

Copie anonyme - n°anonymat : 940894



A8-00449
940894
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 23

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC bs.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

Partie 1 :

① D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \ker(A) = n - \text{rg}(A) \\ = n - 1$$

$$\text{Donc } \dim \ker A = n - 1 > 0$$

On en déduit que 0 est valeur propre de A .

② a) Comme le rang de A est de dimension 1, et que la colonne C est non nulle, alors toutes les colonnes de A sont colinéaires à C .

On a alors, en notant $C_2, \dots, C_n$ les colonnes restantes de A (toutes sauf la première) :

$$\forall i \in [2, n], \exists \ell_i \in \mathbb{R}, C_i = \ell_i C.$$

Donc la matrice A s'écrit, en notant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} c_1 & \ell_2 c_1 & \dots & \ell_n c_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & \ell_2 c_n & \dots & \ell_n c_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, en posant la matrice $(\ell_2, \dots, \ell_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, on a $CL = \begin{pmatrix} c_1 & \ell_2 c_1 & \dots & \ell_n c_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & \ell_2 c_n & \dots & \ell_n c_n \end{pmatrix} = A.$

BILAN : Il existe $L = (1, \dots, \ell_n)$ telle que $A = CL$.

b) En reprenant les mêmes notations, on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \sum_{i=1}^n m_{ii} \\ &= 1 \times c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 + \dots + l_n c_n \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ c_n \end{pmatrix} = C$$

$$L = (1, l_2, \dots, l_n) \quad (c_1 + c_2 l_2 + \dots + c_n l_n) = LC = \text{tr}(A)$$

Donc $\text{tr}(A) = LC$

c) On a, $\forall (i,j) \in \{1,n\}^2$

$$A^2_{ij} = \sum_{h=1}^n A_{ih} A_{hj}$$

$$= \sum_{h=1}^n (L)_{ih} (C)_{hj}$$

$$= \sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^n c_{ip} l_{ph} \sum_{q=1}^n c_{hq} l_{qj}$$

$$= \sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_{ip} l_{ph} c_{hq} l_{qj} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_{ip} l_{qj} \times (LC)_{pq}$$

~~$$\begin{aligned} \text{et } (\text{tr}(A)A)_{ij} &= \text{tr}(A) \times A_{ij} \\ &= \text{tr}(A) \times \sum_{h=1}^n c_{ih} l_{hj} \end{aligned}$$~~

~~$$= \sum_{q=1}^n (LC)_{iq} \times (C)_{qj}$$~~

~~$$= (L C C L)_{ij}$$~~

~~$$= (L C C L)_{ij}$$~~

~~$$= (\text{tr}(A)A)_{ij}$$~~

~~$$= \sum_{p=1}^n$$~~

Donc $A^2 = \text{tr}(A)A$.

③ Comme $A^2 = \text{tr}(A)A$, on a $A^2 - \text{tr}(A)A = 0$
soit $A(A - \text{tr}(A)I) = 0$

On a $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Ainsi, $\forall X \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on a $A^2 X = \text{tr}(A)AX$

$$\text{donc } A(AX) = \text{tr}(A) \times (AX)$$

Comme 0 est valeur propre de A, A n'est pas

En choisissant X tel que $AX \neq 0$, on a ainsi trouvé $Y = AX$ tel que $AY = \text{tr}(A)Y$, donc
bécite car $A \neq 0_{\mathcal{M}(V)}$.

$$\text{tr}(A) \in \text{Sp}(A)$$

et donc

$$\text{tr}(A) \in \text{Sp}(g).$$

④ Supposons que $\text{tr}(A) = 0$.

$$\text{Alors } A^2 = 0$$

Un polynôme annulateur de A est donc X^2 , qui admet pour seule racine 0. Comme les valeurs propres de A sont comprises dans ses racines, alors la seule valeur propre de A est 0.

Or, on a montré que $\dim \text{Ker } g = n-1 < n$. (①)

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est strictement inférieure à n.

Donc A n'est pas diagonalisable.

⑤ Supposons que $\text{tr}(A) \neq 0$. Notons E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

$$\text{On a alors } A^2 - \text{tr}(A)A = 0 \Leftrightarrow A(A - \text{tr}(A)I) = 0$$

On a alors

- $0 \in \text{Sp}(A)$ et $\dim \text{Ker } g = n-1$

- $\text{tr}(A) (\neq 0) \in \text{Sp}(A)$ et alors $\dim E_{\text{tr}(A)} \geq 1$ avec $E_{\text{tr}(A)}$ le sous-espace propre associé

On sait que A n'admet pas d'autres valeurs propres car un polynôme annulateur de A est $X(X - \text{tr}(A))$ qui a pour racines $\lambda = \text{tr}(A)$

$$\text{On a donc } \dim E_0 + \dim E_{\text{tr}(A)} \geq n-1 + 1 \geq n. \quad \text{Or } \text{tr}(A) \neq 0.$$

Donc A est diagonalisable et, par conséquent

$$\text{Sp}(g) = \{0, \text{tr}(A)\} \text{ et } g \text{ est diagonalisable.}$$

⑥ a) Soit $X \neq 0$ tq $AX = 0$. Comme A n'est pas inversible, il existe en effet $X \neq 0$ tel que $AX = 0$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} \\ ax + y + \frac{z}{c} \\ bx + cy + z \end{pmatrix} = AX$$

$$\text{Donc } AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{abx + by + az}{ab} = 0 \\ \frac{acx + cy + z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

On suppose que $ac \neq b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ac - b)x = 0 & (l_2 - l_3) \\ abx + by + az = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{car } ac \neq b \\ by + az = 0 \\ cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ by + a(-cy) = 0 \\ z = -cy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(b - ac) = 0 \\ z = -cy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0 \text{ car } b \neq ac.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 940894

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC SS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or, nous avons supposé X non nul. On aboutit donc à une contradiction.

Donc $ac = b$.

b) On a donc, comme $ac = b$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $\text{Col}_1(A) = a \text{Col}_2(A)$
et $\text{Col}_1(A) = ac \text{Col}_3(A)$

Donc toutes les colonnes de A sont colinéaires à la première, qui est non nulle.

Donc $\text{rg}(A) = 1$.

⑦ a) On se retrouve alors dans les conditions de la partie I, avec une matrice de rang 1, avec une première colonne non nulle.

On a $\text{tr}(A) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

On rejoint alors la question ⑤ et on peut affirmer :

g est diagonalisable et $\text{Sp}(g) = \{0, 3\}$.

b) Comme g est diagonalisable, A l'est également et donc A s'écrit

$$A = P \Delta P^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P \text{ une matrice inversible constituée des vecteurs propres de } A \\ \Delta = \text{diag}(0, 0, 3) \end{cases}$$

donc $A^n = (P \Delta P^{-1})^n = P \Delta^n P^{-1}$.

Raisonnons plus simplement par récurrence.

Pour $n=1$, on a bien $A \in \text{Vect}(A)$, ce qui initialise l'hérédité.

Hérédité : Supposons que $A^n \in \text{Vect}(A)$, c'est à dire que $A^n = \lambda A$.
Montrons que $A^{n+1} \in \text{Vect}(A)$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \lambda A^2 \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ ac & c & 1 \end{pmatrix} = A \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ ac & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{a} & \frac{3}{ac} \\ 3a & 3 & \frac{3}{c} \\ 3ac & 3c & 3 \end{pmatrix} = A^2 = 3A \end{aligned}$$

Donc $A^{n+1} = \lambda A^2 = 3\lambda A \in \text{Vect}(A)$.

D'où la récurrence

BTLAV; $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in \text{Vect}(A)$

Exercice 2.

① Montrons que f peut être considérée comme une densité.

- f est définie et positive sur $\mathbb{R}$ (car c est positif)
- f est continue sur $(\mathbb{R}) \setminus \{1\}$
- On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}}$$

Provenons d'abord que cette intégrale converge. L'intégrande est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$: On a

$$\frac{c}{x^{c+1}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ car } \frac{cx^2}{x^{c+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } c > 2.$$

Par comparaison et grâce au critère de convergence de Riemann, l'intégrale converge.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{c}{x^{c+1}} &= c \left[\frac{1}{-c} x^{-c} \right]_1^A \\ &= c \left(-\frac{1}{c} A^{-c} + \frac{1}{c} \right) \\ &= 1 - A^{-c} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \text{ car } c > 2. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

BILAN: f peut être considérée comme une densité.

② X possède un moment d'ordre h si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f(x) dx$ converge, c'est-à-dire si $\int_1^{+\infty} \frac{x^h}{x^{c+1}}$ converge

Cas $h = 1$: On a $\frac{x^1}{x^{c+1}} \sim \frac{1}{x^c}$ qui est le terme d'une intégrale convergente car $c > 2$

Donc X admet une espérance

Cas $h = 2$: Comme $c > 2$, alors $\exists \varepsilon > 0$, $c = 2 + \varepsilon$.

On a alors $\frac{x^2}{x^{c+1}} = \frac{x^2}{x^{2+\varepsilon+1}} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ qui est le terme d'une intégrale convergente car $1+\varepsilon > 1$.

Donc X admet un moment d'ordre 2, et donc une variance.

On a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{cx}{x^{c+1}}$$

$$= c \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^c}$$

$$= c \left[\frac{1}{-c+1} x^{-c+1} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c-1} A^{-c+1} + \frac{1}{c-1} \right)$$

$$= \frac{c}{c-1}$$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{c}{c-1}$$

On a également $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Calculons $E(X^2)$.

On a :

$$E(X^2) = \int_1^{+\infty} \frac{cx^2}{x^{c+1}}$$

$$= c \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{c-1}}$$

$$= c \int_1^{+\infty} x^{1-c}$$

$$= c \left[\frac{1}{2-c} x^{2-c} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} c \left(\frac{1}{2-c} A^{2-c} - \frac{1}{2-c} \right)$$

$$= \frac{c}{c-2}$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1} \right)^2 = \frac{c(c-1)^2 - c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2} = \frac{c(c^2 - 2c + 1) - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2} = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$\text{BIEN : } E(X) = \frac{c}{c-1}, V(X) = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 940894

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC SS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

③ On a, $\forall x \in]-\infty, 1[$, $F(x) = 0$.

Soit $x \geq 1$.

$$\begin{aligned}\text{On a } F(x) &= \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}} dt \\ &= c \int_1^x t^{-(c+1)} dt \\ &= c \left[-\frac{1}{c} t^{-c} \right]_1^x \\ &= c \left(-\frac{1}{c} x^{-c} + \frac{1}{c} \right) \\ &= \underline{1 - x^{-c}}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

④ On a $Y(x) = \mathbb{R}^+$

Donc $\forall x < 0$, $G(x) = 0$

Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a } G(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\ln(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \exp(x)) \\ &= F(e^x) \\ &= 1 - (\exp(x))^{-c} \\ &= \underline{1 - e^{-xc}}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-xc} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) On en déduit donc que $\forall c \in \mathcal{C}(c)$.

c)

def simuleX(c):

y = rd.exponential(c)

(cela est valable car on a importé les bibliothèques correspondantes)

x = np.exp(y)

return(x).

d)

def simuleZ(c):

a = simuleX(c)

a = a * simuleX(c)

return(a).

e) Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a

$$E(Z) = E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2 \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la loi de Pareto de paramètre } c.$$

$$\text{Donc } E(Z) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^2.$$

$$\text{On a également } E(Z^2) = E(X_1 X_2 X_1 X_2) = E(X_1^2) E(X_2^2) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^4.$$

$$\text{Donc } E(Z^2) = \left(\frac{c}{c-2}\right)^4.$$

On en déduit que

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= \left(\frac{c}{c-2}\right)^4 - \left(\frac{c}{c-2}\right)^2$$

$$= \frac{c^2(c-2)^2 - c^2(c-2)^4}{(c-2)^2(c-2)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^2 - 4c + 4 - c^4 + 4c^3 - 4c^2 + c - 4)}{(c-2)^2(c-2)^4} = \frac{c^2}{(c-2)^2(c-2)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^2 - 4c + 4)}{(c-2)^2(c-2)^4}$$

⑦ a) On a $cY_1 = c \ln(X_1) = \ln(X_1^c)$.

Donc $P(cY_1 \leq x) = P(Y_1 \leq \frac{x}{c})$
 $= P(\ln(X_1) \leq \frac{x}{c})$

$= P(X_1 \leq \exp(\frac{x}{c}))$

$= 1 - e^{-\frac{x}{c}}$

$= 1 - e^{-x}$

donc $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. De même, $cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

b) On en déduit que $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \mathcal{X}(2)$ par stabilité de la loi gamma.

⑧ a) On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x)$
 $= P(c(Y_1 + Y_2) \leq cx)$
 $= P(cY_1 + cY_2 \leq cx)$
 $= \underline{K(cx)}$.

Une densité de $Y_1 + Y_2$ s'obtient alors par dérivation, et on a, en la notant h .

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cx (cx)^{2-2} x e^{-(cx)} \times \frac{1}{\Gamma(2)} & \text{si } x \geq 0 \text{ car } cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \mathcal{X}(2). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $F_2(x) = P(Z \leq x)$
 $= P(X_1 X_2 \leq x)$
 $= P(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x))$
 $= P(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$
 $= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$
 $= \underline{H(\ln(x))}$.

Une densité s'obtient par dérivation

$$S_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} \times c^2 \ln(x) e^{-c \ln(x)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x > 1 \text{ car } e^{-c \ln(x)} = (e^{\ln(x)})^{-c} = x^{-c} \end{cases}$$

9a) Soit $\alpha > 1$.

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge.

L'intégrande est continue sur $[1, +\infty[$.

en $+\infty$:

$$\text{On a } \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \times x^{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{\ln(x)}{x^{\alpha - \frac{\alpha+1}{2}}} = \frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = o\left(x^{\frac{\alpha+1}{2}}\right)$$

Or, $\forall \alpha > 1, \frac{\alpha+1}{2} > 1$ donc, par comparaison, l'intégrale converge.

Soit $A > 1$.

$$\text{On a } \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \int_1^A \ln(x) \times x^{-\alpha} dx.$$

Procédons à une intégration par parties avec les fonctions $\varphi^1 : x \mapsto \ln(x)$

$$x \mapsto \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \int_1^A \ln(x) \times x^{-\alpha} dx &= \left[\ln(x) \times \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(A) \times \frac{1}{1-\alpha} A^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^A x^{-\alpha} dx \\ &= \ln(A) \times \frac{1}{1-\alpha} A^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^A \\ &= \ln(A) \times \frac{1}{1-\alpha} A^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 (A^{1-\alpha} - 1) \end{aligned}$$

Donc en passant à la limite :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx &= 0 + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 (1 - 0) \\ &= \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

b) On a $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx$

$$= \int_1^{+\infty} c^2 \frac{\ln(x)}{x^c} dx$$

$$= c^2 \left(\frac{1}{1-c} \right)^2 \text{ qui est bien le résultat trouvé en 6.}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 940894

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{et } V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+2}} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c+2}} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= c^2 \times \left(\frac{1}{1-(c+1)}\right)^2 - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= \underline{V(Z) \text{ trouvée en } \textcircled{6}}.$$

Exercice 3 :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ a) On a } P(X=h) &= P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{h-1} \cap \overline{F_h} \cap P_{h+1}) \\ &= P(F_1)P(F_2) \dots P(F_{h-1})P(\overline{F_h})P_{h+1} \\ &= \underline{(1-p)^h p} \end{aligned}$$

pour $h \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{b) On a } E(X) &= \sum_{h=0}^{+\infty} h P(X=h) \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} h (1-p)^h p \\ &= p \sum_{h=0}^{+\infty} h (1-p)^{h-1} (1-p) \\ &= p \times (1-p) \sum_{h=1}^{+\infty} h (1-p)^{h-1} \\ &= p(1-p) \times \frac{1}{p^2} = \underline{\frac{1-p}{p}} \end{aligned}$$

$$\text{et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

On a

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{h=0}^{+\infty} h^2 P(X=h) \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} (h(h-1) + h) P(X=h) \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} h(h-1) P(X=h) + \sum_{h=0}^{+\infty} h P(X=h) \\ &= \sum_{h=2}^{+\infty} h(h-1) (1-p)^{h-2} (1-p)^2 p + E(X) \\ &= (1-p)^2 \times p \times \frac{2}{p^3} + \frac{1-p}{p} \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \cancel{\left(\frac{1-p}{p}\right)^2} + \left(\frac{1-p}{p}\right) - \cancel{\left(\frac{1-p}{p}\right)^2} \\ &= \frac{1-p}{p} = E(X). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E(X) = V(X) = \frac{1-p}{p}.$$

② a) Soit $h \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a } [Q=h] = [X=3h] \cup [X=3h+1] \cup [X=3h+2].$$

5) Par indépendance, on a

$\forall h \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Q=h) &= P(X=3h) + P(X=3h+1) + P(X=3h+2) \\ &= (1-p)^{3h} p + (1-p)^{3h+1} p + (1-p)^{3h+2} p \\ &= p \left((1-p)^{3h} (1 + 1-p + (1-p)^2) \right) \\ &= p \left(q^{3h} (3 - 3p + p^2) \right) \\ &= (q^3)^h (1 - (1-p)^3) \\ &= (1-q^3) (q^3)^h \quad \text{donc } Q \hookrightarrow \mathcal{BN}(1-q^3) \end{aligned}$$

③ Or on a

$$P(R=0) = \bigcup_{h=0}^{+\infty} (X=3h)$$

$$\text{donc } P(R=0) = \sum_{h=0}^{+\infty} P(X=3h) \text{ par } \sigma\text{-additivité}$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} ((1-p)^3)^h p$$

$$= p \times \frac{1}{1-(1-p)^3}$$

$$= p \times \frac{1}{1-(1-3p+3p^2+p^3)}$$

$$= \frac{p}{3p-3p^2+p^3}$$

$$= \frac{1}{3-3p+p^2}$$

$$\text{Or, on a } 1+q+q^2 = 1+(1-p)+(1-p)^2 = 1+1-p+1-2p+p^2 \\ = 3-3p+p^2$$

$$\text{donc } P(R=0) = \frac{1}{1+q+q^2}$$

$$\text{De même, } P(R=1) = \sum_{h=0}^{+\infty} P(X=3h+1)$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} ((1-p)^3)^h (1-p) \times p$$

$$= q \times P(R=0)$$

$$= \frac{q}{1+q+q^2}$$

$$\text{et } P(R=2) = \sum_{h=0}^{+\infty} P(X=3h+2)$$

$$= (1-p)^2 P(R=0)$$

$$= \frac{q^2}{1+q+q^2}$$

$$\text{BIJAN: } \forall i \in \{0, 1, 2\}, P(R=i) = \frac{q^i}{1+q+q^2}$$

④ Montrons que Q et R sont indépendantes

montrons que $P((Q=h) \cap (R=i)) = P(Q=h)P(R=i)$ pour $h \in \mathbb{N}$ et $i \in \{0,1,2\}$.

$$\begin{aligned}\text{On a } P((Q=h) \cap (R=i)) &= P(X = 3h+i) \\ &= (1-p)^{3h+i} \times p \\ &= p(q)^{3h+i}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et } P(Q=h)P(R=i) &= q^{3h}(1-q^3) \times \frac{q^i}{1+q+q^2} \\ &= \frac{q^{3h+i}}{(1-q^3)} \times \cancel{(1-q^3)} \times p \quad * \\ &= q^{3h+i} \times p \\ &= P((Q=h) \cap (R=i)).\end{aligned}$$

* En effet, on a $1-q^3 = 1-(1-p)^3 = 1-(1-3p+3p^2+p^3)$
 $= p(3-3p+p^2)$
 $= p(1-q^3)$

Donc Q et R sont indépendantes.

⑤ a) Une variable géométrique compte le temps d'attente d'un premier succès. Ainsi, en lui ^{suivant une loi}

retranchant 1, on a bien le nombre d'échecs obtenus avant le succès. Ici, le succès est "obtenir pile" et les échecs "obtenir face".

Donc la fonction renvoie la valeur prise par X .

b)

def div(p):

$X = \text{sum}(X(p))$

$Q = X // 3$ # division euclidienne.

$R = X - Q$

return(X, Q, R).

Copie anonyme - n°anonymat : 940894

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC Ss.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème :

① Montrons que $h \in F_n$.

On a

$$h(h+n) = \cos\left(\frac{2\pi(h+n)}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi h}{n} + 2\pi\right)$$

La fonction $\cos$ étant 2π -périodique, on a $\cos\left(\frac{2\pi h}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi h}{n}\right) = h(h)$

Donc $h \in F_n$.

② Montrons que F_n est un sous-espace vectoriel de E .

- $F_n \subset E$.
- L'application nulle est évidemment n -périodique, donc F_n est non vide.
- Montrons que F_n est stable par combinaison linéaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit f et g des fonctions de F_n .

Montrons que $(\lambda f + g)$ est n -périodique.

On a

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(h+n) &= \lambda f(h+n) + g(h+n) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont dans } E \\&= \lambda f(h) + g(h) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont } n\text{-périodiques} \\&= (\lambda f + g)(h)\end{aligned}$$

donc $(\lambda f + g) \in F_n$

Bilan : F_n est un sous-espace vectoriel de E .

③ Soit $h \in \mathbb{N}$.

On a $g(h) = g(nq+r)$ par propriété

(as $q \geq 0$)

$$= g(\underbrace{n+n+\dots+n}_{q \text{ fois}} + r)$$

$$= g(\underbrace{n+\dots+n}_{q-1 \text{ fois}} + r) \text{ car } g \in F_n$$

$$= \dots \quad \left. \begin{array}{l} \text{on itère } q-2 \text{ fois le procédé} \end{array} \right\}$$

$$= g(nr)$$

$$= g(r) \text{ car } g \in F_n.$$

le cas $q \leq 0$ se traite de la même manière, en "rajoutant" des n .

$$\text{Donc } \underline{g(h) = g(r)}.$$

④ a) Soit $g \in F_n$, soit $h \in \mathbb{Z}$.

On a alors $g(h) = g(r)$ avec $r \in \mathbb{I}_n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} g(i) e_i(h) &= g(r) \times e_r(h) \text{ car les autres termes sont nuls} \\ &= g(r) \\ &= g(h) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{g(h) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) e_i(h)}.$$

b) $\forall g \in F_n$, on a donc

$$\forall h \in \mathbb{Z}, g(h) \in \text{Vect}(e_0(h), \dots, e_{n-1}(h))$$

$$\text{Donc } \forall g \in F_n, g \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1})$$

Donc la famille B_n est génératrice de F_n .

Par ailleurs, montrons que la famille B_n est libre.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0_{F_n}$.

En particulierisant en 0, on trouve $\lambda_0 \times 1 + 0 = 0$ soit $\lambda_0 = 0$

De même, en appliquant la fonction à tous les entiers entre 1 et $n-1$, on trouve :

$$\forall i \in [0, n-1], \lambda_i = 0$$

Donc la famille $\mathcal{B}_n$ est libre.

$\mathcal{B}_n$ est libre et génératrice de F_n .

BILAN: $\mathcal{B}_n$ est une base de F_n .

c) Les coordonnées de g dans la base F_n sont $(g(0), \dots, g(n-1))$

⑤ • Montrons la symétrie:

$$\text{On a } \langle g, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)g(k) = \langle g, g \rangle \text{ donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est symétrique}$$

• Montrons la linéarité.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit $g, h \in F_n$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \langle \lambda g + h, h \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda g(k) + h(k)) h(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda g(k) h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} h(k) h(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} g(k) h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} h(k) h(k) \\ &= \lambda \langle g, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

D'où la linéarité à gauche.

La symétrie récemment prouvée permet de conclure sur la linéarité.

$$\bullet \text{ On a } \langle g, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (g(k))^2 \geq 0.$$

$$\text{et } \langle g, g \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (g(k))^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [0, n-1], g(k) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z}, g(i) = 0 \text{ d'après } ③$$

$$\Rightarrow g = 0_{F_n}$$

BILAN: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

b) Soit $i < j$ tel que $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$.

On a

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{h=0}^{n-1} e_i(h) e_j(h)$$

$$= 0 + \dots + \underbrace{e_i(i) e_j(i)}_{=0} + \dots + \underbrace{e_i(j) e_j(j)}_{=0} + 0 + \dots$$

$$= 0$$

Donc B_n est orthogonale.

On a de plus, $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\langle e_i, e_i \rangle = \sum_{h=0}^{n-1} (e_i(h))^2 = (e_i(i))^2 = 1.$$

Donc $\|e_i\| = 1$

BILAN: B_n est orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

c) On a donc, avec l'expression donnée, et car $\sin(\frac{b}{2})$ ne s'annule pas (car $b \in]0, 2\pi[$).

$$\forall h, \cos(a+hb) = \frac{1}{2\sin(\frac{b}{2})} \times \left(\sin\left(a + \frac{(2h+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2h-1)b}{2}\right) \right)$$

donc en sommant entre 0 et $n-1$, on a

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos(a+hb) = \frac{1}{2\sin(\frac{b}{2})} \times \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sin\left(a + \frac{(2h+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2h-1)b}{2}\right) \right)$$

d'où, par télescopie:

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos(a+hb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin(\frac{b}{2})}$$

d) En appliquant cette formule à $b = \frac{4\pi}{n}$ et $a = 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4\pi h}{n}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$= 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 940894

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EHEC BS.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

En appliquant la même formule à $a = \frac{2\pi}{n}$ et $b = \frac{4\pi}{n}$, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{(2n-2) \times 2\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n}\right)}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\sin(2\pi \times 2) - \sin(0)}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{0 - 0}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Où les égalités à prouver.

$$\begin{aligned}\text{e) On a } \|h\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (h(k))^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + 1\right) \quad \left(\text{car } \cos(a)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2} \text{ d'après } \textcircled{d} \quad \text{donc } \|h\| = \underline{\underline{\sqrt{\frac{n}{2}}}}\end{aligned}$$

⑥ a) Soit $g \in F_n$.

Soit $h \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } Dg(h+n) &= g(h+n+2) - g(h+n) \\ &= g(h+1) - g(h) \\ &= Dg(h) \end{aligned}$$

Donc $Dg \in F_n$.

b) On a montré que $D : F_n \rightarrow F_n$ à la question précédente.

• Montrons que D est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, g et g dans F_n .

$$\begin{aligned} \text{On a } D(\lambda g + g) &= (\lambda g + g)(h+1) - (\lambda g + g)(h) \\ &= \lambda g(h+1) - \lambda g(h) + g(h+1) - g(h) \\ &= \lambda Dg(h) + Dg(h) \quad \text{d'où la linéarité.} \end{aligned}$$

Donc $D : g \mapsto D(g)$ est un endomorphisme de F_n

c) On a

$$\begin{aligned} Dh &= h(h+2) - h(h) \\ &= \cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a : $-2\sin(a)\sin(b) = \cos(a+b) - \cos(a-b)$

(1.2 - 1.2 dans les rappels de l'énoncé)

$$\text{et } -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right) = -2 \quad \text{d'où}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} - \frac{2h\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(-\frac{2h\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) \quad (\text{car } \cos(a) = \cos(-a)).$$

$$= Dh.$$

BILAN : $Dh = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right)$

d) On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \|Dh\|^2 &= \sum_{h=0}^{n-1} (Dh(h))^2 \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} \left(-2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right) \right)^2 \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right) \\
 &= n 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sum_{h=0}^{n-1} 1 - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right)\right) \\
 &= \cancel{n} - \sum_{h=0}^{n-1} \cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
 &= n \left(2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \times \left(n - \underbrace{\sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi(2h+1)}{n}\right)}_{=0} \right) \\
 &= \dots \\
 &= 2n \times \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Donc $\|Dh\| = \sqrt{2n \times \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \sqrt{2n} \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$

a) On a

$$\begin{aligned}
 \langle g, \Delta g \rangle &= \sum_{h=0}^{n-1} g(h) \Delta g(h) \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} g(h) (g(h+1) - 2g(h) + g(h-1)) \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} g(h)g(h+1) - 2g(h)^2 + g(h)g(h-1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } \langle Dg, Dg \rangle &= \sum_{h=0}^{n-1} Dg(h) Dg(h) \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} (g(h+1) - g(h)) (g(h+1) - g(h)) \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} -g(h)g(h+1) + 2g(h)^2 + g(h)g(h-1) \\
 &= - \langle g, \Delta g \rangle.
 \end{aligned}$$

Donc $\langle Dg, Dg \rangle = - \langle g, \Delta g \rangle.$

