$\frac{1}{n+1} \cdot (n+1-n) \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n} \cdot (n+1-n) \iff \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

- Avec des intégrales : on reprend le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [n\,;n+1],\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

  La fonction inverse est continue sur $[n\,;n+1]$, donc d'après l'inégalité de la moyenne :

  $$\frac{1}{n+1} \cdot (n+1-n) \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \cdot (n+1-n) \iff \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \leqslant 0,$$

donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante.

c) La suite $(S_n)_{n_i n\mathbb{N}^*}$ est croissante de limite γ, et la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de même limite γ ; on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leqslant \gamma \leqslant T_n.$$

7. a) D'après l'encadrement précédent : lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}, le réel S_n représente une valeur approchée *par défaut* de la limite γ à 10^{-3} près (et T_n est de même une valeur approchée *par excès* de la même limite).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, quantité qu'on peut évaluer à tout moment et qui finit par être aussi petite qu'on veut puisque, comme on l'a déjà vu :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = 0.$$

```
n = 1
s = 1-log(2)
while log(n+1) - log(n) > 0.001
    n = n+1
    s = s + 1/n - log(n+1)+log(n)
end
disp(s)
```

À l'exécution, le script affiche, pour une valeur calculée de $n = 1000$, la valeur $0,576$ comme approximation par défaut de γ à 10^{-3} près.

Remarque : on a été obligé ici de calculer de proche $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ via la relation de récurrence $S_{n+1} = S_n - \ln(n+1) + \ln(n)$ à cause de la valeur initiale `s = 1-log(2)`, alors qu'il aurait été plus efficace de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ d'abord, pour en déduire finalement $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$: moins de calculs et moins d'accumulation d'erreurs d'approximations par `Scilab`.

Problème

Partie 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x$.

1. a) La fonction $x\mapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur $[0\,;1]$ en tant que fonction polynômiale : ce fait suffit à garantir que l'intégrale $I(p,q)$ est bien définie.

   b) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$; on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $I(p,q)$ en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x)=(1-x)^q & \longrightarrow & u'(x)=-q(1-x)^{q-1} \\ v'(x)=x^p & \longrightarrow & v(x)=\dfrac{x^{p+1}}{p+1} \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, donc par intégration par parties :

$$I(p,q)=\left[(1-x)^q\cdot\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1-\int_0^1 -q(1-x)^{q-1}\frac{x^{p+1}}{p+1}\mathrm{d}x$$

$$=(1-1)^q\cdot\frac{1}{p+1}-(1-0)^q\cdot\frac{0}{p+1}+\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1).$$

   L'énoncé admettait alors que l'on peut en déduire par récurrence, l'égalité :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0).$$

   Note : le sujet Edhec E 2008 n'admettait rien du tout et demandait une preuve : on la rédige assez aisément en raisonnant par récurrence sur la seule variable entière p, la propriété $\mathcal{P}(p)$ étant : "$\forall q\in\mathbb{N},\ I(p,q)=\dfrac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$".

2. a) Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$I(p+q,0)=\int_0^1 x^{p+q}(1-x)^0\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1=\frac{1}{p+q+1},$$

   de sorte que :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)=\frac{p!q!}{(p+q)!\times(p+q+1)}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

   b) On en déduit que, pour tout $p\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^p\mathrm{d}x=I(p,p)=\frac{p!\times p!}{(p+p+1)!}=\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie 2

Dans cette partie : $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ et $b_n:\ x\mapsto\begin{cases}\alpha_n x^n(1-x)^n & \text{si } x\in[0\,;1]\\ 0 & \text{si } x\notin[0\,;1]\end{cases}$.

3. La fonction b_n est positive sur $\mathbb{R}$: elle est nulle en-dehors de $[0\,;1]$, et sur $[0\,;1]$ c'est le produit de trois facteurs positifs : $\alpha_n>0$ par sa définition (une factorielle est toujours strictement positive), $x^n\geqslant 0$ si $0\leqslant x\leqslant 1$ et $(1-x)^n\geqslant 0$ si $0\leqslant x\leqslant 1$.

   La fonction b_n est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$ comme fonction constante nulle, et continue

sur $]0\,;1[$ comme fonction polynômiale. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1. (*elle est en fait continue en ces deux points, mais la vérification est inutile pour que b_n soit une densité.*)
Enfin, puisque b_n est nulle en-dehors de $[0\,;1]$ et polynômiale sur ce dernier intervalle, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x = \alpha_n \times \int_0^1 x^n(1-x)^n\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1 \quad \text{d'après la partie 1.}$$

La fonction b_n est donc bien une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

4. Lorsque $n = 0$, la densité b_0 est définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ b_0(x) = \begin{cases} \alpha_0 x^0(1-x)^0 = 1 & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0\,;1] \end{cases}$.

   On reconnaît ici une densité de la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

5. a) La variable aléatoire X_n est à support borné, donc elle admet une espérance qui vaut :

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \alpha_n x^{n+1}(1-x)^n\mathrm{d}x = \alpha_n \cdot I(n+1, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

   b) De la même façon, la variable aléatoire X_n admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n x^{n+2}(1-x)^n\mathrm{d}x = \alpha_n \cdot I(n+2, n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

   La variable aléatoire X_n admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{(n+2)}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2) - (2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{8n+12}$$

   c) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; en reconnaissant que $\mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|X_n - E(X_n)\right|\right)$, et vu que X_n admet une variance, alors on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}, \text{ soit : } 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{(8n+12)\varepsilon^2}.$$

   Puisqu'une probabilité est toujours positive, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(8n+12)\varepsilon^2} = 0$, alors d'après le théorème d'encadrement, on a bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Partie 3

Dans cette partie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \ x \mapsto \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Pour tout réel x : $\quad f_0(x) = \alpha_0 \int_0^x t^0(1-t)^0\mathrm{d}t = 1 \times \int_0^x 1\mathrm{d}t = x.$

7. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f_n(1) = \alpha_n \int_0^1 t^n(1-t)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 b_n(t)\mathrm{d}t = 1$ d'après ce qui a été fait dans la partie 2.

b) Le changement de variable affine $u = 1 - t$ dans l'intégrale $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \alpha_n \int_1^{1-x} (1-u)^n u^n (-\mathrm{d}u) = -\alpha_n \int_1^{1-x} u^n(1-u)^n \mathrm{d}u$$
$$= -\alpha_n . \Big(\int_1^0 u^n(1-u)^n \mathrm{d}u + \int_0^{1-x} u^n(1-u)^n \mathrm{d}u = 1 - f_n(1-x)$$

donc en effet : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) + f_n(1-x) = 1.$

c) En écrivant la relation qu'on vient de démontrer, pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$f_n\big(\frac{1}{2}\big) + f_n\big(\frac{1}{2}\big) = 1 \iff 2f_n\big(\frac{1}{2}\big) = 1 \iff f_n\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}.$$

8. a) La fonction f_n est en fait, par sa définition sous forme intégrale, la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $t \mapsto \alpha_n t^n(1-t)^n$, laquelle est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}$: la fonction f_n est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \alpha_n x^n(1-x)^n$$

b) Il est clair que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} > 0$. Si n est pair, il est tout aussi clair que pour tout réel x, $x^n \geqslant 0$ et $(1-x)^n \geqslant 0$, donc que f_n' est toujours positive sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule en fait qu'en $x = 0$ et en $x = 1$: lorsque n est pair, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si par contre n est un entier impair : alors $x^n(1-x)^n = \big(x(1-x)\big)^n$ est du même signe que $x(1-x) = -x^2 + x$, qui est un trinôme du second degré de racines évidentes 0 et 1.
Les règles de signe des trinômes permettent d'en déduire celui de la dérivée f_n' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$f_n'(x)$	- 0 + 0 $-$

9. a) En utilisant comme suggéré la formule du binôme de Newton pour développer $(1-t)^n = (-t+1)^n$, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t)^k \mathrm{d}t = \alpha_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^x t^{n+k} \mathrm{d}t$$
$$= \alpha_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \Big[\frac{t^{n+k+1}}{n+k+1}\Big]_0^x = \alpha_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} x^{n+k+1}$$

Sous cette dernière forme, il apparaît bien que f_n est une fonction polynômiale,
de degré $n + n + 1 = 2n + 1$ et de coefficient dominant $\alpha_n . \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.
Or on sait qu'en $\pm\infty$, un équivalent d'une fonction polynômiale est son terme de plus haut degré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Ainsi :

- Si n est pair : $f_n(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$, et puisque $\alpha_n > 0$ et $2n + 1 > 0$, alors :

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} = -\infty, \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

- Si par contre n est impair, alors : $f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\dfrac{\alpha_n}{2n+1}x^{2n+1}$, et :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^{2n+1} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^{2n+1} = -\infty.$$

b) On en déduit finalement les tableaux de variations de f_n selon que n est pair ou impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
f_n (n pair)	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
f_n (n impair)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

10. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel x : $f_n'(x) = \alpha_n x^n(1-x)^n$, donc en dérivant une fois de plus :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) &= \alpha_n.\big(nx^{n-1}(1-x)^n + x^n.n.(-1).(1-x)^{n-1}\big) = \alpha_n x^{n-1}(1-x)^{n-1}.\big(x-(1-x)\big)\\ &= \alpha_n.x^{n-1}(1-x)^{n-1}.(2x-1)\end{aligned}$$

b) La courbe (C_n) présente un point d'inflexion d'abscisse x si et seulement si la dérivée seconde f_n'' s'annule en changeant de signe en x.

Au vu de l'expression obtenue à la question précédente, on distingue à nouveau deux cas :

- Si n est impair : alors dans ce cas, $n-1$ est pair et $x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ est positif pour tout réel x, donc $f_n''(x)$ est du signe du seul facteur $(2x-1)$.

  On en déduit donc que $f_n''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \frac{1}{2}$: la courbe (C_n) admet donc un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (puisque $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$).
- Si n est pair : alors $n-1$ est impair, et $x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ est du signe de $x(1-x)$. On applique donc les règles de signe d'un produit pour en déduire celui de $f_n''(x)$:

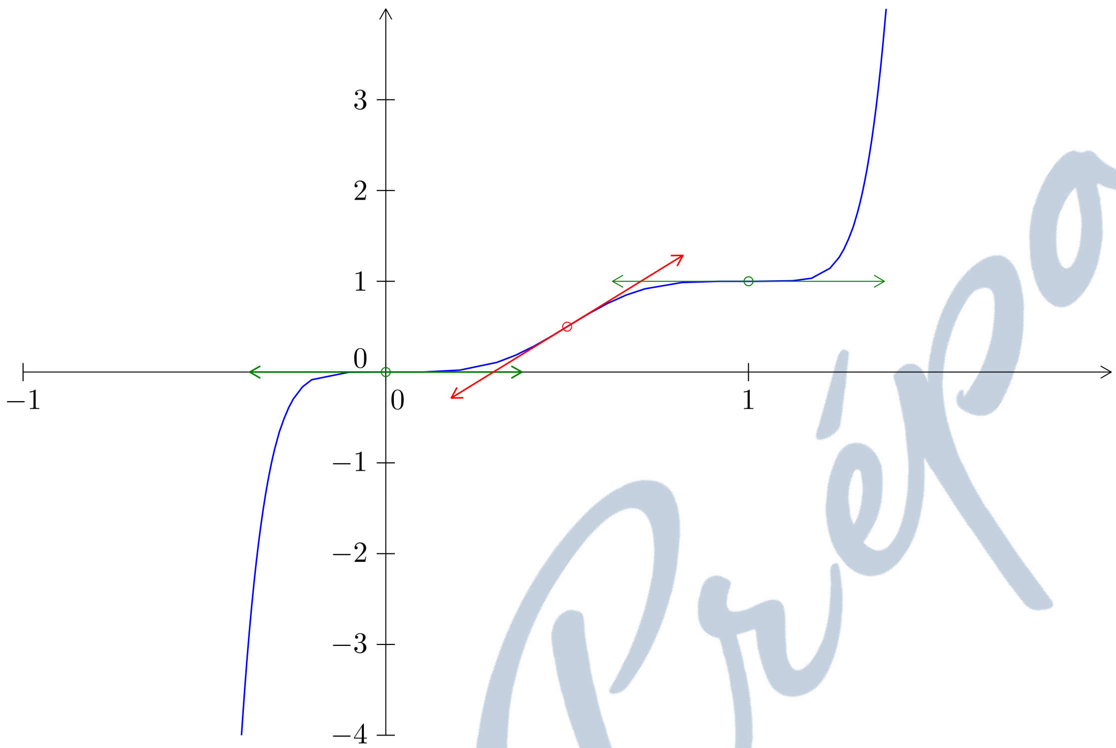
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x^{n-1}(1-x)^{n-1}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

  La courbe (C_n) admet donc bien trois points d'inflexion dans le cas où n est pair, d'abscisses respectives $0, \frac{1}{2}$ et 1.

c) On termine par le tracé des deux allures possibles des courbes (C_n), en distinguant toujours selon la parité de n.

- Voici l'allure de la courbe (C_n) lorsque n est pair : on a repris le calcul de $f_n(x)$ réalisé à la question 9.a), pour $n = 4$ l'expression exacte est :

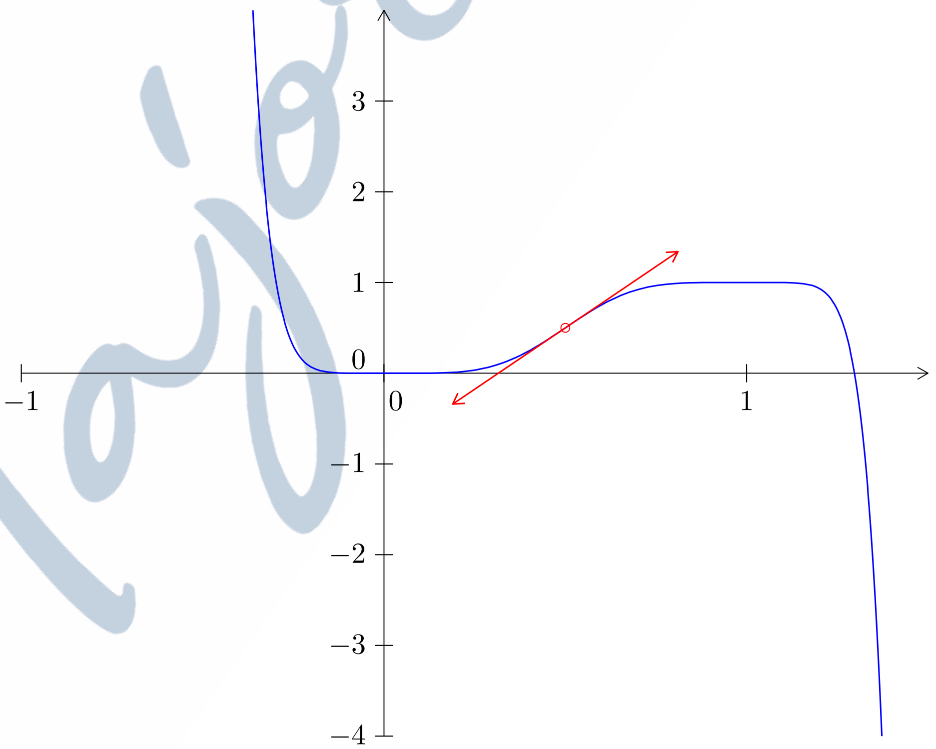
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_4(x) = 126x^5 - 420x^6 + 540x^7 - 315x^8 + 70x^9$$



On remarque bien les trois points d'inflexion de la courbe, où celle-ci traverse à chaque fois la tangente au point considéré.

- Voici l'allure de (C_n) lorsque n est impair ; pour le tracé on a utilisé $n = 5$, et l'expression (non demandée par l'énoncé qui voulait seulement une allure dessinée à la main !) de $f_5(x)$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_5(x) = 462x^6 - 1980x^7 + 3465x^8 - 3080x^9 + 1386x^{10} - 252x^{11}$$



La courbe (C_n) admet cette fois un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.