

A5-00007
404309
Maths 2B



Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de :

Stochastiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1. Stochastiques génératrices et système différentiel associé.

1. D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événement $([X_t = i])_{i \in \{1, \dots, n\}}$,
 $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall (t, h) \in (\mathbb{R}_+)^2, P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^n P([X_{t+h} = j] | [X_t = i])$.

2. Pour $i \in \{1, \dots, n\}, t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}_+$,
 On a $P(X_t = i) \neq 0$.

Dans, d'après la formule des probabilités conditionnelles avec le système complet d'événement $([X_{t+h} = j])_{j \in \{1, \dots, n\}}$

$$\sum_{j=1}^n P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j) = 1$$

Or, pour $i = j, P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = i) = 1 + \alpha_{ii} h + o(h)$.

et pour $i \neq j, P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j) = \alpha_{i,j} h + o(h)$.

Ainsi :

$$\sum_{j=1}^n P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 1 = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + \alpha_{ii}h + o(h) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}h + o(h)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 1 = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right) h + o(h)$$

$$\text{car } n o(h) = o(h) \text{ ; } h \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right) h = o(h)$$

$$\text{or } \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Donc } - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 0(1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 0 \quad \text{car } -0(1) = 0.$$

$$3. a) \text{ On a } P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^n P([X_{t+h}=j] \cap [X_t=i])$$

$$\text{et } P([X_{t+h}=j] \cap [X_t=i])$$

$$= P(X_t=i) P(X_{t+h}=j | X_t=i) \text{ d'après la}$$

formule des probabilités composées.

$$\text{Pour } i=j, \text{ d'après H3, } P(X_{t+h}=i | X_t=i) = 1 + \alpha_{ii}h + o(h)$$

De même, d'après H4, pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$

$$P(X_{t+h}=j) = \sum_{i=1}^n P([X_{t+h}=j] \wedge [X_t=i])$$

$$= \sum_{i=1}^n P(X_t=i) P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=j)$$

$$= P(X_t=j) P_{[X_t=j]}[X_t=j] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n P(X_t=i) P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=j)$$

Ainsi, par opération sur les limites,

$$P(X_{t+h}=j) \underset{h \rightarrow 0}{=} P(X_t=j) (1 + \alpha_{jj} h + o(h)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\alpha_{ij} h + o(h)) P(X_t=i)$$

$$\Leftrightarrow \underline{P(X_{t+h}=j) = P(X_t=j) + \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} h + o(h)) P(X_t=i)}$$

a) On a $f_i : t \mapsto P(X_t=i)$

donc $f_j : t \mapsto P(X_t=j)$

Pour $h > 0$,

$$P(X_{t+h}=j) - P(X_t=j) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} h + o(h)) P(X_t=i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X_{t+h}=j) - P(X_t=j)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} + o(1)) P(X_t=i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} + o(1)) f_i(t)$$

Or, $\forall t > 0$, $f_{\alpha}^{-}(t) o(1) = o(1)$ car f_i dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Donc

$$\frac{f_j(t+h) - f_j^{-}(t)}{h} = \sum_{i=1}^n f_i(t) \alpha_{ij} + o(1)$$

On a f_i dérivable sur $\mathbb{R}_+$, or comme la définition de la dérivée en un point est la limite du taux d'accroissement en ce point,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f_j'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h}$$

$$= \sum_{i=1}^n f_i'(t) \alpha_{ij}$$

$$\text{car } o(1) = 0.$$

$$c) \text{ Pour } L_t = \begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } L_t' = \begin{pmatrix} f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \end{pmatrix}$$

et G matrice génératrice du processus.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$f_j'(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \alpha_{ij}$$

Dans le produit matriciel d'une matrice ligne par une matrice à droite,

$$L_t' = L_t G.$$

4. Soit $T > 0$, $U_T \hookrightarrow \mathcal{U}([0; T])$

Soit $Z_{i,T} = f_i(U_T)$

$E(Z_{i,T})$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) g(t) dt$ converge absolument d'après le théorème du majorant avec

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t \in [0; T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f_i g$ continue sur tout segment $[0; T]$ de $\mathbb{R}$ avec $T > 0$ comme produit de fonctions qui

le sont et nulle pour $t \notin [0; T]$ telle que

$$\forall t \notin [0; T], \quad g(t) f_i(t) = 0$$

Aussi, $E(Z_i; T)$ existe comme intégrale de fonction continue sur un segment et converge absolument.

D'après le théorème du Trajectoire:

$$\begin{aligned} E(Z_i; T) &= \int_0^T f_i(t) g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) dt. \end{aligned}$$

$$= e_i(T)$$

5. $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ où a et b réels strictement positifs.

$$p = \frac{b}{a+b}, \quad q = 1-p \text{ et } x = f_1(0).$$

a) Comme $L_+^1 \approx L_+ \cup$,

avec dans ce cas : $L_+ = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}$

$$\text{et} \quad L_+^1 = \begin{pmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix}$$

il vient le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} f_1'(t) = -a f_1(t) + b f_2(t) \\ f_2'(t) = a f_1(t) - b f_2(t) \end{cases}$$

Or, $f_2(t) = 1 - f_1(t)$

Donc $f_2'(t) = -f_1'(t)$

et $L_{f_1}' = L_{f_2} \iff \begin{cases} f_1'(t) = -(a+b) f_1(t) + b \\ -f_1'(t) = (a+b) f_1(t) - b \end{cases}$

$$\iff f_1'(t) + (a+b) f_1(t) = b$$

$\iff f_1$ vérifie l'équation différentielle d'ordre 1
sur $\mathbb{R}_+$, $y' + (a+b)y = b$.

b) Toutes les solutions de cette équation sont sous la forme $t \mapsto \lambda e^{-(a+b)t} + \frac{b}{a+b}$ avec λ constante (non nulle pour f_1 car f_1 n'est pas la fonction nulle).

Or, on a $f_1(0) = \alpha$

Donc $-\lambda(a+b) + (a+b)\alpha = b$

$$\iff \alpha - \lambda = p$$

$$\iff \lambda = \alpha - p$$

donnée, d'après le théorème de Cauchy-Schwarz, la solution est unique et, pour $\lambda = \alpha - p$

$$f_1(t) = p + (\alpha - p) \exp(-(a+b)t)$$

et comme $\forall t > 0, f_2(t) = 1 - f_1(t)$,

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 1 - p - (\alpha - p) \exp(-(a+b)t) \\ &= q - (\alpha - p) \exp(-(a+b)t) \end{aligned}$$

c) On admet que $\forall t > 0, f_1(t) \in [\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)]$

De plus, comme $(a+b) > 0, \Rightarrow \exp(-(a+b)t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Par opération sur les limites,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = p.$$

$$d) e_1(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t) dt.$$

$$= \frac{1}{T} \left(\int_0^T p + (\alpha - p) \exp(-(a+b)t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(\int_0^T p dt + (\alpha - p) \int_0^T \exp(-(a+b)t) dt \right)$$

par linéarité de l'intégrale.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= \frac{1}{T} \left(\begin{bmatrix} p \tau \end{bmatrix}_0^T + (\alpha - p) \begin{bmatrix} \frac{\exp(-(a+b)T)}{-a+b} \end{bmatrix}_0^T \right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(p T + (\alpha - p) \left(\frac{\exp(-(a+b)T)}{-a+b} + \frac{1}{a+b} \right) \right)$$

$$= p + (\alpha - p) \frac{\exp(-(a+b)T)}{-T(a+b)} + \frac{\alpha - p}{(a+b)T}$$

Par opérations sur les limites,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} e_1(T) = p.$$

6. $n=3$ et $G = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(G) < 3$,

G est non-inversible et 0 valeur propre de G car

sa première colonne est linéaire des deux autres.

On remarque que $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(G) = E_0(G)$.

De plus,

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-3}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $-\frac{1}{10}$ valeur propre de G car $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ non nul

$$\text{et } G \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Enfin, } G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_6^{\perp}(G) \text{ et}$$

$-\frac{1}{6}$ valeur propre de G car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non nul et

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0(G)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{10}}(G)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{6}}(G)$.

G est diagonalisable car $\mathbb{K}$ possède 3 valeurs propres distinctes et est d'ordre 3.

Par concaténation de vecteurs propres associées à 3 valeurs propres distinctes,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une famille libre de 3 vecteurs

de $\mathcal{D}_{3,1}(\mathbb{K})$ de dimension 3 donc une base

de vecteurs propres. Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

telles que $G = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$\text{d'où } G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$c) \quad {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D'$$

$$\text{On } D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ inversible telle que } D'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } P^{-1} {}^tP^{-1} = D'^{-1}$$

$$\text{On en déduit que } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$d) \forall t \in \mathbb{R}_+, P^{-1} C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } C_t' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}$$

et $G C_t = C_t'$ car $C_t G = C_t'$, C_t est une matrice colonne tangente d'un trajectoire.

Ainsi,

$$G C_t = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1} C_t$$

$$\Leftrightarrow C_t' = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C_t' = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 \\ -3y_2(t) \\ -5y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{10} y_2(t) \\ -\frac{1}{6} y_3(t) \end{pmatrix}$$

Il reste P dont je ne sais que faire;

On a donc

$$\begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = -\frac{1}{10} y_2(t) \\ y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t) \end{cases}$$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées.		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

e) pour l'équation différentielle $y_1'(t) = 0$,
l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions
constantes sur $\mathbb{R}$. On prend $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\alpha = \frac{1}{6} (2 y_1(0) + 2 y_2(0) + 2 y_3(0))$$

afin de
vérifier la condition initiale C_0 .

De même, $y_2'(t) = -\frac{1}{10} y_2(t)$

$$\Rightarrow y_2(t) = \beta e^{-\frac{1}{10}t}$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ une composante de $P^{-1}C_0$

et $y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t)$

$$\Rightarrow y_3(t) = \gamma e^{-\frac{1}{6}t}$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}$ une composante de $P^{-1}C_0$.

Enfin, $C_t = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_t \in P \mathbb{R}^3$

13/28

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$

7. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $p_i = -\alpha_i$,

Pour $n > 0$ et h assez grand :

$$P\left(\bigcap_{j=0}^h \left[X_{\frac{j}{h}n} = i\right]\right) \neq 0 \text{ et } P(Y_i > n) = \lim_{h \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^h \left[X_{\frac{j}{h}n} = i\right]\right)$$

a) D'après la formule des probabilités composées, comme

$P(X_0 = i) \neq 0$, et comme pour h assez grand,

$$P\left(\bigcap_{j=0}^h \left[X_{\frac{j}{h}n} = i\right]\right) \neq 0, \text{ on a :}$$

$$P\left(\bigcap_{j=0}^h \left[X_{\frac{j}{h}n} = i\right]\right)$$

$$= P(X_0 = i) P_{(X_0 = i)}\left(X_{\frac{1}{h}n} = i\right) P_{[X_0 = i] \cap \left[X_{\frac{1}{h}n} = i\right]}\left(X_{\frac{2}{h}n} = i\right) \dots$$

or, d'après H2, on a :

$$P\left(\bigcap_{j=0}^h \left[X_{\frac{j}{h}n} = i\right]\right) = P(X_0 = i) \bigcap_{j=0}^{h-1} P\left[X_{\frac{j}{h}n} = i \mid X_{\frac{j+1}{h}n} = i\right]$$

$$0, \forall j \in \{0; \dots; h-1\},$$

$$P\left[X_{\frac{j}{k}} n=i\right] \left(X_{\frac{j+1}{k}} n=i\right)$$

$$= P\left[X_{\frac{j}{k}} n=i\right] \left(X_{\frac{j+1}{k}} n=i\right)$$

et avec $\frac{1}{k} n \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

D'après (HS), par opérations sur les limites,

$$P(X_0=i) \prod_{j=0}^{h-1} P\left[X_{\frac{j}{k}} n=i\right] \left(X_{\frac{j+1}{k}} n=i\right)$$

$$= P(X_0=i) \left(1 - \frac{\beta_i}{k} n + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^h$$

car $\beta_i = -\alpha_i$,

b) D'après A'encadré,

$$P(Y_i \leq n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^h \left[X_{\frac{j}{k}} n=i\right]\right)$$

$$= P(X_0=i) \left(1 - \frac{\beta}{k} n + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

Ainsi, avec $P(X_0=i)$, d'après la formule de Bayes,

$$P_{[X_0=i]}(Y_i > n) = \frac{P_{[Y_i > n]}(X_0=i)}{P(X_0=i)} \frac{P(Y_i > n)}{P(X_0=i)}$$

$$= P_{[Y_i > n]}[X_0=i] \left(1 - \frac{\beta_i}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n$$

le array grand.

(Je m'abandonne pas cependant).

La loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle

$P_{[X_0=i]}$ est une loi exponentielle de paramètre

β_i

$$c) \quad \forall n \geq 0, \quad P(Y_i > n) = \sum_{k=1}^n P(X_0=k) P_{[X_0=k]}(Y_i > n)$$

d'après la formule des probabilités totales appliquée au système / event d'intérêt $([X_0=k])_{k=0,1,\dots,n}$

$$\Leftrightarrow P(Y_i > n) = \sum_{k=1}^n P(X_0=k) e^{-\beta_k n}$$

$$d) \quad \forall n \geq 0, \quad P(Y_i \leq n) = 1 - P(Y_i > n)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^n P(X_0=k) e^{-\beta_k n}$$

La fonction de répartition de Y_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

Par opération sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_i \leq n) = 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Stochastiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow -\infty} P(Y_{-5n}) = 0$$

car pour $P(X_0 = i) > 0$, $p_i \neq 0$ et $p_i > 0$ car
 $p_i = -\alpha_i$ avec $\alpha_i \leq 0$.

Enfin, la fonction de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive en tout point de $\mathbb{R}$
1 est donc la densité et g sa densité:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 + \sum_{k=1}^n p_k P(X_0 = k) e^{-p_k n} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

e) D'après le théorème du type, Y

On admet

Partie 2 - Matrice de transition

8. a) $\forall s \geq 0$,

$$L_s = (f_1(s) \dots f_n(s))$$

Notant la matrice d'estimeur générique $m_{i,j}(s)$

avec $m_{i,j}(s) = P_{\{X_t=i\}}(X_{t+s}=j)$.

avec $t=0$ dans ce cas là,

On a $L_s = L_0 \Pi(s)$ pour $s \geq 0$.

b) D'abord, pour r et s négatifs, l'un, l'autre ou les deux, tels que $r+s < 0$
ou $r+s+t < 0$,

$$P(\{X_r=i\} \cap \{X_{r+s}=k\} \cap \{X_{r+s+t}=j\}) = 0$$

ainsi, pour $r < r+s < r+s+t$ avec s et t positifs,

d'après la formule des probabilités composées,

$$P(X_r = i \cap X_{r+s} = k \cap X_{r+s+t} = j)$$

$$= P(X_r = i) P_{[X_r = i]}(X_{r+s} = k) P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

$$= \underline{P(X_r = i) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)}$$

$$\text{car } m_{i,k}(s) = P_{[X_r = i]}(X_{r+s} = k)$$

$$\text{et } m_{k,j}(t) = P_{[X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

$$= P_{[X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]}(X_{r+s+t} = j)$$

d'après A2.

On en déduit, à partir de la formule de probabilité totale appliquée

$$\text{au s.c.e. } \left(\sum_{k=1}^n X_{r+s} = k \right)$$

$$\sum_{k=1}^n P([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [\sum_{k=1}^n X_{r+s+t} = j])$$

$$= \underline{P([X_r = i] \cap [\sum_{k=1}^n X_{r+s+t} = j]) = P(X_r = i) \sum_{k=1}^n m_{i,k}(s) m_{k,j}(t).}$$

c) On recense dans

$$\sum_{k=1}^n m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

la somme de coordonnées i, j du produit matriciel $\Pi(s) \Pi(t)$, soit la i -ème ligne de $\Pi(s)$ par la j -ème colonne de $\Pi(t)$.

Ainsi, par calcul matriciel, comme on passe de V à $V + \underline{s+t}$, on a d'après ce qui précède que $\Pi(s+t) = \Pi(s) \Pi(t)$ par produit matriciel.

d) Procédons par récurrence:

L'initialisation est immédiate, $\Pi(1 \times t) = [\Pi(t)]^1$

Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\Pi(kt) = \Pi(t)^k$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \Pi((k+1)t) &= \Pi(kt + t) \\ &= \Pi(t)^k \Pi(t) \\ &= \Pi(t)^{k+1} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, \Pi(kt) = \Pi(t)^k$.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de :

Orthographe appliquée.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$M(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(I_m + \frac{t}{h} G \right)^h$$

9. def transition (t, G):

A = np.eye(n) + t / 1000 * G

for i in range(1000):

A = np.dot(A, A)

return A

Remarque: Si n n'est pas indiqué :

def transition (t, G):

n = np.shape(G)[0]

A = np.eye(n) + t / 1000 * G

for i in range(1000):

A = np.dot(A, A)

return A

b) def trace Loi 2Xt (b, L0, tmax):
 A = np.linspace(0, tmax, 1000); X = []
 for i in range(n)
 X = np.dot (L0, transition (i, b))
 plt.plot(X, t)
 plt.show()

c) le graphique est cohérent avec le résultat
 trouvé en b. e)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$$

d) def simulX t, b, L0, b):
 liste des T = []; liste des X = []
 Tt = transition (t, b); Lt = L0
 for i in range (b+1):
 liste des T.append(i * t)
 p = rd.random()
 s = Lt [0]
 j = 0
 while p > s:
 j = j + 1
 s = Lt(j)
 Lt = L0
 liste des X.append (j+1)
 plt.plot(liste des T, liste des X); plt.show().

Partie 4 - Description de (2A)

$$\begin{aligned} 12. \quad \|A\| &= \max \left(\frac{1}{3} \times (1+1+1), \frac{1}{3} \times (1+1), \frac{1}{3} \times (4+2) \right) \\ &= \max \left(1, \frac{2}{3}, 2 \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

13. Soit $t \geq 0$

a) la somme d'une ligne d'une matrice de transition est toujours égale à 1

Donc pour $t \geq 0$, $\|P(t)\| = 1$

b) On a :

$$1 = 1 + \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) h + o(h)$$

Prendre h assez proche de 0 (c'est prendre h assez grand).

De plus, $\sum_{j=1}^n P_{[X_t=i]}(X_{t+h}=j) = 1$.

(Se voir les parties par).

14. a)

$$\|A, B\| \leq \sigma_m(M)^2,$$

$$\|A+B\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \right)$$

Or, D'après l'inégalité triangulaire,

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + |b_{ij}|$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \|A+B\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right) \\ &= \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

$$b) \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

D'où $\|A\|$ est un terme de la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ de termes positifs.

$$\text{Il vient donc que } \|A\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

$$c) \|AB\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij} b_{j,i}| \right)$$

$$\text{et } \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \text{ et } \|B\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |b_{j,i}| \right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques Appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On admet que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Par récurrence immédiate, comme celle faite en 8.d),
 $\|A^n\| \leq \|A\|^n \Rightarrow \|A^n \times A\| \leq \|A\|^n \|A\|$ d'après

ce qui précède

$$\Rightarrow \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}.$$

d) $\forall k \in \mathbb{N}^+$,

$$A(A^k - B^k) + (A - B)B^k$$

$$= A^{k+1} - \cancel{AB^k} + \cancel{AB^k} - B^{k+1}$$

$$= A^{k+1} - B^{k+1}$$

e) Initialisation :

$$\text{Pour } k=1, \quad \|A - B\| \leq 1 \times \|A - B\| \\ \leq \|A - B\|.$$

Initialisation.

Hérédité :

$$\text{Si } \|A^k - B^k\| \leq k c^{k-1} \|A - B\|$$

$$\text{alors } \|A^{k+1} - B^{k+1}\|$$

$$= \|A(A^k - B^k) + (A - B)B^k\| \text{ d'après 14. d)}$$

$$\leq \|A(A^k - B^k)\| + \|(A - B)B^k\| \text{ d'après 14. a).}$$

$$\leq \|A\| \|A^k - B^k\| + \|A - B\| \|B^k\| \text{ d'après 14. c)}$$

$$\leq \|A\| k c^{k-1} \|A - B\| + \|A - B\| k \|B\| \text{ d'après H.R. et 14. c)}$$

$$\leq \|A - B\| (k c^{k-1} \|A\| + k \|B\|)$$

$$\text{On } k c^{k-1} \|A\| + k \|B\| \leq k c^k + k c \leq (k+1) c^k$$

$$\text{Donc } \|A^{k+1} - B^{k+1}\| \leq (k+1) c^k \|A - B\|$$

la propriété est héréditaire.

15. a) On admet

$$b) \left\| \Pi\left(\frac{t}{h}\right)^h - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right)^h \right\|$$

$$\leq k \max\left(\left\|\Pi\left(\frac{t}{h}\right)\right\|, \left\|I_n + \frac{t}{h} G\right\|\right)^{h-1} \left\|\Pi\left(\frac{t}{h}\right) - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right)\right\|$$

On a $\max\left(\left\|\Pi\left(\frac{t}{h}\right)\right\|, \left\|I_n + \frac{t}{h} G\right\|\right) = 1$ d'après la

question 13,

$$\text{Donc } \left\| \Pi\left(\frac{t}{h}\right)^h - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right)^h \right\| \leq k \left\| \Pi\left(\frac{t}{h}\right) - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right) \right\|$$

$$c) \text{ Soit } \left\| \Pi\left(\frac{t}{h}\right) - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right) \right\| = o\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\text{alors } k \left\| \Pi\left(\frac{t}{h}\right) - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right) \right\| \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$$

d'après le théorème des gendarmes, par continuité.

$$\left\| \Pi\left(\frac{t}{h}\right)^h - \left(I_n + \frac{t}{h} G\right)^h \right\| \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$$

Autant dit $\Pi\left(\frac{t}{h}\right)^k \xrightarrow[h \rightarrow +\infty]{} \left(I_n + \frac{t}{h} G\right)^k$

or d'après 8. d)

$$\Pi\left(\frac{t}{h}\right)^k = \Pi\left(k \frac{t}{h}\right) = \Pi(t)$$

enfin, $\Pi(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{t}{h} G\right)^k$
