



P6-00034  
974448  
Maths S

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 22

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Partie I

1-2) soit  $h \in \mathbb{N}$

on étudie l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_x(x) dx$

$$\text{on a, } \int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_x(x) dx = \int_0^1 x^h dx$$

$$= \left[ \frac{x^{h+1}}{h+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{h+1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^h| f_x(x) dx \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_x(x) dx = \frac{1}{h+1}$$

Donc, d'après le théorème de transfert,  $\forall h \in \mathbb{N}$ ,

$$\in (X^h) \text{ existe et } \in (X^h) = \frac{1}{h+1}$$

6) soit  $h \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_x(x) dx = \int_0^{+\infty} x^h \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{h-1}} (\lambda x)^h e^{-\lambda x} dx$$

Et en effectuant le changement de variable affine :

$$\begin{cases} u = \lambda x \\ du = \lambda dx \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^h} u^h e^{-u} du$$

et en reconnaissant l'expression de  $\Gamma(h+1)$ , on obtient :

$$= \frac{\Gamma(h+1)}{\lambda^h}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_X(x) dx = \frac{h!}{\lambda^h}$$

Ainsi,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^h| f_X(x) dx$  converge

D'autre part, cette égalité est vérifiée pour  $h=0$   
En effet,  $E(X^0) = 1 = \frac{0!}{\lambda^0}$

Donc, on peut conclure, d'après le théorème de transfert :

$$\forall h \in \mathbb{N}, E(X^h) \text{ existe et } E(X^h) = \frac{h!}{\lambda^h}$$

## Partie-II

$$2 - [H_3]_{1,1} = v_0, \quad [H_3]_{1,2} = v_1, \quad [H_3]_{1,3} = v_2$$

$$[H_3]_{2,1} = v_1, \quad [H_3]_{2,2} = v_2, \quad [H_3]_{2,3} = v_3$$

$$CH_3 \omega_{3,1} = u_2, \quad CH_3 \omega_{3,2} = u_3, \quad CH_3 \omega = u_4$$

$$\text{Donc, } H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$

Comme  $\forall (i,j) \in [1,3] \cap \mathbb{Z}^2$ ,  $CH_3 \omega_{i,j} = CH_3$  les coefficients de  $G_3$  sont ceux de  $H_3$  avec 1 somme à l'indexation des termes  $u_i$ , on obtient :

$$G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}$$

3- D.  $\epsilon \omega H_n \omega \in M_n(\mathbb{R})$  et :

$$\begin{aligned} \epsilon \omega H_n \omega &= \sum_{i=1}^n CH_3 \omega_{i,i} CH_n \omega \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n CH_3 \omega_{i,i} CH_n \omega_{i,j} CH \omega_{j,i} \end{aligned}$$

$$\epsilon \omega H_n \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}$$

▷ Comme  $f$  est une densité de  $\mathcal{S}$  adaptée à  $M^*(\mathbb{T})$

$$\forall (i,j) \in [1,n] \cap \mathbb{Z}^2, \quad u_{i+j-2} = \mathcal{E}(x^{i+j-2})$$

Donc, d'après ce qui précède, - d'après le théorème de transfert et comme  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}^*$  :

$$\epsilon \omega H_n \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x) dx$$

et par linéarité de l'intégration :

$$= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2} \right) f(x) dx$$



$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, (P(x))^2 = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha_i x^{i-1})^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j x^{i-1} x^{j-1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^{i+i-2} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_i \alpha_j x^{i-1} x^{j-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P(x))^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2}$$

Donc, on peut conclure :

$$\underline{kwH_n w = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx}$$

4- Soit  $n \geq 1$  soit  $w = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Comme  $f$  est une densité,  $x \mapsto (P(x))^2 f(x)$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+$

D'autre part,  $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx$  converge

Donc, par croissance de l'intégration,

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx \geq 0 \quad \text{soit d'après 9.3- :}$$

$$kwH_n w \geq 0$$

En notant  $q_n$  la forme quadratique associée à  $H_n$ , c'est-à-dire l'application telle que  $q_n : w \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto kwH_n w$

Alors, on a :  $\forall w \in M_{n,1}(\mathbb{R}), q_n(w) \geq 0$

▷ Soit  $\lambda \in \text{Sp}(H_n)$

# Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Mathématiques I Appro

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Alors  $\exists w \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid H_n w = \lambda w$  d'où :

$$\|w\| H_n w = \lambda \|w\|^2 \quad \text{soit :}$$

$$q(w) = \lambda \|w\|^2$$

et comme  $\|w\|^2 > 0$  car  $w$  est un vecteur propre de  $H_n$  alors :

$$\lambda = \frac{q(w)}{\|w\|^2} \quad \text{et d'après le résultat précédent :}$$

$$\lambda \geq 0$$

Ainsi,  $\forall n \geq 1, \operatorname{sp}(H_n) \subset \mathbb{R}^+$

5 - Soit  $n \geq 1$ . Soit  $w = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

on peut montrer, de la même manière qu'en q3- :

$$\|w\| G_n w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j v_{i+j-1}$$

Et donc, en posant  $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-\frac{1}{2}}$ , on

obtient d'après q3- :

$$\langle W, G_n W \rangle = \int_0^{+\infty} (g(x))^2 f(x) dx \quad \text{d'où d'après q3-:}$$

$$\langle W, G_n W \rangle \geq 0$$

Ainsi, d'après q4-,  $\forall n \geq 1$ ,  $\text{Sp}(G_n) \subset \mathbb{R}^+$

6- D'après le théorème de transfert et la relation de chasles:

$$\begin{aligned} U_3 &= \int_0^{+\infty} x^3 f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^3 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^3 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{or, } \forall x \geq 1, \quad x^3 f(x) \geq x^2 f(x)$$

Et comme ces fonctions sont continues sur  $[1, +\infty[$  d'intégrales convergentes, par croissance de l'intégration:

$$\int_1^{+\infty} x^3 f(x) dx \geq \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

d'où, d'après le théorème de transfert:

$$\geq U_2$$

$$\geq \frac{1}{3}$$

D'autre part, comme  $x \mapsto x^3 f(x)$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ , par croissance de l'intégration:

$$\int_0^1 x^3 f(x) dx \geq 0$$



Donc,  $U_3 \geq 0 + \frac{1}{3}$

$$\geq \frac{3}{9}$$

et comme  $\frac{3}{9} \geq \frac{2}{9}$ , on a nécessairement:

$$\underline{U_3 \geq \frac{2}{9}}$$

7-2) Soit  $n \geq 1$ . Soit  $t > 0$ .

$$t^n \exp(-t\theta) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right) \quad \text{et comme } \begin{cases} t^n > 0 \\ \exp(-t\theta) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^n} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(t\theta - \frac{1}{\theta}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t\theta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(t\theta - \frac{1}{\theta}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t\theta} \left(\frac{1}{t\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(t\theta - \frac{1}{\theta}\right) \geq 0$$

et comme la dernière équivalence est vraie car

$$\begin{cases} \frac{1}{t\theta} > 0 \\ \left(\frac{1}{t\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} > 0 \end{cases}$$

$$\exp\left(t\theta - \frac{1}{\theta}\right) > 0$$

Alors,  $\forall t > 0$ ,  $t^n \exp(-t\theta) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)$

D'autre part, pour  $t=0$ :

$$t^n \exp(-t\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right) > 0$$

Donc, la relation est toujours vérifiée

Ainsi, on peut conclure:

$$\underline{\forall n \geq 1, \forall t \geq 0, t^n \exp(-t\theta) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right)}$$

```

8- import numpy as np
import numpy.linalg as al
def kesh_shieldhjes (U):
    N = len (U) - 1
    m = 1 + N//2
    H = np.zeros ( (m, m) )
    for n in range (1, m+1):
        for i in range (n+1, m+1):
            H[i, n-1] = U[i+n-1]
            H[n-1, i] = H[i, n-1]
    valp = al.eigvalsh (H)

    for h in range (0, m):
        if (valp[h] < 0):
            return 0
    return 1

```

---

II. 2)

9-  $h \mapsto h^n e^{-h} \sin(h)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

$$\forall h \in \mathbb{R}_+, |h^n e^{-h} \sin(h)| = |h^n e^{-h}| \cdot |\sin(h)|$$

et comme  $\forall h \in \mathbb{R}_+, |\sin(h)| \leq 1$

$$\leq h^n e^{-h}.$$

Eh, par croissances comparées:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} h^{n+2} e^{-h} = 0 \quad \text{donc :}$$

$$h^n e^{-h} = o\left(\frac{1}{h^2}\right)_{h \rightarrow +\infty}$$



# Copie anonyme - n°anonymat : 974448

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                    |                   |                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------|----------------|
| Emplacement<br>QR Code                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Code épreuve : 282                 | Nombre de pages : | Session : 2023 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Épreuve de : Mathématiques I Appro |                   |                |
| <b>Consignes</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer</li><li>• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir</li><li>• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)</li><li>• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)</li><li>• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre</li></ul> |                                    |                   |                |

or,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann)

Et,  $\forall t \geq 1, \frac{1}{t^2} \geq 0$

Donc, par comparaison,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  converge

Ainsi, par comparaison,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$  converge (absolument) donc converge

Ainsi,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$  existe

▷  $t \mapsto t^n e^{-t} \cos(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$

De la même façon, on montre que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq t^n e^{-t} \cos(t) \leq t^n e^{-t}$  (car  $\cos$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ )

D'après ce qui précède,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  converge

Donc, par comparaison,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$  converge (absolument) donc converge

Ainsi,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$  existe

9 /

$$20- S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$$

soit  $A > 0$

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t) dt$$

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= e^{-t} & f_1(t) &= -e^{-t} \\ g_1'(t) &= \sin(t) & g_1(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

comme  $f_1$  et  $g_1$  sont de classe  $C^1$  sur  $(0, A)$ , par intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt &= \left[ -e^{-t} \sin(t) \right]_0^A + \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt \\ &= -e^{-A} \sin(A) + \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= e^{-t} & f_2(t) &= -e^{-t} \\ g_2'(t) &= \cos(t) & g_2(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

comme  $f_2$  et  $g_2$  sont de classe  $C^1$  sur  $(0, A)$ , par intégration par parties:

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t) dt = -e^{-A} \sin(A) + \left[ -e^{-t} \cos(t) \right]_0^A - \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt$$

$$\text{D'où, } 2 \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt = -e^{-A} \sin(A) - e^{-A} \cos(A) + 1.$$

$$\text{comme } \left\{ \begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} \sin(A) &= 0 \quad (\text{car } \sin \text{ est bornée sur } \mathbb{R}) \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} \cos(A) &= 0 \quad (\text{car } \cos \text{ est bornée sur } \mathbb{R}) \end{aligned} \right.$$

Alors, on obtient :

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-k} \sin(k) dk = 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\underline{S_0 = \frac{1}{2}}$$

11- Soit  $n \in \mathbb{N}$

Par l'itérative de l'intégration :

$$S_{n+1} + T_{n+1} = \int_0^{+\infty} k^{n+1} e^{-k} (\sin(k) + \cos(k)) dk$$

Soit  $A > 0$  :

$$\int_0^A A e^{-k} k^{n+1} (\sin(k) + \cos(k)) dk$$

$$f(k) = e^{-k} \quad f'(k) = -e^{-k}$$

$$g(k) = k^{n+1} (\sin(k) + \cos(k)) \quad g'(k) = (n+1) k^n (\sin(k) + \cos(k)) \\ + k^{n+1} (\cos(k) - \sin(k))$$

Comme

12- Soit  $n \in \mathbb{N}$

En sommant (3) et (4) et en faisant (3) - (4) dans (1), on obtient :

$$\begin{cases} 2S_{n+1} = (n+1) (T_n + S_n) \\ -2T_{n+1} = (n+1) (S_n - T_n) \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} 2S_{n+1} = (n+1) (T_n + S_n) \\ 2T_{n+1} = (n+1) (T_n - S_n) \end{cases} \quad \text{donc :}$$



$$2 \quad V_{n+1} = (n+1) \begin{pmatrix} T_n + S_n \\ -S_n + T_n \end{pmatrix} \quad \text{soit:}$$

$$V_{n+1} = (n+1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} \quad \text{d'où:}$$

$$\underline{V_{n+1} = (n+1) M V_n}$$

13. Posons,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A(n)$ : " $V_n = n! M^n V_0$ "

$$\begin{aligned} * \quad V_0 &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= 0! I_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= 0! M^0 V_0 \end{aligned}$$

Dac,  $A(0)$  est vraie

\* soit  $n \in \mathbb{N}$ . supposons que  $A(n)$  est vraie

D'après 9/2- :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (n+1) M V_n \quad \text{donc d'après } A(n) \\ &= (n+1) M (n! M^n V_0) \\ &= (n+1)! M^{n+1} V_0 \end{aligned}$$

Dac,  $A(n+1)$  est vraie

$$\underline{* \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = n! M^n V_0}$$

$$\begin{aligned} 14. \quad M^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 974448

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                    |                   |                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------|----------------|
| Emplacement<br>QR Code                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Code épreuve : 282                 | Nombre de pages : | Session : 2023 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Épreuve de : Mathématiques I Appro |                   |                |
| <b>Consignes</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer</li><li>• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir</li><li>• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)</li><li>• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)</li><li>• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre</li></ul> |                                    |                   |                |

Donc,  $M^4 = M^2 \cdot M^2$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$M^4 = -\frac{1}{4} I_2$

15 - Soit  $n \geq 0$

D'après 914-,  $S_{4n+3} = 0$  soit :

$$\int_0^{+\infty} (t^4)^n t^3 e^{-t} \sin(t) dt = 0$$

Posons  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $t \mapsto t^4$

qui est de classe  $C^1$ , bijective et strictement croissante

Ainsi, d'après la formule du changement de variable,

(comme  $\begin{cases} t^4 = x \\ 4t^3 dt = dx \end{cases}$ )

13/

$$\int_0^{+\infty} x^n \times \frac{1}{4} e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4}) dx = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$\underline{\int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = 0} \quad \text{et ceci pour tout } n \in \mathbb{N}$$

16- Posons  $g_1 = g$

$g_2 = 0$  où  $0$  est la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$

$g_1$  et  $g_2$  sont deux fonctions positives, distinctes : ...  
 $(g_1(\frac{\pi}{2}) = \exp(-\frac{\pi^2}{2}) \sin(\frac{\pi^2}{2}) \neq 0$   
 $\neq 0(\frac{\pi}{2}))$

et d'après 915-,  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx = 0$

Et,  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx = 0$

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , les deux intégrales  $\int_0^{+\infty} x^n g_1(x) dx$  et  $\int_0^{+\infty} x^n g_2(x) dx$  existent et sont égales.

Ainsi, on peut conclure :

Un tel couple existe.

17- quand  $J = ]0, +\infty[$ ,  $M^*(J)$  n'admet pas une unique solution (d'après 916-)

Partie III-



11 - Soit  $n \in \mathbb{N}$

Soit  $A > 0$

$$D \quad \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t) dt$$

$$f_1'(t) = e^{-t} \quad f_1(t) = -e^{-t}$$

$$g_1(t) = t^{n+1} \cos(t) \quad g_1'(t) = (n+1)t^n \cos(t) - t^{n+1} \sin(t)$$

$f_1$  et  $g_1$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, A]$  donc par intégration par parties:

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t) dt = \left[ -e^{-t} t^{n+1} \cos(t) \right]_0^A$$

$$- (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} \sin(t) dt$$

$$- \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t) dt$$

Comme les intégrales en jeu convergent et que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} A^{n+1} \cos(A) = 0$

car  $\cos$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et par croissance comparée, alors:

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - I_{n+1} \quad \text{donc:}$$

$$\underline{I_{n+1} + I_{n+1} = (n+1) I_n} \quad (3)$$

$$D \quad \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t) dt$$

$$f_2'(t) = e^{-t} \quad f_2(t) = -e^{-t}$$

$$g_2(t) = t^{n+1} \sin(t) \quad g_2'(t) = (n+1)t^n \sin(t) + t^{n+1} \cos(t)$$

$f_2$  et  $g_2$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, A]$  donc par intégration par parties:

$$\int_0^A h^{n+1} e^{-h} \sin(h) dh = C e^{-A} h^{n+1} \sin(h) \Big|_0^A + (n+1) \int_0^A h^n e^{-h} \sin(h) dh \\ + \int_0^A h^{n+1} e^{-h} \cos(h) dh$$

Comme  $\sin$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et par croissances comparées :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} A^{n+1} \sin(A) = 0$$

Donc, en faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  comme toutes les intégrales en jeu convergent :

$$S_{n+1} = (n+1) S_n + T_{n+1} \quad \text{d'où}$$

$$S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n \quad (4)$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1) T_n & (3) \\ S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n & (4) \end{cases}$$

### Partie-III

18- Soit  $n \in \mathbb{N}$  d'après le Théorème de transfert :

$$U_n = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx$$

Comme  $f$  est une densité, nulle sur  $]-\infty, 0[$  et  $0, \infty[$ , et que  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ , alors  $x \mapsto x^n f(x)$  est non identiquement positive et continue sur  $\mathbb{R}_0^+$

Du, par <sup>nulle,</sup> stricte positivité de l'intégration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx > 0$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Mathématiques I Appro

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

19- soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  d'après le théorème de transfert

$$\sum_{h=0}^j (1-\gamma)^h \binom{j}{h} u_{i+h}$$

$$= \sum_{h=0}^j (1-\gamma)^h \binom{j}{h} \int_0^1 x^{i+h} f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \left( \sum_{h=0}^j \binom{j}{h} (1-x)^h \gamma^{j-h} \right) x^i f(x) dx$$

et d'après la formule du binôme de Newton:

$$= \int_0^1 (1-x)^j x^i f(x) dx$$

comme  $x \mapsto (1-x)^j x^i f(x)$  est continue, positive et non identiquement nulle sur  $[0, 1]$ , donc par stricte positivité de l'intégration:

$$\int_0^1 (1-x)^j x^i f(x) dx > 0 \quad \text{soit:}$$

$$\sum_{h=0}^j (1-\gamma)^h \binom{j}{h} u_{i+h} > 0$$

21- soit  $\alpha > 0$

22- si  $\alpha > 1$



On a d'après le théorème de transfert :

$$U_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$$

et comme  $\forall x \in ]0,1[, x^n f(x) \leq f(x)$ ,  
et que ces fonctions sont continues sur  $]0,1[$ ,  
par croissance de l'intégration :

$$U_n \leq \int_0^1 f(x) dx \quad \text{et comme } f \text{ est une densité}$$

nulle sur  $\mathbb{R} \setminus ]0,1[$  :

$$\frac{U_n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

et comme  $U_n > 0$  ( $q/8-1$ ) :

$$0 \leq \frac{U_n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

comme  $\alpha > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge (Riemann) donc  
par comparaison, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{U_n}{n^\alpha}$  converge.

~~On étudie le cas pour  $\alpha \in ]0,1[$ .~~

~~▷ Pour  $\alpha = 0$ , on a :~~

~~soit  $N \geq 0$~~

~~$$\sum_{n=0}^N \frac{U_n}{n^0} = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^N x^n \right) f(x) dx$$~~

~~$$\text{Notons, } \forall x \in ]0,1[, S_N = \sum_{n=0}^N x^n$$~~

### III.2)

$$\begin{aligned} 22- \Delta_{n,0} &= \sum_{h=0}^0 (-1)^h \binom{j}{h} u_{n+h} \\ &= (-1)^0 u_{n+0} \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta_{n,0} = u_n}$$

23- soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $j \in \mathbb{U}_{0,n}$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1,j+1} &= \sum_{h=0}^{j+1} (-1)^h \binom{j+1}{h} u_{n+1+h} - (-1)^{j+1} \\ &= \sum_{h=0}^{j+1} (-1)^h \binom{j+1}{h} u_{n+h-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} &= \sum_{h=0}^j (-1)^h \binom{j}{h} u_{n+h-j} - \sum_{h=0}^j (-1)^h \binom{j}{h} u_{n+1+h-j} \\ &= \sum_{h=0}^j (-1)^h \binom{j}{h} u_{n+h-j} + \sum_{h=0}^j (-1)^{h+1} \binom{j}{h} u_{n+1+h-j} \end{aligned}$$

et en posant  $h' = h+1$

$$= \sum_{h=0}^j (-1)^h \binom{j}{h} u_{n+h-j} + \sum_{h=1}^{j+1} (-1)^h \binom{j}{h-1} u_{n+h-j}$$

et d'après la formule du triangle de Pascal  
et en regroupant les termes, on obtient:

$$= \sum_{h=0}^{j+1} (-1)^h \binom{j+1}{h} u_{n+h-j} \quad \text{soit d'après ce qui précède}$$

$$\underline{\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \Delta_{n+1,j+1}}$$

### III.37

26- ~~soit  $(x, y) \in ]0, 1]^2$~~

$f_2'$  est continue sur <sup>le segment</sup>  $]0, 1]$  donc  $\exists M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in ]0, 1], |f_2'(x)| \leq M$$

$f_1'$  est continue sur  $]0, 1]$  donc  $\exists N \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in ]0, 1], |f_1'(x)| \leq N$$

$$\text{Donc, } \forall x \in ]0, 1], |h(x)| = |f_2' - f_1'| (x) \leq$$

soit d'après l'inégalité  
triangulaire:

$$|h(x)| \leq M + N \quad \text{et en notant } K = M + N$$
$$|h(x)| \leq K$$

Ainsi, comme  $h$  est également de classe  $C^1$  sur  $]0, 1]$ ,  
d'après l'inégalité des accroissements finis:

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (x, y) \in ]0, 1]^2, |h(x) - h(y)| \leq K|x - y|$$

27-6) D'après 927-2) et d'après la formule de  
Koenig-Höygers (car  $z_n$  admet une variance comme  
 $z_1(n)$  est fini).

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(z_n))| \leq K \sqrt{\mathbb{E}((z_n - x)^2)}$$

$$\leq K \sqrt{\mathbb{E}((z_n - x)^2) - V(z_n - x)}$$

$$\text{et comme } \mathbb{E}((z_n - x)^2) - V(z_n - x)$$

et que  $h \mapsto Vh$  est strictement  
croissante sur  $Vh$



# Copie anonyme - n°anonymat : 974448

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                    |                   |                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------|----------------|
| Emplacement<br>QR Code                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Code épreuve : 282                 | Nombre de pages : | Session : 2023 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Épreuve de : Mathématiques I Appro |                   |                |
| <b>Consignes</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer</li><li>• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir</li><li>• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)</li><li>• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)</li><li>• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre</li></ul> |                                    |                   |                |
| <p>on peut conclure :</p> $\frac{(h(2n) - \epsilon(h(2n)))}{1, \sqrt{K}} \in (12n - 27)$ <p>27-21 Pour <math>y = 2n</math> : par croissance de l'espérance après 926-</p>                                                                                                                                                                                                                                     |                                    |                   |                |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                    |                   | 27 /           |

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE





