



A7-00082

542585

Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

Partie I :

1) D'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^n) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$
 $= \text{rg}(M) + \dim(\ker(f))$

Donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(M) = n-1$ Donc $\dim(\ker(f - \text{id})) = 1 \neq 0$
 Donc $0 \in \text{Sp}(f)$

2) a) Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de M .

On a : $\text{rg}(M) = 1$ et $C \notin \mathcal{O}_{M,n}(\mathbb{R})$

Donc $\exists (l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in [2, n], C_i = l_i C$

Donc en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ on a : $M = \begin{pmatrix} c_1 & l_2 c_1 & \dots & l_n c_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & l_2 c_n & \dots & l_n c_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$$

$$= L \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

On pose $L = (1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$

On a : $M = CL$

b) On a : $\text{tr}(M) = c_1 + \sum_{i=2}^n l_i c_i$

De plus $LC = (1 \ l_2 \ \dots \ l_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 + l_2 c_2 + \dots + l_n c_n = c_1 + \sum_{i=2}^n l_i c_i$

Donc $\text{tr}(M) = LC$

$$\begin{aligned}
 c) \text{ On a: } M^2 &= (CL)(CL) \quad \text{d'après la 2)a)} \\
 &= C(LC)L \\
 &= C \operatorname{tr}(M)L \quad \text{d'après la 2)b)} \\
 &= \operatorname{tr}(M)CL \\
 &= \operatorname{tr}(M)M \quad (2)a)
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{M^2 = \operatorname{tr}(M)M}$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ On a: } MC &= CLC \quad (2)a) \\
 &= C \operatorname{tr}(M) \\
 &= \operatorname{tr}(M)C
 \end{aligned}$$

On $C \neq 0_{M_n,1}(\mathbb{R})$

Donc $\operatorname{tr}(M)$ est valeur propre de M

Donc $\boxed{\operatorname{tr}(M) \text{ est valeur propre de } f}$

4) Supposons $\operatorname{tr}(M) = 0$

D'après la 2)c) $M^2 - \operatorname{tr}(M)M = 0$. Donc $X(X - \operatorname{tr}(M))$ est annulateur de M

Donc $\operatorname{Sp}(M) \subset \{0, \operatorname{tr}(M)\} = \{0\}$

On $0 \in \operatorname{Sp}(M)$ D'après la 3)

Donc $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_0(f)) = \dim(\ker(f)) = 1$ (d'après la 1))

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

$\neq n$ car $n \geq 2$

5) Supposons $\operatorname{tr}(M) \neq 0$

Alors $\operatorname{Sp}(f) \subset \{\operatorname{tr}(M), 0\}$ d'après la 4)

$0 \in \operatorname{Sp}(f)$ et $\operatorname{tr}(M) \in \operatorname{Sp}(f)$ d'après la 1) et 3)

Donc $\boxed{\operatorname{Sp}(f) = \{0, \operatorname{tr}(M)\}}$

On a : $\dim(E_0(f)) = \dim(\ker(f)) = n-1$

f est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{\alpha(M)}(f)) = 1$

On $\dim(E_{\alpha(M)}(f)) \geq 1$ car $\text{tr}(M) \in \text{Sp}(f)$

De plus $\dim(E_{\alpha(M)}(f)) + \dim(\ker(f)) \leq n$

Donc $\dim(E_{\alpha(M)}(f)) \leq 1$

Donc $\dim(E_{\alpha(M)}(f)) = 1$

Donc f est diagonalisable car on a bien : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f) = n$

Partie 2 :

6) a) Supposons par l'abuse $a \neq b$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} \\ ax + y + \frac{z}{c} \\ bx + cy + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bx + by + za = 0 \\ cx + cy + z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bx + by + a(-bx - cy) = 0 \\ cx + cy + z = 0 \\ -bx - cy = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(b - ca) = 0 \\ cx + cy + z = 0 \\ -bx - cy = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & \text{car } b - ca \neq 0 \\ cx + z = 0 \\ -bx = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ cx + z = 0 \\ x = -\frac{z}{b} \end{cases} \quad \text{car } b \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -\frac{3}{2}bc + z = 0 \\ x = -\frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z(-bc+a)=0 \\ x = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{car } a-bc \neq 0$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible ce qui est absurde

Donc $\boxed{ac=b}$

$$\begin{aligned} \text{Or on a: } \text{rg}(A) &= \dim(\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \\ 1 \end{pmatrix}\right)) \\ &= \dim(\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ ca \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ bc \end{pmatrix}\right)) \quad \text{car } a \neq 0 \quad b \neq 0 \\ &= \dim(\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}\right)) \\ &= \dim(\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}\right)) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} 1 = -\lambda c \\ a = -\lambda b \\ b = -\lambda a \end{cases}$$

$$\text{Supposons } \lambda \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{c} & \text{car } c \neq 0 \\ a = \frac{b}{c} \text{ i.e. } ac=b \text{ absurde} \\ b = \frac{a}{c} \end{cases}$$

Donc $\lambda = 0$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

$$\text{Donc } \dim \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{rg}(A) = 2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) a) On remarque que : $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 \\ a+a+b \\ b+ca+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3a \\ 3b \end{pmatrix}$ car $a=c=b$ et $\frac{b}{c}=a$ car $a=b$

$$= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

On $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_{M_{3,1}}(\mathbb{R})$

Donc $3 \in \text{Sp}(g)$

De plus $\dim(\ker(g)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(g)$
 $= 3 - \text{rg}(4)$
 $= 2$

Donc $\dim(E_0(g)) = 2$ et $0 \in \text{Sp}(g)$

De plus : $\dim(E_0(g)) + \dim(E_3(g)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc g n'admet pas d'autre valeurs propres que 3 et 0
 et g est diagonalisable.

Donc $\boxed{\text{Sp}(g) = \{0, 3\}, g \text{ est diagonalisable.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que A est diagonalisable
 d'après la 7) a) car g l'est.

Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A = P D P^{-1}$ où $D = \text{diag}(0, 0, 3)$

De plus $A^n = \underbrace{(P D P^{-1}) \times \dots \times (P D P^{-1})}_{n \text{ fois}} = P D^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } A^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3^{n-1}} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} A \\ &\in \text{vect}(A) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n \in \text{vect}(A)}$$

Exercice 2: Soit $c \in \mathbb{R}^+ \mid c > 2$

Partie 1:

1) • f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 1

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1, f(x) = \frac{c}{x^{c+1}} > 0 \text{ car } c > 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \mid x < 1, f(x) = 0 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

• Sous réserve de convergence:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx = c \int_1^{+\infty} x^{-c-1} dx \\ &= c \left[-\frac{x^{-c}}{c} \right]_1^{+\infty} \quad \text{car } c \neq 0 \\ &= c \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{cA^c} + \frac{1}{c} \right) \\ &= c \left(0 + \frac{1}{c} \right) \quad \text{car } c > 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ peut \u00eatre consid\u00e9r\u00e9e comme une densit\u00e9}}$

2) Sous réserve de convergence.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (\text{car } f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^-) \\&= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c} dx \\&= c \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^{+\infty} \\&= c \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{-c+1} \times \frac{1}{A^{c-1}} - \frac{1}{-c+1} \right) \\&= c \left(0 + \frac{1}{1-c} \right) \quad \text{car } c-1 > 0 \\&= \frac{c}{1-c} \quad \text{Donc } E(X) = \frac{c}{1-c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or } a &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}} dx \\&= c \int_1^{+\infty} x^{1-c} dx \\&= c \left[\frac{x^{2-c}}{2-c} \right]_1^{+\infty} \\&= c \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-c} \frac{1}{A^{c-2}} - \frac{1}{2-c} \right) \quad \text{car } c-2 > 0 \\&= \frac{c}{c-2} = E(X^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \quad (\text{Huygens}) \\&= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2} \\&= \frac{c(c-1)^2 - c^2}{(c-2)(c-1)^2} \\&= \frac{c((c-1)^2 - c)}{(c-2)(c-1)^2}\end{aligned}$$

Donc X admet une espérance et une variance et
 $E(X) = \frac{c}{c-1}$ et $V(X) = \frac{c((c-1)^2 - c)}{(c-2)(c-1)^2}$

3) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

• Si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}} dt$

$$= c \int_1^x t^{-c-1} dt$$
$$= c \left[\frac{-t^{-c}}{c} \right]_1^x$$
$$= c \left(-\frac{1}{cx^c} + \frac{1}{c} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{x^c}$$

Donc : $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{sinon} \end{cases}$

4)

a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\ln(X) \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(X \leq e^x) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$
$$= F(e^x)$$

b) De plus $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ (croissance de $\ln$)

Donc : $\begin{cases} \text{si } x \geq 0 & G(x) = 1 - \frac{1}{e^{xc}} = 1 - e^{-cx} \\ \text{si } x < 0 & G(x) = 0 \end{cases}$

Donc $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

De plus G est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre c

Donc : $Y \hookrightarrow E(c)$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2023
	Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

c)

```

import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulX(c):
    s = rd.exponential(c)
    return np.exp(s)

```

Partie 2:

5)

```

def simulZ(c)
    a = simulX(c)
    b = simulX(c)
    return a * b

```

6) On a : $E(Z) = E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes
 $= \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$ d'après la 2)

De plus $E(Z^2) = E(X_1 X_2 X_1 X_2)$
 $= E(X_1^2 X_2^2)$
 $= E(X_1^2) E(X_2^2)$ car d'après le lemme des coalitions X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes.
 $= \left(\frac{c}{c-2}\right)^2$ d'après la 2)

D'où $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2 - \left(\frac{c}{c-1}\right)^4$ (Huygens)
 $= \frac{c^2 (c-1)^4 - c^4 (c-2)^2}{(c-2)^2 (c-1)^4}$

Reprenons:
$$V(Z) = \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2((c-1)^2 - c(c-2) + ((c-1)^2 + c(c-2)))}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(1 + (2c^2 - 4c + 1))}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(2c^2 - 4c + 2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$
erreur de calcul
probablement.

7) a)

Y_1 suit une loi exponentielle de paramètre c comme Y_2
(d'après la b)

Donc cY_1 suit une loi exponentielle de paramètre $E(cY_1) = \frac{c}{c} = 1$
i.e. une loi gamma de paramètre 1 donc cY_2 aussi.

D'où $\boxed{cY_1 \hookrightarrow \gamma(1) \text{ et } cY_2 \hookrightarrow \gamma(1)}$

b) X_1 et X_2 sont indépendantes.

D'après le lemme des coalitions $cY_1 = c \ln(X_1)$ et $cY_2 = c \ln(X_2)$
sont indépendantes.

Donc de par la stabilité de la somme de variables
aléatoires indépendantes suivant des lois gamma on a:

$\boxed{cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)}$

8) a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{On a: } H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x) = \mathbb{P}(cY_1 + cY_2 \leq cx) \quad \text{car } c > 0 \\ = K(cx)$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = K(cx)}$$

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c est une fonction de répartition:

$$\text{On a: } \forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = h(x) = c K'(cx)$$

$$\text{Or } cY_1 + cY_2 \stackrel{d}{\sim} Y(2)$$

Donc K' est la densité d'une loi gamma de paramètres

$$\text{Donc } K': t \mapsto \begin{cases} \frac{t^{2-1} e^{-t}}{\Gamma(2)} = \frac{t e^{-t}}{1!} = t e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{h: x \mapsto \begin{cases} c(cx) e^{-cx} = c^2 x e^{-cx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$,

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x)) \quad \text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{++} \\ &= \mathbb{P}(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x)) \\ &= H(\ln(x)) \end{aligned}$$

De plus si $x \in \mathbb{R}^-$, $F_2(x) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) = 0 = H(x)$ car $X_1 X_2 \stackrel{d}{\sim} c[1, +\infty[$

$$\text{Donc } \boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{++}, F_2(x) &= H(\ln(x)) \\ \forall x \in \mathbb{R}^-, F_2(x) &= 0 = H(x) \end{aligned}}$$

F_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ (exp est croissante sur $\mathbb{R}$)

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1, F_2(x) = \frac{1}{x} h(\ln(x)) = c^2 \ln(x) e^{-c \ln(x)} = \frac{c^2 \ln(x)}{x^c}$$

De plus si $x < 1$, $F_2'(x) = 0$

Donc $f_2: x \mapsto \begin{cases} c^2 \frac{\ln(x)}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

* il doit y avoir une erreur de calcul ci-dessus.

9) a) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 1$

Soit $A \in]1, +\infty[$, on a: $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \int_1^A \ln(x) x^{-\alpha} dx$

Intégration par parties:

avec $\begin{cases} u'(x) = x^{-\alpha} & u(x) = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$= \left[\ln(x) \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} dx$$

$$= \ln(A) \frac{A^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$= \ln(A) \frac{A^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^A$$

$$= \ln(A) \frac{A^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{A^{-\alpha+1}} + \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad \text{par croissance comparée et car } \alpha > 1$$

Donc $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}}$

b) (On sait que Z admet une espérance et une variance: 6))

On a: $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln(x)}{x^c} dx \quad (8) b))$

$$= \frac{c^2}{(1-c)^2} \quad \begin{matrix} \text{d'après la 9) a)} \\ \text{car } c > 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{c^2}{(1-c)^2}$$

On a: $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_2(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c-1}} dx$

$$= \frac{c^2}{(1-(c-1))^2} \quad \text{d'après la 9) a) car } c-1 > 1$$

$$= \frac{c^2}{(2-c)^2}$$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 24	Session : 2023
	Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

On retrouve la même espérance et le même moment d'ordre 2 que dans la 6) donc aussi la même variance

Exercice 3:

1) a) On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k F_i \cap P_{k+1}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k F_i\right) \mathbb{P}(P_{k+1}) \quad \text{car les lancers sont indépendants.} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{P}(F_i)\right) p \\
 &= \underline{q^k p}
 \end{aligned}$$

b) On pose $Y \mapsto Y(p)$

On remarque que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k+1) = \mathbb{P}(Y-1=k)$

Donc X et $Y-1$ suivent une même loi

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } E(X) &= E(Y-1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \underline{\frac{1-p}{p}} \\
 V(X) &= V(Y-1) = V(Y) = \underline{\frac{q}{p^2}}
 \end{aligned}$$

2) On a: $\forall k \in \mathbb{N}$,

a) $[Q = k] = [X = 3k \cup X = 3k+1 \cup X = 3k+2]$

car si Q prend la valeur k alors R vaut 0, 1 ou 2
car $\forall w \in \Omega, 0 \leq R(w) \leq 2$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(Q = k) &= P(X = 3k) + P(X = 3k+1) + P(X = 3k+2) \quad (\text{car l'union est disjointe}) \\ &= q^{3k} p + q^{3k+1} p + q^{3k+2} p \\ &= q^k (q^{2k} (1-q) + q^{2k+1} (1-q) + q^{2k+2} (1-q)) \\ &= q^k (q^{2k} - q^{2k+1} + q^{2k+1} - q^{2k+2} + q^{2k+2} - q^{2k+3}) \\ &= q^k (q^{2k} - q^{2k+3}) \\ &= q^k (q^{2k} (1 - q^3)) \\ &= q^{3k} (1 - q^3) \end{aligned}$$

Pour conclure il faudrait obtenir $P(Q = k) = q^k (1 - q^3) / \dots$
~~je ne dois pas avoir la bonne probabilité pour la variable X~~

3) On a: $P(R = 0) = P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} [X = 3i]\right)$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = 3i) \quad (\text{l'union est disjointe})$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} q^{3i} p$$

$$= (1-q) \frac{1}{1-q^3} \quad \text{car } |q| < 1$$

On $(1-q)(1+q+q^2) = 1+q+q^2 - q - q^2 - q^3$ Donc $P(R = 0) = \frac{1}{1+q+q^2}$

De même

$$IP(R=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} IP(X=3k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{3k+1} p$$

$$= (1-q)q \times \frac{1}{1-q^3} \quad \text{car } |q^3| < 1$$

$$= q IP(R=0)$$

$$= \frac{q}{1+q+q^2}$$

De même $IP(R=2) = \sum_{k=0}^{+\infty} IP(X=3k+2)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{3k+2} p$$

$$= q^2 (1-q) \times \frac{1}{1-q^3} \quad \text{car } |q^3| < 1$$

$$= q^2 IP(R=0)$$

$$= \frac{q^2}{1+q+q^2}$$

4) On pose la question...

X

5) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{Y}(p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $IP(Y-1=k) = IP(Y=k+1)$

$$= (1-p)^k p$$

$$= q^k p$$

$$= IP(X=k)$$

Donc $Y-1$ et X suivent même la même loi
ce qui justifie l'utilité de la fonction

b) def div(p)
 $X = \text{remul}X(p)$
 $Q = \text{remul}X(p) // 3$
 $R = \text{remul}X(p) \% 3$
 return(X, Q, R)

Problème.

1) Soit $h \in \mathbb{Z}$, soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } h(h+n) &= \cos\left(\frac{2(h+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2h\pi}{n} + 2\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) \text{ car } \cos \text{ est } 2\pi \text{ périodique} \\ &= h(h) \end{aligned}$$

Donc h est n périodique

Donc $h \in F_n$

2) Notons 0 la fonction nulle.

$\forall h \in \mathbb{Z}, 0(h+n) = 0 = 0(h)$ Donc $0 \in F_n$

Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n^2$, soit $h \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\lambda f + g)(h+n) &= \lambda f(h+n) + g(h+n) \\ &= \lambda f(h) + g(h) \text{ car } (f, g) \in F_n^2 \\ &= (\lambda f + g)(h) \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in F_n$

De plus $F_n \subset E$

Donc F_n est un sous espace vectoriel de E

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : MATHEMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) Soit $h \in \mathbb{N}$, soit $f \in F_n$

$$\text{On a donc } f(n) = f(h - nq) \\ = f(h) \quad \text{car } f \text{ est périodique et } q \text{ est un entier}$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall f \in F_n, f(h) = f(n)}$$

4) a)

Soit $h \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(h) = f(h) e_n(h) \quad \text{car } \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{h\} e_i(h) = 0} \\ = f(h)$$

b) Premièrement d'après l'énoncé, $\forall i \in I_n, e_i \in F_n$

$$\text{Soit } (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0_{F_n}$$

Soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\text{Évaluons l'égalité en } j \text{ alors } \lambda_j e_j(j) = \lambda_j = 0$$

$$\text{Donc } \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_j = 0$$

Donc $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est libre

$$\text{Soit } f \in F_n \text{ alors } \forall h \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(h) = f(h)$$

Donc $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est génératrice de F_n

Donc $B_n = (e_0, \dots, e_{n-1})$ est une base de F_n

c) D'après la 4)b), Soit $f \in F_n$ on a:

$$\forall h \in \mathbb{Z}, f(h) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(h)$$

Donc les coordonnées de f dans la base B_n sont $(f(0), \dots, f(n-1))$

5) Soit $(\lambda, f, g, h) \in \mathbb{R} \times F_n^3$.

• On a $\langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ On a } \langle \lambda f + h, g \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(k) + h(k)) g(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} h(k) g(k) \\ &= \lambda \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche

$$\bullet \text{ De plus } \langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) f(k) = \langle g, f \rangle$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite donc bilinéaire.

$$\bullet \langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 \geq 0 \text{ donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est } \underline{\text{positive}}.$$

$$\bullet \text{ De plus } \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{I}_n, f(k)^2 = 0 \Leftrightarrow f(k) = 0$$

C'est une somme de carrés qui est nulle si et seulement si ses termes sont nuls

Donc d'après la 4) c) les coordonnées de f dans la base B_n sont $(0, \dots, 0)$

Donc f est nulle

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire

b) Soit $(i, j) \in [0, n-1]^2$

$$\begin{aligned} \text{Si } i \neq j, \quad \langle e_i, e_j \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k) \\ &= e_i(i) e_j(i) \\ &= e_j(i) \\ &= 0 \quad \text{car } j \neq i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } i = j, \quad \langle e_i, e_j \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k) \\ &= e_i(i)^2 \\ &= 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$i = e \quad \|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1$$

Donc B_n est orthogonale pour ce produit scalaire.

c) Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$, $k \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } \sum_{q=0}^{n-1} \cos(a + qb) = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \sum_{q=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2q+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2q-1)b}{2}\right)$$

car $\sin(\frac{b}{2}) \neq 0$
car $b \in]0, 2\pi[$
donc $b \neq 0$
et $\frac{b}{2} \neq \pi$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \sum_{q=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2q+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2(q-1)+1)b}{2}\right)$$

$$\text{(Somme télescopique)} \quad = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \left(\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) \right)$$

D'après la 5)c)

d) On a: avec $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ car $n \geq 3$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sin\left(\frac{(2n-1)2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \right) \text{ car sinus est } 2\pi \text{ périodique} \\ &= 0\end{aligned}$$

Appliquons l'égalité avec $a = \frac{2\pi}{n}$ et $b = \frac{4\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ car $n \geq 3$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{n} + (2n-1)\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sin\left(2n \times \frac{2\pi}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin(4\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\text{On a } \|h\|^2 &= \langle h, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} h(k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) \\ &= \frac{n}{2} \quad (\text{d'après la 5) d)})\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

MATHEMATIQUES APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) a)

Soit $h \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } Df(h+n) = f(h+1+n) - f(h+n)$$

$$= f(h+1) - f(h) \quad \text{car } f \in F_n$$

$$= Df(h)$$

Donc $Df \in F_n$

b) Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n^2$, soit $h \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } D(\lambda f + g)(h) = (\lambda f + g)(h+1) - (\lambda f + g)(h)$$

$$= \lambda f(h+1) - \lambda f(h) + g(h+1) - g(h)$$

$$= \lambda D(f)(h) + g(h)$$

Donc g est une application linéaire.

De plus Df d'après la 6) a) $\in F_n$

Donc $D \in \mathcal{L}(F_n)$

c) Soit $h \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a : } Dh(h) = \cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right)$$

$$\text{On a : } \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin(a) \sin(b)$$

$$\text{On pose } a = \frac{\pi}{n} \text{ et } b = \frac{\pi}{n} + 2h \frac{\pi}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } Dh(h) &= -(\cos(b-a) - \cos(a+b)) \\ &= -(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \text{ car cos est pair} \\ &= -2 \sin(a) \sin(b) \\ &= \underline{-2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + 2h \frac{\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \|Dh\|^2 &= \langle Dh, Dh \rangle = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{h=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + 2h \frac{\pi}{n}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1 - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{n} + 2h \frac{\pi}{n}\right)\right)}{2} \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\sum_{h=0}^{n-1} 1 - \sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi(4h+2)}{n}\right) \right) \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) n \quad \text{d'après la 5/a)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|Dh\| = \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) n}$$

$$= \underline{\sqrt{2n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad \text{car } \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0 \text{ car } \frac{\pi}{n} \in]0, \pi]$$

7)

a) Soit $(f, g) \in F_n^2$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \langle f, \Delta g \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \Delta g(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) (g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } - \langle Df, Dg \rangle &= - \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) (g(k+1) - g(k)) \\ &= - \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) g(k) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } - \langle Df, Dg \rangle = - \left(\sum_{k=1}^n f(k) g(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) + \sum_{k=1}^n f(k) g(k-1) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{car } (f, g) \in F_n^2 & \\ \text{donc } f \text{ et } g \text{ sont } n\text{-périodiques} & \\ &= - \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k-1) \right) \end{aligned}$$

$$= - \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k) (g(k) - g(k+1) + g(k) + g(k-1))) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) (g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)))$$

$$= \langle f, \Delta g \rangle$$

$$\text{Donc } \boxed{\langle f, \Delta g \rangle = - \langle Df, Dg \rangle}$$

$$\begin{aligned} \text{b) On a: } \langle \Delta f, g \rangle &= \langle g, \Delta f \rangle \\ &= \langle Dg, Df \rangle \quad (\text{d'après la 7)a}) \\ &= - \langle Df, Dg \rangle \\ &= \langle f, \Delta g \rangle \end{aligned}$$

Donc Δ est un endomorphisme symétrique.

c) Soient $\lambda \in Sp(\Delta)$, $f \in E_\lambda(\Delta) \mid f \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \langle f, \Delta f \rangle &= \langle f, \lambda f \rangle = \lambda \|f\|^2 \\ \langle f, \Delta f \rangle &= - \langle Df, Df \rangle = - \|Df\|^2 \quad (7)a) \end{aligned}$$

Donc $\lambda = \frac{-\|f\|^2}{\|f\|^2} \leq 0$ car $f \neq 0$

Donc $\boxed{Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}^-}$

8) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$

On a: $\Delta(\varepsilon_0)(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1)$
 $= 1 - 2 + 1$
 $= 0$

Donc $\varepsilon_0 \in \ker(\Delta)$

b) Soit $f \in \ker(\Delta)$, soit $k \in \mathbb{Z}$

Alors $0 = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$

Alors $f(k) - f(k-1) = f(k+1) - f(k)$

Alors $(f(k) - f(k-1))_{k \in \mathbb{Z}}$ est constante.

Ainsi l'écart entre les valeurs de f est constant et il faut encore montrer qu'il vaut 0, je n'y arrive pas. X

9) a) d'après la 7) b) Δ est symétrique donc diagonalisable

De plus ε_0 est un vecteur propre de Δ car $\varepsilon_0 \neq 0$ et $\Delta \varepsilon_0 = 0 = 0 \times \varepsilon_0$

Donc il existe une base orthonormale de vecteurs propres de Δ et on peut placer $\frac{\varepsilon_0}{\|\varepsilon_0\|}$ en premier

De plus $\|\varepsilon_0\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} 1} = \sqrt{n}$ Donc $\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}}$

D'où l'existence de la base $(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F_n (orthonormale de F_n)
vecteurs propres de Δ

De plus $f \in F_n$, Donc $\exists! (b_0, \dots, b_{n-1})$, $f = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}} \varepsilon_0$

On pose $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = (\frac{b_0}{\sqrt{n}}, b_1, \dots, b_{n-1})$, d'où $f = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$