Corrigé Essec E2 2014

I Autour de la loi de Benford

1) (a) Soit $x > 0$. $\log x = \{\log x\} + \lfloor \log x \rfloor$ donc

$$x = 10^{\log x} = 10^{\{\log x\}+\lfloor \log x \rfloor} = 10^{\{\log x\}}10^{\lfloor \log x \rfloor}.$$

(b) On rappelle que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$ est strictement croissante, puisque sa dérivée est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par $f'(x) = (\ln 10)10^x$ et que $\ln 10 > 0$, de même que sa réciproque $\log$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. (Ce résultat sera utilisé sans le rappeler dans la suite de la partie.)
Soit $x > 0$. $\{\log x\} \in [0, 1[$, donc $10^{\{\log x\}} \in [10^0, 10^1[$ c'est à dire $10^{\{\log x\}} \in [1, 10[$. Donc, en utilisant (a), on constate que $(10^{\{\log x\}}, \lfloor \log x \rfloor)$ est un couple de la forme $(\alpha, n) \in [1, 10[\times\mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha 10^n$.
On montre que c'est le seul : On écrit $x = \alpha 10^n$ avec $\alpha \in [1, 10[$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\log x = \log \alpha + n$. Puisque $\alpha \in [1, 10[$ alors $\log \alpha \in [\log 1, \log 10[= [0, 1[$. Donc $n \leqslant \log x < n + 1$ et donc $n = \lfloor \log x \rfloor$. Finalement, nécessairement, $n = \lfloor \log x \rfloor$ et $\log \alpha = \{\log x\}$ c'est à dire, $\alpha = 10^{\{\log x\}}$.

(c) Soit $x > 0$. On a déjà dit que $10^{\{\log x\}} \in [1, 10[$, donc $\gamma \in [\![1, 9]\!]$.

2) Soit $k \in [\![1, 9]\!]$. $p_k = \log (k + 1) - \log k$, donc , par télescopie,

$$\sum_{k=1}^{9} p_k = \sum_{k=1}^{9} (\log (k + 1) - \log k) = \log 10 - \log 1 = 1 - 0 = 1.$$

3) (a) Il s'agit de la définition de la partie entière.

(b) Le 1)(c) permet d'affirmer que $\Gamma(\Omega) = [\![1, 9]\!]$.
Soit $k \in [\![1, 9]\!]$. $[\Gamma = k] = [k \leqslant 10^{\{\log X\}} < k + 1] = [\log k \leqslant \{\log X\} < \log (k + 1)]$.
Puisque $k \in [\![1, 9]\!]$ on a $\log k \geqslant \log 1 = 0$ et $\log (k + 1) \leqslant \log 10 = 1$. Donc

$$P([\Gamma = k]) = P([\log k \leqslant \{\log X\} < \log (k + 1)]) = \log (k + 1) - \log k = p_k.$$

Γ suit donc la loi de Benford.

4) (a) i) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$. Donc $y - n = \lfloor y \rfloor - n + \{y\}$. Puisque $\{y\} \in [0, 1[$, il est clair que $\lfloor y \rfloor - n \leqslant y - n < \lfloor y \rfloor - n + 1$. Donc $\lfloor y - n \rfloor = \lfloor y \rfloor - n$ et par conséquent

$$\{y - n\} = y - n - \lfloor y - n \rfloor = y - n - (\lfloor y \rfloor - n) = y - \lfloor y \rfloor = \{y\}.$$

ii) Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Les événements $[\{Y\} \leqslant x]$ et $[\{Y - n\} \leqslant x]$ sont les mêmes, donc ont même probabilité. Les deux variables $\{Y\}$ et $\{Y - n\}$ ont donc même fonction de répartition, donc ont la même loi. On peut simplement dire directement que ces deux variables sont égales, donc ont a fortiori même loi.

iii) Appellons G la fonction de répartition de Y. Selon l'énoncé, G est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = g(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $P(Y - \lfloor a_0 \rfloor \leqslant x) = P(Y \leqslant x + \lfloor a_0 \rfloor) = G(x + \lfloor a_0 \rfloor)$.
La variable $Y - \lfloor a_0 \rfloor$ admet donc (par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) une fonction de répartition de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc a densité. Une densité est obtenue en dérivant sa fonction de répartition. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = g(x + \lfloor a_0 \rfloor)$, qui est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

iv) On remarque tout d'abord que pour tout $x \neq \{a_0\}$ on a $x + \lfloor a_0 \rfloor \neq a_0$ et donc $\tilde{g}(x) = g(x + \lfloor a_0 \rfloor) < g(a_0) = M$. Par contre $\tilde{g}(\{a_0\}) = g(a_0) = M$. Donc (h_1) est vérifiée en posant $\tilde{a_0} = \{a_0\}$.

v) On a donc prouvé que $\tilde{g}$ vérifie (h_1).
D'autre part, si $x < y \leqslant \{a_0\}$ alors $x + \lfloor a_0 \rfloor < y + \lfloor a_0 \rfloor \leqslant a_0$ et donc $\tilde{g}(x) < \tilde{g}(y)$, ce qui prouve que $\tilde{g}$ est croissante sur $]-\infty, \{a_0\}]$. On prouve de même la décroissance de $\tilde{g}$ sur $[\{a_0\}, +\infty[$. Donc (h_2) est vérifié.

(b) i) On fait un changement de variable dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$ en posant $t = xu$. Donc $dt = xdu$ et quand $t = 0$, $u = 0$ et quand $t = x$, $u = 1$. On obtient

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^1 \varphi(xu)xdu.$$

Or $x \in]0,1[$. Donc, pour tout $u \in [0,1]$ on a $xu < u$ et donc, puisque φ est croissante, $\varphi(xu) < \varphi(u)$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 (positivité de l'intégrale) on obtient $\displaystyle\int_0^1 \varphi(xu)du \leqslant \int_0^1 \varphi(u)du$. En multipliant par $x > 0$ on obtient le résultat demandé.

ii) On a supposé que $a_0 \in [0,1[$. Donc g est croissante sur $]-\infty, a_0]$, donc en particulier sur $\mathbb{R}_-$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant -1$. L'intervalle $[n, n+1]$ est inclus dans $\mathbb{R}_-$. Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = g(n+t)$. Alors φ est positive, continue (car g possède ces deux propriétés) et croissante sur $[0,1]$. En effet, pour ce dernier point, soient x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$. On a $n \leqslant x + n < y + n \leqslant n + 1$ et donc $g(n+x) < g(n+y)$ ce qui équivaut à $\varphi(x) < \varphi(y)$.
On peut donc écrire, en faisant le changement de variable $t = n + u$ et en appliquant le résultat de la question précédente :

$$\int_n^{n+x} g(t)dt = \int_0^x g(n+u)du = \int_0 x\varphi(u)du \leqslant x\int_0^1 \varphi(u)du = x\int_0^1 g(n+u)du = x\int_n^{n+1} g(t)dt.$$

En divisant par x qui est strictement positif, on obtient le résultat demandé.

iii) Le résultat de la question précédente peut s'écrire : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x}\int_{I_{-n,x}} g(t)dt \leqslant \int_{-n}^{-n+1} g(t)dt.$$

Comme g est une fonction positive et que $x > 0$, donc $-n < -n + x$, la quantité $\displaystyle\frac{1}{x}\int_{I_{-n,x}} g(t)d$ est positive.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_{-n}^{-n+1} g(t)dt = \int_{-N}^{0} g(t)dt$ par la relation de Châsles. Or g est une densité de probabilité donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ existe. La série de terme général $\displaystyle\int_{-n}^{-n+1} g(t)dt$ converge donc. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{x}\int_{I_{-n,x}} g(t)dt$ converge aussi et par sommation de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\int_{I_{-n,x}} g(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-n+1} g(t)dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)dt.$$

De la même manière, en utilisant l'inégalité admise pour $n \geqslant 2$, qui compare deux quantités positives, puis la convergence de $\displaystyle\int_{1+x}^{+\infty} g(t)dt$ puisque g est une densité de probabilité on obtient la seconde inégalité demandée.

iv) Pour tout $u \in [0, x]$ on a $g(u) \leqslant M$, donc, par intégration, puisque $x > 0$

$$\int_0^x g(u)du \leqslant \int_0^x M du = Mx.$$

De même sur l'intervalle $[1, 1+x]$ on a aussi $g(u) \leqslant M$ et donc

$$\int_1^{1+x} g(u)du \leqslant \int_1^{1+x} M du = Mx.$$

v) Donc

$$\frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{I_{n,x}} g(u)du = \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 1}\int_{I_{-n,x}} g(u)du+\frac{1}{x}\int_{I_{0,x}} g(u)du+\frac{1}{x}\int_{I_{1,x}} g(u)du+\frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 2}\int_{I_{n,x}} g(u)du$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{0} g(u)du + 2M + \int_{1+x}^{+\infty} g(u)du \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du + 2M = 1 + 2M.$$

(On a utilisé que $0 < 1 + x$, la relation de Châsles et le fait que g est une densité de probabilité.)

vi) Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'événement $Y \in I_{n,x}$ est équivalent à $(\lfloor Y \rfloor = n) \cap (\{Y\} < x$. Or la famille $(\lfloor Y \rfloor = n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements. La (pré)formule des probabilités totales pour l'événement $(\{Y\} < x)$ avec ce système complet d'événements donne :

$$(\{Y\} < x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ((\lfloor Y \rfloor = n) \cap (\{Y\} < x)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (Y \in I_{n,x}).$$

vii) La formule des probabilités totales (bien écrite avec les probabilités cette fois-ci) donne alors

$$P(\{Y\} < x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P(Y \in I_{n,x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{I_{n,x}} g(u)du.$$

En divisant par x et en utilisant les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient :

$$1 - 2M \leqslant \frac{1}{x}P(\{Y\} < x) \leqslant 1 + 2M$$

ce qui s'écrit aussi $|\frac{1}{x}P(\{Y\} < x) - 1| \leqslant 2M$ c'est à dire , en remultipliant par $x(> 0)$ et en se rappelant que $x < 1$,

$$|P(\{Y\} < x) - x| \leqslant 2Mx \leqslant 2M.$$

5) (a) Soit F_n la fonction de répartition de Z_n. On rappelle que $F_n(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_n(x) = 1 - e^{-x/n}$ pour $x \geqslant 0$.

Soit G_n la fonction de répartition de Y_n. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\sqrt{Z_n} \leqslant x).$$

Si $x < 0$, clairement, $G_n(x) = 0$ puisqu'une racine carrée ne peut être négative. Pour $x \geqslant 0$, $G_n(x) = P(Z_n \leqslant x^2) = 1 - e^{-x^2/n}$. La fonction G_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 on constate que les limites à droites et à gauche sont égales et valent 0, qui est la valeur de $G_n(0)$. Donc Y_n est bien une variable à densité. Sur $\mathbb{R}^*$ on a $g_n(x) = G_n'(x)$, donc $g_n(x) = 0$ pour $x < 0$ et $g_n(x) = 2\frac{x}{n}e^{-x^2/n}$ pour $x > 0$. On peut choisir $g_n(0)$ arbitrairement, donc on prend $g_n(0) = 0$, ce qui rend la fonction g_n continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g_n'(x) = 2e^{-x^2/n}(1 - 2\dfrac{x^2}{n})$. On constate que $g_n'(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$ pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et que g_n atteint un maximum en ce point, maximum de valeur $M = \sqrt{\dfrac{2}{n}}e^{-1/2}$.

(c) On vérifie que toutes les hypothèses de la question 4) sont réalisées et donc que l'on peut utiliser son résultat avec Y_n, quel que soit $n \geqslant 1$.

(d) Il est clair que pour $x < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\{Y_n\} < x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\{Y_n\} < x) = 0$.
De même, pour $x \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\{Y_n\} < x) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\{Y_n\} < x) = 1$.
Enfin, pour $x \in [0, 1[$, selon la question précédente, par comparaison, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{\dfrac{2}{n}}e^{-1/2} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(\{Y_n\} < x) - x| = 0$, ce qui veut dire $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\{Y_n\} < x) = x$.
Donc la suite des fonctions de répartition de $(\{Y_n\})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. C'est la définition de la convergence en loi.

II Répartition des valeurs dans une table numérique

6) (a) On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre n et $n + h$ (On note que $n \geqslant 1$ et que $|h| \leqslant 1/2$ ce qui garantit que $n + h \in [1/2, +\infty[$). Cela donne

$$|\varphi(n + h) - \varphi(n) - h\varphi'(n)| \leqslant \frac{Mh^2}{2} \leqslant \frac{M}{8}$$

puisque $h^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. On obtient donc le résultat demandé.

(b) On intègre l'inégalité précédente entre $-1/2$ et $1/2$:

$$-\int_{-1/2}^{1/2} \frac{M}{8}dh \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(n + h)dh - \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(n)dh - \varphi'(n)\int_{-1/2}^{1/2} hdh \leqslant \frac{M}{8}\int_{-1/2}^{1/2} dh.$$

On constate que $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} dh = 1$, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} hdh = 0$ et qu'en posant $u = n+h$, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \varphi(n+h)dh = \int_{n-1/2}^{n+1/2} \varphi(u)du$. Cela donne finalement

$$-\frac{M}{8} \leqslant \int_{n-1/2}^{n+1/2} \varphi(u)du - \varphi(n) \leqslant \frac{M}{8}.$$

(c) A partir de cette question, dans la partie II, on utilise des fonctions trigonométriques qui ne sont pas connues des candidats. Donc, même si quelques bribes de questions sont faisables en admettant quelques résultats, la correction n'est d'aucun intérêt.

III Sur les nombres normaux

9) (a) Chaque variable Y_k ne dépend que de X_k. Or les X_k sont des variables aléatoires indépendantes donc les Y_k aussi. Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\dfrac{1}{10})$ puisque $P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{10}$ et $P(Y_k = 0) = P(X_k \neq 1) = \dfrac{9}{10}$.

(b) $E(Y_k) = \dfrac{1}{10}$ et $V(Y_k) = \dfrac{9}{100}$.

(c) Les variables Y_k étant indépendantes, $V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}V(\sum_{k=1}^{n} Y_k) = \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} V(Y_k)) = \frac{9}{100n}$.

(d) Par linéarité de l'espérance, on a $E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{10}$. L'inégalité demandée est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev écrite avec la variable S_n/n.

(e) Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{V(S_n/n)}{\epsilon^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{100n\epsilon^2} = 0$, compte tenu du fait qu'une probabilité est toujours positive, par encadrement, on obtient le résultat demandé.

10) (a) Montrons la propriété suivante : Une partie K de $\mathbb{N}$ est infinie si et seulement si elle n'est pas majorée, c'est à dire que si et seulement si quel que soit l'entier N, il existe un élément de K supérieur ou égal à N. En effet :

- Supposons K majoré, c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les éléments de K soient inférieurs ou égaux à N. Alors $K \subset [\![0, N]\!]$ et le cardinal de K est inférieur ou égal à $N+1$. Donc K n'est pas infini. Par contraposée, si K est infini, pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un élément de K supérieur à N et donc K n'est pas majoré.
- Réciproquement, supposons K de cardinal fini n. Parmi n entiers, il y en un de plus grand que les autres, qui sera donc un majorant de K. Donc K est majoré. Par contraposée, si K n'est pas majoré alors il est infini.

A est l'ensemble des ω vérifiant la propriété : " pour tout $N \geqslant 1$ il existe un $k \geqslant N$ tel que ω appartient à A_k". Donc A est l'ensemble des ω tels que l'ensemble des indices k tels que $\omega \in A_k$ n'est pas majoré. Finalement, A est l'ensemble des ω tels que l'ensemble des indices k tels que $\omega \in A_k$ est infini, ce qui veut bien dire que A est l'ensemble des ω qui appartiennent à une infinité de A_k.

(b) Pour tout $N \geqslant 1$, $B_N = B_{N+1} \cup A_N$ donc $B_{N+1} \subset B_N$.

(c) La propriété (ii) rappelée en début de partie est utilisable et l'on a donc

$$P(A) = P(\bigcap_{N\geqslant 1} B_N) = \lim_{N\to+\infty} P(B_N).$$

(d) i) $\sum_{k=N}^{+\infty} P(A_k)$ est le reste d'ordre $N-1$ d'une série convergente. On a donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N}^{+\infty} P(A_k) = 0.$$

ii) La propriété (i) rappelée en début de partie, et adaptée en changeant l'indice 0 en N permet d'affirmer que $P\left(\bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} P(A_k)$. Une probabilité étant toujours positive, par encadrement, avec les hypothèses de la question, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k\right) = 0$$

c'est à dire que $\lim_{N\to+\infty} P(B_N) = 0$ et donc $P(A) = 0$.

11) (a)

$$\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n}{10}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y'_k$$

(b) Les variables Y_k étant indépendantes et chaque Y'_k ne dépendant que de Y_k, on peut affirmer que les variables Y'_k sont indépendantes.
On a vu que $E(Y_k) = \dfrac{1}{10}$ et donc, par linéarité de l'espérance, $E(Y'_k) = E(Y_k) - \dfrac{1}{10} = 0$.
De plus Y'_k prend pour valeurs $-\dfrac{1}{10}$ ou $\dfrac{9}{10}$. Donc $|Y'_k| \leqslant 1$.

(c) Pour développer $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4$, on l'écrit sous la forme $(Y'_1 + \ldots + Y'_n)(Y'_1 + \ldots + Y'_n)(Y'_1 + \ldots + Y'_n)(Y'_1 + \ldots + Y'_n)$ et on fait la somme de tous les termes obtenus en multipliant systématiquement un Y'_k pris dans chaque parenthèse. On va obtenir une somme avec tous les produits possibles de la forme $Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}$ où Y'_{k_1} proviendra de la première parenthèse, Y'_{k_2} de la deuxième etc...On peut écrire

$$\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4 = \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in[\![1,n]\!]^4} Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4) = \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in[\![1,n]\!]^4} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right).$$

Les éléments (k_1, k_2, k_3, k_4) de $[\![1, n]\!]^4$ peuvent être classés de la façon suivante :
– Les quatres entiers sont égaux : Il s'agit des quadruplets de la forme (k, k, k, k) avec $k \in [\![1, n]\!]$. Appelons K_1 l'ensemble de ces quadruplets.
– Il y a trois entiers égaux et le quatrième est différent : Ce sont les quadruplets de la forme (k, k, k, l) ou (k, k, l, k) ou (k, l, k, k) ou (l, k, k, k) avec $k \neq l$, tous deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Appelons K_2 l'ensemble de ces quadruplets
– Il y a deux entiers égaux et les deux autres aussi, mais les quatre ne sont pas égaux : Ce sont les quadruplets de la forme (k, k, l, l) ou (k, l, k, l) ou (k, l, l, k) avec $k \neq l$ et tous deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Appelons K_3 l'ensemble de ces quadruplets.
– Il y a deux entiers égaux et les deux autres sont différents, ou bien les quatre entiers sont tous différents. Appelons K_4 l'ensemble de ces quadruplets.

On a donc

$$\begin{aligned}
E(\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4) &= \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_1} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) + \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_2} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right)\\
&+ \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_3} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) + \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_4} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} E(Y_k'^4) + \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_2} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) +\\
&\sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_3} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) + \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_4} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right)
\end{aligned}$$

Si $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in K_2$ alors $Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}$ est de la forme $Y_k'^3 Y'_l$ et donc puisque les variables sont indépendantes, $E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) = E\left(Y_k'^3 Y'_l\right) = E(Y_k'^3)E(Y'_l) = E(Y_k'^3)0 = 0$. Donc la somme $\displaystyle\sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_2} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right)$ est nulle.

On obtiendra le même résultat pour la somme relative aux quadruplets de K_4. On a donc

$$E(\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k'^4) + \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_3} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right)$$

D'autre part, Si $(k_1,k_2,k_3,k_4) \in K_3$ alors $Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}$ est de la forme $Y_k'^2 Y_l'^2$ et donc puisque les variables sont indépendantes, $E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) = E\left(Y_k'^2 Y_l'^2\right) = E(Y_k'^2)E(Y_l'^2)$. Comme $|Y'_k| \leqslant 1$, alors $0 \leqslant Y_k'^2 \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant E(Y_k'^2) \leqslant 1$. Donc si $(k_1,k_2,k_3,k_4) \in K_3$ alors $E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) = E(Y_k'^2)E(Y_l'^2) \leqslant 1 \times 1 = 1$. Donc

$$\sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_3} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) \leqslant \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_3} 1 = Card(K_3).$$

Or, il y a $\binom{n}{2}$ façons de choisir deux entiers dans l'ensemble $[\![1,n]\!]$ et $\binom{4}{2}$ façons de les placer dans un quadruplet. Donc $Card(K_3) = \binom{n}{2}\binom{4}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}.6 = 3n(n-1)$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant Y_k'^4 \leqslant 1$ et donc $E(Y_k'^4) \leqslant 1$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k'^4 \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

Finalement, on obtient bien :

$$E(\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k'^4) + \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_3} E\left(Y'_{k_1}Y'_{k_2}Y'_{k_3}Y'_{k_4}\right) \leqslant n + 3n(n-1) = 3n^2 - 2n.$$

(d) En utilisant le (a) :

$$E\left((\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10})^4\right) = E\left(\frac{1}{n^4}\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4\right) = \frac{1}{n^4}E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y'_k\right)^4\right) \leqslant \frac{3n^2-2n}{n^4} = \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} \leqslant \frac{3}{n^2}.$$

(e) On va utiliser l'inégalité de Markov, rappelée en (iii) au début de la partie puisque on a bien une variable aléatoire positive :

$$P(A_k) \leqslant \frac{E\left((\frac{S_k}{k} - \frac{1}{10})^4\right)}{1/\sqrt{k}} \leqslant \frac{3\sqrt{k}}{k^2} = \frac{3}{k^{3/2}}.$$

(f) Par comparaison de séries à termes positifs, puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, on peut conclure que la série $\sum P(A_k)$ est convergente.

(g) En reprennant les notations de la question 10) on constate que A correspond à l'ensemble défini dans cette question. Les résultats s'appliquent. On a $P(A) = 0$.

(h) Le complémentaire de A est donc de probabilité 1. C'est l'ensemble des ω pour lesquels l'ensemble (noté E_ω) des k tels que $(\dfrac{S_k(\omega)}{k} - \dfrac{1}{10})^4 > \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ est fini. Donc, pour $\omega \in \overline{A}$, E_ω est majoré. Il existe donc un grand N (qui dépend de ω) tel que pour tout $k \geqslant N$ on a $(\dfrac{S_k(\omega)}{k} - \dfrac{1}{10})^4 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, c'est à dire

$$|\frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10}| \leqslant \frac{1}{\sqrt[8]{k}}.$$

(i) Donc, pour $\omega \in \overline{A}$, par encadrement, en utilisant le résultat précédent, $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{S_k}{k} = \dfrac{1}{10}$.