BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS – HEC Paris

MATHEMATIQUES 2 APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Mardi 2 mai 2023, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Questions préliminaires

Si $t \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de t que l'on note $\lfloor t \rfloor$, l'unique entier tel que $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = +\infty$.

Première Partie - La loi arcsinus

3. On rappelle que la restriction de la fonction sin à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection sur $[-1, 1]$.
   On note arcsin : $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

(b) Montrer que la fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. (a) Soit $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $G(x) = 2\arcsin(\sqrt{x})$.
Montrer que G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, de dérivée g donnée par

$$\forall x \in]0,1[\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

(b) Etudier la fonction g et tracer son graphe.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\, g(t) & \text{si } t \in]0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la loi arcsinus.
Montrer que X admet une espérance et calculer celle-ci.
(On pourra considérer le changement de variable $u = 1 - x$.)

6. (a) Soit U une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
Montrer que la variable aléatoire $V = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\, U\right)$ suit la loi arcsinus.

(b) À l'aide de la question précédente, compléter les deux lignes de la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi arcsinus :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def arcsinus() :
    U= ...
    V= ...
    return V
```

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$ et $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2} - 1$. Montrer l'encadrement :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leqslant G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Montrer que les deux inégalités sont inversées si l'on suppose que $\dfrac{n}{2} + 1 \leqslant k \leqslant n-1$.

8. Soient $x \in]0, 1/2[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :
   - Pour tout n suffisamment grand, on a $1 \leqslant a_n < \lfloor nx \rfloor$;
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0$;
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Donner un exemple d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

On admet que pour tout $x \in]0,1[$ et toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les mêmes conditions qu'à la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

Deuxième Partie - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $\theta \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \theta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1-\theta.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $S_0 = 0$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

9. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$.
   En déduire la loi de $\frac{1}{2}(S_n + n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
10. Les variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
11. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \overline{S_n} = \frac{1}{n} S_n$.
   Soit $\alpha \in]0,1[$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et t_α le réel positif tel que $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
   En majorant $\sqrt{\theta(1-\theta)}$, montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique d'estimation du paramètre θ au niveau de confiance $1-\alpha$.
12. (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On introduit la variable aléatoire L_n, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, définie par :

$$L_n : \begin{array}{ccl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \max\{k \in [\![0,n]\!] \ , \ S_{2k}(\omega) = 0\}. \end{array}$$

La variable aléatoire $2L_n$ décrit donc le dernier instant avant l'instant $2n$ où la marche aléatoire prend la valeur 0.

13. Déterminer $\mathbb{P}(L_n = n)$.
14. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (a) Montrer l'égalité d'événements suivante :
   $$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0].$$

(b) Justifier que :

$$\mathbb{P}_{[S_{2k}=0]}\left([S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0]\right) = \mathbb{P}\left([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap \left[S_{2(n-k)} \neq 0\right]\right).$$

On notera p_{n-k} la valeur de cette probabilité. $(\star)$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k p_{n-k}$$

où par convention $p_0 = 1$.

A partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $\theta = \dfrac{1}{2}$. Le calcul explicite des $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est l'objet des questions suivantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

$$\mathcal{D}_n = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k \neq 0] \quad , \quad \mathcal{D}_n^+ = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0] \quad , \quad \mathcal{D}_n^- = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k < 0].$$

On considère également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in [\![1, n]\!]$, l'événement :

$$A_{n,r} = \left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0]\right) \cap [S_{2n} = 2r].$$

Pour tout entier r, on pose $A_{n,r} = \emptyset$ lorsque $r > n$ ou $r \leqslant 0$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, $a_{n,r} = \mathbb{P}(A_{n,r})$.

16. (a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{S_1(\omega), \ldots, S_r(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers.

(b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_n) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) + \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^-).$$

17. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) = \sum_{r=1}^{n} a_{n,r}.$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

(a) Soit $(r, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\, a_{n-1,q} & \text{si } q = r-1 \text{ ou } q = r+1 \\ \\ \dfrac{1}{2}\, a_{n-1,q} & \text{si } q = r \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4}\, a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}\, a_{n-1,r} + \frac{1}{4}\, a_{n-1,r+1}.$$

19. Montrer par récurrence sur n que pour tout $(n,r) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right),$$

où l'on pose $\binom{m}{k} = 0$ dès que $k \notin [\![0,m]\!]$.

20. On rappelle que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie précédemment $(\star)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $p_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

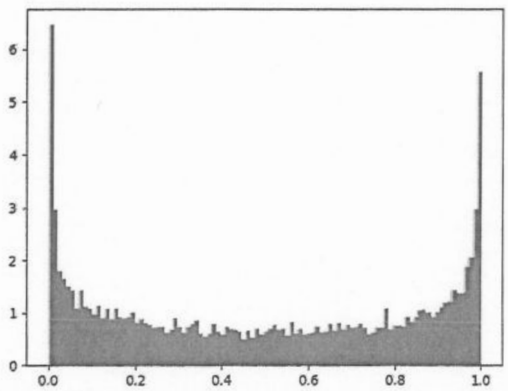
Troisième Partie - Comportement asymptotique

Dans cette troisième partie, on cherche à étudier la limite en loi de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

21. (a) Compléter par autant de lignes que nécessaire la fonction Python *DernierPassage* permettant de simuler la variable aléatoire L_n :

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n):
    L=0
    S=0
    for i in range(1,2*n+1):
        ...
    return L
```

(b) A l'aide de cette fonction, on simule $N = 10000$ réalisations de la variable aléatoire $\frac{L_{100}}{100}$ puis on représente les valeurs obtenues sous la forme d'un histogramme à 100 classes. On obtient la figure suivante :



Quelle conjecture peut-on formuler à propos de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$ et $u_n = \ln(C_n)$.

(a) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

(b) En déduire que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On admet que $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ est la limite de cette suite.

23. Soient $x \in]0,1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :
   - Pour tout n suffisamment grand, on a $1 \leqslant a_n < \lfloor nx \rfloor$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   (a) Montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{n} \leqslant x\right) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}.$$

   (b) Montrer, pour n suffisamment grand, l'encadrement :
$$m_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leqslant \frac{1}{4^n}\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leqslant M_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}},$$

   où :
$$m_n = \min\{C_k C_{n-k}\ ,\ k \in [\![a_n, \lfloor nx \rfloor]\!]\}\ ,\ M_n = \max\{C_k C_{n-k}\ ,\ k \in [\![a_n, \lfloor nx \rfloor]\!]\}.$$

   (c) Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites d'entiers telles que
$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty.$$

   Montrer que les deux suites $\left(\min\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\max\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes, de même limite $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

   (d) En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi}.$$

   où la fonction G a été définie dans la première partie.

24. Soient $x \in]0,1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :
   - Pour tout n suffisamment grand, on a $1 \leqslant a_n < \lfloor nx \rfloor$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   (a) Donner un exemple d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{a_n-1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 0.$$

25. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{L_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi .

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1100 – D'après documents fournis