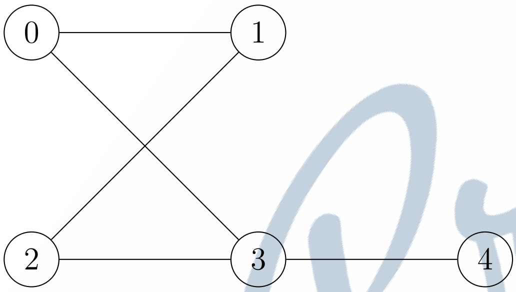
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - Edhec 2023

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. La matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})$ dont les coefficients sont indicés (i, j) avec $0 \leqslant i, j \leqslant 4$ (numérotation à partir de 0 comme les sommets du graphe), est définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![0\,;4]\!]^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ s'il existe une arête entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par conséquent : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme le graphe est non orienté, cette matrice est logiquement symétrique.

2. a) Attention à bien considérer des cycles possibles dans les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 : ici on a les chaînes

$$2-1-0-3, \quad 2-3-2-2, \quad 2-1-2-3, \quad 2-3-0-3, \quad 2-3-4-3$$

On compte donc 5 chaîne de longueur 3 entre les sommets 2 et 3.

b) La fonction `Python` suivante :

```python
def f(M,k):
    N = al.matrix_power(M,k)
    return N
```

calcule, pour une matrice carrée `M` et un entier naturel k passés en arguments, la matrice $\mathtt{M}^k$.

Supposant la matrice A saisie, le nombre de chaînes de longueur 3 entre les sommets 2 et 3 est alors le coefficient d'indices $(2, 3)$ (ou celui d'indices $(3, 2)$ qui lui est égal) de la matrice A^3.

On doit donc entrer les instructions :

```python
B = f(A,3)
n = B[2][3]
print(n)
```

La numérotation des indices en `Python` commence bien à zéro, convention respectée dans la définition de la matrice A ici.

Remarque : ce n'était pas demandé par l'énoncé, mais le calcul matriciel donne $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui aurait permis de vérifier que $(A^3)_{2,3} = (A^3)_{3,2} = 5$.

3. a) Par définition, le degré d'un sommet s_i du graphe est le nombre total d'arêtes qui relient ce sommet à d'autres sommets de G.

La matrice D demandée est donc : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On a bien : $L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il faut réaliser ici que l'énoncé, en donnant L, permet en fait de vérifier la validité des matrices A et D demandées !

c) La matrice L est clairement symétrique réelle : d'après le théorème admis du cours, elle est donc diagonalisable.

4. a) Par définition du produit matriciel : LX est le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ par une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, c'est donc encore une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

Le produit ${}^tXLX = {}^tX(LX)$ d'une matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$ par une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ est donc une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (elle hérite du nombre de lignes du facteur de gauche, et du nombre de colonnes du facteur de droite) : on peut donc assimiler ${}^tXLX$ à un réel.

b) On réalise l'u après l'autre des deux produits matriciels décrits à la question précédente :

$$LX = \begin{pmatrix} 2a-b-d \\ -a+2b-c \\ -b+2c-d \\ -a-c+3d-e \\ -d+e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tXLX = a(2a-b-d)+b(-a+2b-c)+c(-b+2c-d)+d(-a-c+3d-e)+e(-d+e),$$

et on vérifie alors que :

$$\begin{aligned} & a(2a-b-d)+b(-a+2b-c)+c(-b+2c-d)+d(-a-c+3d-e)+e(-d+e) \\ = {} & 2a^2 - ab - ad - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - cd - ad - cd + 3d^2 - de - de + e^2 \\ = {} & 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} & (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 \\ = {} & a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 + d^2 - 2ad + a^2 + e^2 - 2de + d^2 \\ = {} & 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de, \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
Par définition, X est donc un vecteur non-nul de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ tel que : $LX = \lambda.X$, de sorte que :

$$^{t}XLX = \lambda.\,^{t}XX = \lambda.(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2).$$

Or cette expression est aussi égale dans ce cas à celle de la question précédente, qui est une somme de carrés, donc positive.
Comme c'est aussi le cas de $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$, on en déduit que λ lui-même est forcément positif.

d) On vérifie très facilement que LU est la matrice-colonne nulle, ce qui s'écrit aussi : $LU = 0.U$, et prouve que la matrice-colonne non-nulle U, est un vecteur propre de L.
Comme les valeurs propres de L sont rangées dans l'ordre croissant (avec répétitions éventuelles), la plus petite de la liste, c'est-à-dire λ_1, vaut 0.

5. a) Il faut faire l'effort ici de résoudre le système $LX = 0_{5,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$:

$$LX = 0_{5,1} \iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -b - 2c + 5d - 2e = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \\ -d + e = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ -8c + 14d - 6e = 0 & L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \\ -d + e = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ 6d - 6e = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \\ -d + e = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont redondantes, donc on peut supprimer L_4 par exemple. Le système est alors échelonné avec une variable libre e : il y a donc une infinité de solutions, obtenues par substitution remontantes :

$$\uparrow \begin{cases} 2a - 2e = 0 \iff a = e \\ 3b - 3e = 0 \iff b = e \\ 4c = 4d \iff c = d = e \\ d = e \end{cases}$$

On en déduit : $\quad LX = 0_{5,1} \iff X \in \left\{ \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix} \middle| \, e \in \mathbb{R} \right\} \iff X \in \mathrm{Vect}(U).$

b) On vient donc de démontrer que le sous-espace propre pour la valeur propre 0 est $\text{Vect}(U)$, qui est de dimension 1 car (U) est une famille génératrice de $E_0(L)$, également libre donc base de ce sous-espace puisque $U \neq 0_{5,1}$.

On en déduit que 0 est une valeur propre simple de L : comme chaque valeur propre est présente dans la matrice D un nombre de fois égal à la dimension de son sous-espace propre, on en déduit que 0 est présent une seule fois sur cette diagonale. Les autres éléments diagonaux de D sont les autres valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$: d'après 4.c) ce sont des réels positifs mais non nuls : ce sont bien des réels strictement positifs.

EXERCICE 2

1. C'est un peu bête à dire, mais la fonction de la question 6. répond parfaitement à la question pour peu qu'on fasse dès maintenant les calculs demandés plus tard !

   Les exemples les plus simples de fonctions contractantes sont sinon donnés entre autres, par les fonctions affines de pente $Kin]0\,;1[$:

   Par exemple, la fonction affine $f:\ x \mapsto \frac{1}{2}x$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |\tfrac{1}{2}(x-y)| = \tfrac{1}{2}|x-y| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-y|,$$

   donc la fonction f vérifie la propriété demandée avec $K = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que cette fonction est $\frac{1}{2}$-contractante.

2. Pour tout réel x_0 fixé, et pour tout réel x, on a :

$$0 \leqslant \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant K \times |x - x_0|.$$

   Lorsque $x \to x_0$: $|x - x_0|$ tend vers 0 (c'est la distance de x à x_0), donc par encadrement :

$$\lim_{x \to x_0} \big|f(x) - f(x_0)\big| = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

   ce qui est la définition même du fait que f est une fonction continue en tout point réel x_0, et donc une fonction continué sur $\mathbb{R}$.

3. Supposons, pour raisonner par l'absurde, que f possède deux points fixes distincts x et y (en prenant par exemple $x < y$), qui vérifient donc $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

   Alors pour ces deux valeurs, $(*)$ se réécrit : $|x-y| \leqslant K|x-y|$.
   Come $x \neq y$, alors $|x-y| > 0$ et on peut simplifier les deux membres de l'inégalité par $|x-y| > 0$, ce qui laisse l'inégalité $1 \leqslant K$. Mais ceci contredit l'hypothèse faite selon laquelle $K \in]0\,;1[$.
   On en conclut qu'une fonction K-contractante ne peut pas avoir deux points fixes distincs, donc l'équation $f(x) = x$ admettra au plus une solution.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

   a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $|u_{0+1} - u_0| = |u_1 - u_0| = K^0 \times |u_1 - u_0|$ car $K^0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant K^{n+1} \times |u_1 - u_0|$.

   D'après la relation $(*)$, appliquée avec $x = u_{n+1}$ et $y = u_n$, on a :

$$\big|f(u_{n+1}) - f(u_n)\big| \leqslant K \times |u_{n+1} - u_n| \iff |u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant K \times |u_{n+1} - u_n|.$$

Or (H.R.) : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$, donc $K \times |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^{n+1} \times |u_1 - u_0|$ puisque $K > 0$.

On a donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant K \times |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^{n+1} \times |u_1 - u_0|$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|.$$

b) La série $\sum_{n \geqslant 0} K^n \times |u_1 - u_0|$ est convergente, puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $K \in]0\,;1[$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs : la série $\sum_{n \geqslant 0} |u_{n+1} - u_n|$ est donc aussi convergente.

On conclut en disant que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_{n+1} u_n$ est alors absolument convergente, donc convergente.

Or cette *série* télescopique converge si et seulement si la *suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge :
pour s'en convaincre (c'est une propriété du cours ceci dit), il suffit de réécrire la somme partielle $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$, qui donne $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $a = u_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k)$.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$; sachant que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite a, on peut passer à la limite dans cette relation de récurrence lorsque n tend vers $+\infty$, et on obtient :

$$a = f(a).$$

La limite a de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ (*point fixe* de f). Et comme on a vu à la question 3 que cette équation admet au plus une solution, on en déduit qu'elle admet *exactement une* solution (le réel a).

5. Soient n et p deux entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Il suffit ici de passer à la somme dans l'inégalité obtenue en 4.a), en remplaçant l'indice par i variant de n à $n+p-1$, pour effectivement obtenir :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ |u_{i+1} - u_i| \leqslant K^i \times |u_1 - u_0| \Longrightarrow \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|.$$

b) La somme $\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i$ est celle d'une suite géométrique de raison $K \in,]0\,;1[$, donc la formule de cours s'applique et donne : $\displaystyle \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i = \frac{K^n - K^{n+p}}{1-K} = K^n \times \frac{1-K^p}{1-K}$.

Par ailleurs, l'*inégalité triangulaire* avec la valeur absolue, assure que :

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} (u_{i+1} - u_i) \right| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|, \text{ soit } |u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|.$$

Par transitivité de l'inégalité, on a donc bien :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} |u_1 - u_0|.$$

c) L'inégalité précédente est vraie pour tous entiers n et p : on peut ici laisser n fixe et faire tendre p vers $+\infty$. Le fait que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+p} = a$ et que $\lim\limits_{p\to+\infty} K^p = 0$ puisque $K \in]0\,;1[$, permet de conclure, par passage à la limite quand $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|.$$

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$.

a) Pour tout réel t, $1 + e^t > 0$ donc f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ par somme et quotient de fonctions de référence de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$$

$$\text{et} \quad f''(t) = -\frac{e^t(1+e^t)^2 - e^t.2e^t(1+e^t)^1}{(1+e^t)^4} = -\frac{(1+e^t).\big(e^t(1+e^t) - 2(e^t)^2\big)}{(1+e^t)^4}$$

$$= -\frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}.$$

b) Pour tout réel t : $e^t > 0$ et $(1+e^t)^3 > 0$; par ailleurs : $1 - e^t > 0 \iff 1 > e^t \iff 0 > t$.
En tenant compte du signe "moins" devant la fraction qui définit $f''(t)$, on en déduit que $f''(t)$ est positif si et seulement si t l'est.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0

Il est important ici de calculer $f'(0) = -\dfrac{e^0}{(1+e^0)^2} = -\dfrac{1}{4}$, mais aussi les limites aux bornes de la fonction.

Puisque $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, alors $\lim\limits_{t\to-\infty} -\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} = -\dfrac{0}{(1+0)^2} = 0$.

Au voisinage de $+\infty$: $f'(t) = -\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e^t}{(e^t)^2} = -e^{-t}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{1}{e^t} = 0$.

Le tableau de variations complet faire alors apparaître que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant 0 \quad \text{ce qui implique bien :} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

c) Il suffit d'invoquer ici l'Inégalité des Accroissements Finis, qui grâce à la majoration de $|f'|$ qu'on vient d'obtenir, et qui est valable sur tout $\mathbb{R}$, permet d'écrire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant \frac{1}{4} \times |y - x|.$$

La fonction f est donc bien $\dfrac{1}{4}$-contractante.

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

Puisque la fonction f est $\dfrac{1}{4}$-contractante dans cet exemple, avec $\frac{1}{4} \in]0\,;1[$, alors tout le raisonnement mené dans les questions précédentes s'applique : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel a qui correspond à l'unique point fixe de la fonction f.

e) La fonction Python demandée ne présente aucune difficulté :

```python
def suite(n):
    u = 0  # initialisation
    for k in range(1,n+1):
        u = 1/(1+np.exp(u))
    return u
```

f) Si on réécrit le résultat de la question 5.c) avec ici $K = \dfrac{1}{4}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a - u_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \left|\frac{1}{2}\right|, \quad \text{soit} \quad |a - u_n| \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Le terme u_n est une valeur approchée de sa limite a à moins de 10^{-3} près si $|a - u_n| \leqslant 10^{-3}$. D'après l'inégalité précédente, c'est vrai dès que :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3} \iff \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{1}{1000} \iff \frac{2000}{3} \leqslant 4^n.$$

g) Il s'agit donc simplement de calculer le terme u_n pour le premier entier n tel que $4^n \geqslant 2000/3$, qu'on obtient à l'aide d'une simplie boucle `while` :

```python
n = 0
while 4**n < 2000/3:
    n = n+1
print(suite(n))
```

À l'exécution, le programme rend la valeur approchée $a \approx 0,401$ obtenue dès l'entier $n = 5$.

EXERCICE 3

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. a) Si $a = b$, alors $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la seule valeur propre est a, valeur commune à ses deux éléments diagonaux.

b) Il y a plusieurs façons de rédiger cette question, voilà la plus rapide pour ce cas de figure :

$A - a.I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang, $\dim E_a(A) = 2 - 1 = 1$, où $E_a(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) |\ (A - a.I_2)X = 0_{2,1}\right\}$ est le sous-espace propre de A pour la valeur propre a.

Comme a est la seule valeur propre de A qui est carrée d'ordre 2, alors $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = 1 < 2$ et A n'est donc *pas* diagonalisable.

On peut sinon proposer le raisonnement suivant, par l'absurde : *si* A était diagonalisable, *alors* elle serait semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A : ici par conséquent, on aurait $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a.I_2$.

Les deux matrices sont alors liées via une matrice de passage Q, par la formule de changement de base $A = QDQ^{-1}$, qui se réécrit : $A = Q \times a.I_2Q^{-1} = aQQ^{-1} = a.I_2$.
Mais la matrice A n'est *pas* égale à $a.I_2$! Elle n'est donc pas non plus diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

   a) La matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est encore triangulaire supérieure dans le cas général : ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, et
$$\mathrm{Sp}(A) = \{a\,;b\}.$$

   b) Les calculs matriciels donnent : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-a \\ b(b-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix}$.

   On remarque donc que : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = b.\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$, ce qui prouve que les deux vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ qui sont non-nuls, sont des vecteurs propres de A respectivement pour les valeurs propres a et b.

   c) Il est clair que les deux vecteurs V_1 et V_2 sont non-colinéaires ($b-a \neq 0$ puisque $b \neq a$) : ils forment donc une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Comme cet espace vectoriel est de dimension 2, (V_1, V_2) en est en fait une base, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b-a \end{pmatrix}$ est très simplement la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B} = (V_1, V_2)$.

   d) Du fait que V_1 et V_2 sont vecteurs propres de A, cette matrice est semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ via la matrice de passage P, selon la formule de changement de base :
$$A = PDP^{-1} \iff AP = PD.$$

   La question est étrangement tournée ici : elle suggère de chercher directement une matrice D inconnue de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ telle que $AP = PD$ - via donc la résolution d'un système d'inconnues x et y- alors que tout est directement obtenu via le cours sur la réduction des matrices carrées...

3. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

   a) Puisque X et Y ont alors le même univers-image $\mathbb{N}^*$, l'événement $[X = Y]$ s'écrit :
$$[X = Y] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big([X = n] \cap [Y = n]\big).$$

   L'union est évidemment disjointe (1) et les variables aléatoires X et Y sont indépendantes (2), donc :
$$\mathbf{P}(X = Y) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big([X = n] \cap [Y = n]\big) \overset{(2)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = n).$$

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}(X = n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \mathbf{P}(Y = n)$, donc :
$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. a) Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

   Dans l'étude faite ci-dessus, on a constaté que si $a = b$ alors la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, alors que si $a \neq b$ elle l'est.

   On en déduit donc que la matrice $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable si et seulement si $[X = Y]$ est réalisé : c'est le cas avec la probabilité $p = \frac{1}{3}$ d'après ce qui précède.

b) Soit le script suivant :

```
m = int(input('entrez une valeur entière pour m : '))
c = 0
for k in range(m):
    X = rd.gemoetric(1/2)
    Y = rd.geometric(1/2)
    if X == Y:
        c = c+1
i = 1-c/m
print(i)
```

La boucle `for` produit m réalisations indépendantes des variables aléatoires X et Y, et incrémente le compteur c si et seulement si l'événement $[X = Y]$ est réalisé.

En sortie de boucle, le quotient c/m est alors la *fréquence* de réalisation de $[X = Y]$, et $i = 1 - c/m$ sera au contraire la fréquence de réalisation de l'événement $[X \neq Y]$.

On peut donc affirmer d'après la loi faible des grands nombres, que pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, le contenu de la variable i est très proche de $\mathbf{P}(X \neq Y) = \dfrac{2}{3}$, qui est aussi d'après la question précédente, la probabilité que la matrice $A(X, Y)$ *soit* diagonalisable.

PROBLÈME

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. On vérifie les trois critères qui feront de f une densité de probabilité :
   - Comme $c > 0$, la fonction f est bien positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est bien continue sur $]-\infty\,; 1[$ comme fonction nulle, et sur $]1\,; +\infty[$ comme fonction de référence $x \mapsto c.x^{-c-1}$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0$ puisque f est nulle sur l'intervalle, et pour tout réel $A > 1$:

     $$\int_1^A f(t)\mathrm{d}t = c.\int_1^A t^{-c-1}\mathrm{d}x = c.\left[\frac{t^{-c}}{-c}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^c} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1,$$

     donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est bien convergente et vaut 1.

   Finalement, f est bien une densité de probabilité.

   Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f pour densité, et F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Calcul de la fonction de répartition F de X :

   Pour tout réel $x \in]-\infty\,; 1[$, $F(x) = \displaystyle\int_{\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$,

   et pour tout réel $x \geqslant 1$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x^c}$ d'après les calculs précédents.

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a) Si $x < 1$, alors $tx < t$, donc $\mathbf{P}_{[X>t]}(X \leqslant tx) = 0$ puisque $[X > t]$ et $[X \leqslant tx]$ sont alors incompatibles.

Si $x \geqslant 1$, alors $tx \geqslant t$ et :

$$\mathbf{P}_{[X>t]}(X \leqslant tx) = \frac{\mathbf{P}\big([X > t] \cap [X \leqslant tx]\big)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{\mathbf{P}(t < X \leqslant tx)}{1 - \mathbf{P}(X \leqslant t)} = \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(tx)^c} - 1 + \frac{1}{t^c}}{\frac{1}{t^c}} = \left(\frac{1}{t^c} - \frac{1}{t^c \times x^c}\right) \times t^c = 1 - \frac{1}{x^c} = F(x).$$

b) On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}_{[X>t]}(X \leqslant tx) = F(x) \iff \mathbf{P}_{[X>t]}\Big(\frac{X}{t} \leqslant x\Big) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$, ce qui prouve bien que la loi de $\frac{X}{t}$ conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty\,;1[$, strictement positive et continue sur $[1\,;+\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbf{P}(Y > t) > 0$.
- La loi de $\frac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Comme Y est une variable à densité, sa fonction de répartition G est continue sur $\mathbb{R}$, et notamment en 0. Or G est nulle sur $]-\infty\,;1[$ puisque c'est le cas de la fonction g : on a donc $G(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} G(x) = 0$.

5. a) Pour tout $x \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 1$: alors $tx \geqslant t$ et d'après les hypothèses faites sur Y,

$$G(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}_{[Y>t]}(Y \leqslant tx) = \frac{\mathbf{P}\big([Y > t] \cap [Y \leqslant tx]\big)}{\mathbf{P}(Y > t)} = \frac{\mathbf{P}(t < Y \leqslant tx)}{\mathbf{P}(Y > t)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(Y \leqslant tx) - \mathbf{P}(Y \leqslant t)}{1 - \mathbf{P}(Y \leqslant t)} = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$

b) Comme la densité g est continue sur $]1\,;+\infty[$, la fonction de répartition G est alors bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce même intervalle ; on peut donc dériver l'égalité précédente par rapport à la variable x (la variable t est de fait considérée comme une constante), et :

$$\forall x \in]1\,;+\infty[, \quad G'(x) = \frac{t.G'(tx)}{1 - G(t)}.$$

c) Pour tout $x > 1$ on a $G'(x) = g(x)$ et g est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc $\lim\limits_{x\to 1} G'(x) = g(1) = c$.

On a aussi, puisque $t > 1$, $\lim\limits_{x\to 1} G'(tx) = G'(t)$.

On peut donc passer à la limite dans l'égalité précédente lorsque x tend vers 1, et on obtient :

$$\forall t > 1, \quad c = \frac{tG'(t)}{1 - G(t)} \iff 1 - G(t) = \frac{t}{c}G'(t) \iff G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.$$

6. Dans cette question, y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1\,;+\infty[$.

   On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$, et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$.

   a) Soit z la fonction définit par : $z(t) = t^c y(t)$. La fonction z est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ car y l'est, et :
   $$\forall t \in]1\ +\infty[, \quad z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t),$$
   de sorte que :
   $$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall t \in]1\,;+\infty[,\ y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0 \\ &\overset{\times ct^{c-1}}{\iff} \forall t \in]1\,;+\infty[,\ ct^{c-1}y(t) + \frac{ct^{c-1}\times t}{c}y'(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in]1\,;+\infty[,\ ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in]1\,;+\infty[,\ z'(t) = 0 \\ &\iff z \text{ est constante sur }]1\,;+\infty[. \end{aligned}$$

   b) Ainsi : $\quad y$ est solution de $(E_1) \iff \exists K \in \mathbb{R}$ constante telle que $\forall t > 1,\ t^c y(t) = K$,
   Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions y définies sur $]1\,;+\infty[$ par une expression du type :
   $$\forall t \in]1\,;+\infty[, \quad y(t) = \frac{K}{t^c}, \quad \text{où } K \text{ est une constante réelle.}$$

   c) Une fonction constante u sur $]1\,;+\infty[$, est solution de (E_2) si et seulement si :
   $$\forall t \in]1\,;+\infty[, \quad u(t) + \frac{t}{c} \times 0 = 1 \iff \forall t \in]1\,;+\infty[,\ u(t) = 1,$$
   c'est-à-dire que la fonction constante égale à 1, est une solution particulière de l'équation (E_2).

   d) On raisonne par équivalences : sur $]1\,;+\infty[$,
   $$\begin{aligned} h - u \text{ est solution de } (E_1) &\iff (h-u) + \frac{t}{c}(h-u)' = 0 \iff h - 1 + \frac{t}{c}(h' - 0) = 0 \\ &\iff h + \frac{t}{c}h' = 1 \iff h \text{ est solution de } (E_2). \end{aligned}$$

   e) On en déduit que les solutions de (E_2) sont toutes les fonctions de la forme $y + u$, où y est une solution de (E_1).
   Les solutions de (E_2) sont donc toutes les fonctions dont l'expression sur $]1\,;+\infty[$ est de la forme :
   $$\forall t \in]1\,;+\infty[, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}, \quad \text{où } K \text{ est une constante réelle.}$$

7. a) La fonction G est, d'après la question 5.c), solution de l'équation (E_2), donc elle est de la forme trouvée à la question précédente :
   il existe une constante réelle K telle que $\forall t \in]1\,;+\infty[,\ G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$.
   On sait d'après la question 4. que $G(1) = 0 = \lim\limits_{t\to 1^+} G(t)$, puisque G est continue sur $\mathbb{R}$:
   comme $\lim\limits_{t\to 1^+} 1 + \frac{K}{t^c} = 1 + K$, on en déduit que $1 + K = 0 \iff K = -1$, et donc :
   $$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

   b) Puisque $1 - \frac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0 = G(1)$ (toujours d'après la question 4.), la formule précédente est valable sur tout l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
   Comme G est par ailleurs nulle sur $]-\infty\,;1[$, Cette fonction coïncide exactement sur $\mathbb{R}$ avec la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètre c : c'est donc la loi suivie par la variable aléatoire Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

   a) La fonction exponentielle étant continue, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}\big(\ln(X) \leqslant x\big) = \mathbf{P}(X \leqslant e^x) = F(e^x).$$

   b) On distingue alors deux cas, suivant que $e^x < 1 \iff x < 0$, ou au contraire $e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$:

   - Si $x < 0$, alors $e^x < 1$ et dans ce cas, $H(x) = F(e^x) = 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, alors $e^x \geqslant 1$ et dans ce cas :

   $$H(x) = F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-cx}.$$

   En tout point de $\mathbb{R}$, la fonction de répartition H coïncide avec la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre c : on peut donc conclure que Z suit cette loi $\mathcal{E}(c)$.

   c) On sait simuler en `Python` la loi exponentielle : si on simule Z, on en déduit alors une simulation de X via la relation : $Z = \ln(X) \iff X = e^Z$.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)
    return np.exp(Z)
```

   ⚠ Attention, le paramètre de la fonction de simulation `rd.exponential` est *l'espérance* de la loi exponentielle qu'on veut simuler : $\dfrac{1}{c}$ pour la loi $\mathcal{E}(c)$.