Copie anonyme - n°anonymat : 628268

N8-00087 628268 Maths S

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : mathematiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1.

1) $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + Rg(f)$$
$$= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + Rg(M)$$

donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1}$

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ car de dimension $n-1$,

donc on conclut $E_0(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$.

2) a. C est la première colonne de M et M est de rang 1.
Puisque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que toutes les colonnes de M sont proportionnelles à C,

ie $\exists (l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $M = \begin{pmatrix} C & l_2C & l_3C & \dots & l_nC \end{pmatrix}$

donc si on pose

$$L = (1\ l_2, \dots, l_n)$$

on a $\boxed{M = CL}$

b) si on note $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n}$

on a $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$

or $M = CL$ (q2a) donc si on note $C = ((c_i))_{1 \leq i \leq n}$

et $L = (1\ l_2\ l_3 \ldots l_n)$

on a $m_{i,i} = c_i l_i$

donc $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i$

$= (1\ l_1, \ldots, l_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$\boxed{= LC}$

c) $M = CL$ (q2a)
et $Tr(M) = LC$ (q2b) donc $M^2 = CL \times CL$

$= C \times LC \times L$

$= C \times Tr(M) \times L$

$= Tr(M) \times CL$ car $Tr(M) \in \mathbb{R}$

$\boxed{= Tr(M) \times M}$

3) On a $M \times Tr(M) = M^2$

ie $M \times CL = Tr(M) \times CL$ (q2a) et $\underline{CL \neq 0_{n,1}}$

donc $Tr(M)$ est une valeur propre de M,

donc $\boxed{\text{une valeur propre de } f}$

4) Si $Tr(M)=0$ alors 0 est valeur propre de f (q3)
et c'est le cas d'après q1.

Supposons M diagonalisable, alors il existe
D diagonale et P inversible telles que

$$M = PDP^{-1}$$

donc $M^2 = (PDP^{-1})^2$
$= PDP^{-1}PDP^{-1}$
$= PD^2P^{-1}$

donc $Tr(M) \times M = PD^2P^{-1}$

donc $PD^2P^{-1} = 0_n$ or c'est absurde car cela signifie que D est la matrice nulle

$(Tr(M) = Tr(D))$

or cela voudrait dire que 0 est la seule valeur propre de M,
or $\dim(E_0(M)) = n-1$ (q1) $\neq \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$

donc $\boxed{M \text{ non diagonalisable}}$

5) On a vu en q1 que 0 est valeur propre de f
et $Tr(M)$ aussi (q3)

or $\dim(E_0(f)) = n-1$

et on a $f^2 = Tr(M) f$ ie $M^2 = Tr(M) \times M$
ie $M^2 - Tr(M) \times M = 0_n$.
ie $M(M - Tr(M)) = 0_n$

donc $X(X - Tr(M))$ est un polynôme annulateur donc ses racines 0 et $Tr(M)$ sont les seules valeurs propres possibles pour M et pour f, donc $Sp(M) = \{0, Tr(M)\}$.

on a $CL \in E_{Tr(M)}(M)$ (q3)

et d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(E_{Tr(\Pi)}(f)) - Rg(f - Tr(\Pi)Id)$$

Partie 2.

6) a. $AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 & L_1 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ bx + cy + z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{cases}$$

a et b non nuls.

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right)z = 0 \\ \left(c - \frac{b}{a}\right)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ \left(\frac{b - ca}{cb}\right)z = 0 \\ (ca - b)\,y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ (b - ca)z = 0 \\ (ca - b)y = 0 \end{cases}$$

si $ca \neq b$, on a $y = z = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $x = 0$,

or si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~~cela signifie que~~ $\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A)}$

alors on aboutit à quelque chose d'absurde car A est non inversible donc il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$ car A non inversible signifie 0 valeur propre de A donc $E_0(A) \neq \{0_{3,1}\}$.

donc $\boxed{ac = b}$

b) $ac = b$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$

$$Rg(A) = Rg\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ a & 1 & \frac{1}{c} \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (q6a)$$

donc $\boxed{Rg(A) = 1}$

7) A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A donc de g.
On a $Rg(A) = 1$ et d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(E_0(g)) + Rg(A)$$

donc $\dim(E_0(g)) = 2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or $Rg(A-3I_3) = Rg\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ a & -2 & 1/c \\ b & c & -2 \end{pmatrix}$

$$= Rg\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ a & -2 & \frac{1}{c} \\ ac & c & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + aL_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + acL_1 \end{matrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ 0 & -3 & \frac{2}{c}+\frac{1}{c} \\ 0 & 3c & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + cL_2 \end{matrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ac} \\ 0 & -3 & 3\times\frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= 2 < 3$ donc 3 est valeur propre de A

donc de g.

et d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(E_3(g)) + Rg(A-3I_3)$$

donc $\dim(E_3(g)) = 1$

donc on a $\dim(E_0(g)) + \dim(E_3(g)) = \dim(\mathbb{R}^3)$

donc $\boxed{g \text{ diagonalisable et } sp(g) = \{0,3\}}$

b) A est diagonalisable (q7a) car g l'est,

donc il existe D diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & 3 \end{pmatrix}$

et P inversible

(P la matrice des vecteurs colonnes d'une base de vecteurs propres de A)

et on a $A = PDP^{-1}$

donc $A^n = PD^nP^{-1}$ car D diagonale.

$= P \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P\, 3^{n-1} D\, P^{-1}$

$= 3^{n-1} \times PDP^{-1}$

$\boxed{= 3^{n-1} A}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

donc $\boxed{A^n \in \text{vect}(A)}$.

Exercice 2.

$\star$ f est positive sur $\mathbb{R}$ car

on a $c > 2$ donc $\forall x \geq 1$, $x^{c+1} \geq 1 > 0$ car $t \mapsto t^{c+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$c+1 > 3$

donc $\frac{c}{x^{c+1}} > 0$

et si $x < 1$, $f(x) = 0$

$\star$ $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \setminus \{1\})$ car $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[)$

car $x \mapsto \frac{c}{x^{c+1}} \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[)$

et $f \in \mathcal{C}^0(]-\infty, 1[)$ (nulle)

$\star \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt$ converge car f nulle sur $]-\infty,1[$

$t \longmapsto \frac{c}{t^{c+1}} \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[)$

donc intégrale impropre en $+\infty$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c+1}}\,dt$ converge (Riemann car $c+1>1$)

$\left(\text{et } \forall t \geqslant 1,\ \frac{1}{t^{c+1}} \geqslant 0,\ \frac{c}{t^{c+1}} \geqslant 0\right)$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt$ converge comme combinaison linéaire de série convergente.

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c+1}}\,dt = \frac{1}{c+1-1} = \frac{1}{c}$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt = \frac{c}{c} \boxed{= 1}$ (linéarité de l'intégrale convergente)

donc $\boxed{f \text{ est une densité}}$

2) $E(X)$ existe $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c}}\,dt$ converge (f nulle sur $]-\infty,1[$ et f positive sur $\mathbb{R}$)

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c}}\,dt$ converge (Riemann car $c>2>1$)

donc $\int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c}}\,dt$ converge comme combinaison linéaire

et vaut $\boxed{c \times \frac{1}{c-1}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : mathematiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$V(X)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge absolument donc si ($E(X^2)$ existe)

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c-1}}\,dt$ converge

or $c-1 > 2-1 = 1$ donc par un raisonnement analogue à celui pour l'espérance (intégrale de Riemann)

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{c}{c-2}$.

et d'après Koenig Huygens, $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$= \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= \frac{c(c-1)^2}{(c-2)(c-1)^2} - \frac{c^2(c-2)}{(c-1)^2(c-2)}$$

$$= \frac{c(c^2-2c+1) - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c^3 - c^3 - 2c^2 + 2c^2 + c}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$\boxed{= \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

<u>si $x < 1$</u>, $F(x) = 0$

si $x \geqslant 1$, $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt$

$t \longmapsto \frac{c}{t^{c+1}} \in \mathcal{C}^0([1,x])$ donc

$$F(x) = \int_{1}^{x} c \times t^{1-c}\,dt$$

$$= \left[c \times \frac{t^{1-c+1}}{1-c+1} \right]_1^x$$

$$= \frac{x^{-c}}{1-c+1} \times c - \frac{1 \times c}{1-c+1}$$

$$= -\frac{1}{x^c} + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{x^c} \in [0,1]$$

donc $\boxed{F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$

4) a- $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P([Y \leq x])$

$= P([\ln(X) \leq x])$

$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 & \text{car } X \in [1, +\infty[\text{ donc } \ln(X) \in \mathbb{R}_+ \\ P([X \leq e^x]) \text{ si } x \geq 0 & \text{car } t \mapsto e^t \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{cases}$

$P([X \leq e^x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x < 1 \text{ ie } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{e^{xc}} & \text{si } e^x \geqslant 1 \text{ ie } x \geqslant 0 \end{cases}$

donc $\boxed{G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{e^{xc}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$

b) $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-xc} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\left(\text{car } G(0) = \lim_{x \to 0^+} G(x) = 1 - 1 = 0 \text{ car } e^{xc} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \right)$

donc on en déduit $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)}$.

c)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Y = rd.exponential(1/c)   # on simule Y
    X = exp(Y)                # on applique l'exponentielle
    return X                  # on renvoie X.
```

Partie 2.

5)
```
import numpy as np
import rd.random as rd

def simulZ(c):
    X1 =    simul(X)(c)
    X2 =    simul(X)(c)
    return X1 * X2
```

6) · On admet que $E(Z)$ existe et · aussi.

$$E(Z) = E(X_1 X_2)$$
$$= E(X_1) \times E(X_2) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}$$
$$= \frac{c}{c-1} \times \frac{c}{c-1} \quad (q2)$$
$$= \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

$$E(Z^2) = E(X_1^2 X_2^2)$$
$$= E(X_1^2) \times E(X_2^2)$$
$$= \left(\frac{c}{(c-2)(c-1)^2}\right)^2 \quad (q3)$$
$$= \frac{c^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

car X_1 et X_2 indépendantes donc d'après le lemme des coalitions, X_1^2 et X_2^2 aussi.

donc $V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$ (Koenig Huygens)

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2(c-1)^4} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$
$$= \frac{c^2 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$$
$$= c^2(1 - c^2(c-2)^2)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

7) a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P([cY_1 \leq x]) = P([Y_1 \leq \frac{x}{c}])$ $c>0$

$$= P([Y \leq \frac{x}{c}])$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{c} \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{c} \times c} & \text{si } \frac{x}{c} > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (c>0)$$

donc $\boxed{\begin{matrix} cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \\ cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \end{matrix}}$

b) cY_1 et cY_2 sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, car X_1 et X_2 le sont

et $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$
$cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $\boxed{cY_1 + cY_1 \hookrightarrow \gamma(2)}$

8) a. $cY_1 + cY_2 = c(Y_1 + Y_2)$

donc $c(Y_1+Y_2) \hookrightarrow \gamma(2)$

et $\begin{pmatrix} cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) & \text{donc} & Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(c) \\ cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) & & Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(c) \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P([c(Y_1+Y_2) \leq x]) = P([Y_1+Y_2 \leq \frac{x}{c}])$

or $P([c(Y_1+Y_2) \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^x t e^{-t} dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$

donc $\underbrace{P([Y_1+Y_2 \leq x])}_{H(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{c}{\Gamma(2)} \int_0^{xc} t e^{-t} dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\boxed{\Gamma(2) = 1! = 1}$

donc on a $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ car $\frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^0 t e^{-t} dt = 0 = H(0)$

et $H \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0,

donc Y_1+Y_2 est à densité et

une densité de Y_1+Y_2 est (en dérivant H là où on peut et en mettant 0 ailleurs).

$h : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ c \times xc \times e^{-xc} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\boxed{h : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ c^2 x e^{-xc} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

b)

9)a_ $\forall \alpha > 1$, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[)$

donc intégrale impropre en $+\infty$.

~~$\forall x \in [1,+\infty[$, $\frac{\frac{\ln(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^2}}$~~

~~donc puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dt$ converge (Riemann $\alpha > 1$)~~

~~alors par comparaison sur des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \ln$~~

D'après la q 8b, on a f_2 une densité de Z et F_2 sa fonction de repartition.

Considérons $\int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} dx$ convergente car f_2 est une densité.

donc on a si on pose $A \in [1,+\infty[$,

$$\int_1^A \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} dx = \Big[F_2(x)\Big]_1^A$$

$$= \underbrace{F_2(A)}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 1} - F_2(1)$$

car fonction de repartition

~~et $F_2(1)$ ... (admis)~~

~~car $F_2(1) = \int^1 f_2(t) dt = \int^1 f_2(t) dt$~~

donc , on a bien $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge comme combinaison linéaire d'intégrale convergente et qui vaut $(\alpha-1)^2 \times (-F_2(1)+1)$

Exercice 3.

1) X compte le nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".
on a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P([X=k]) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \cap P_{k+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \times P(P_{k+1})$$ (indépendance des lancers)

$$= \prod_{i=1}^{k} P(F_i) \times p$$ (indépendance des lancers)

$$= \prod_{i=1}^{k} (1-p) \times p$$

$$\boxed{= (1-p)^{k} p}$$

on a donc $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ car $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$
$P([X+1=k]) = P([X=k-1])$
$= (1-p)^{k-1} p$

et $\boxed{X \hookrightarrow BN(p)}$

b) On a d'après Qa, $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

donc $E(X+1) = \frac{1}{p}$

donc $\boxed{E(X) = \frac{1}{p} - 1}$ (linéarité de l'espérance)

et $V(X+1) = \frac{q}{p^2}$

donc $\boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$

~~2) a~~

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) a — $\forall k \in \mathbb{N}$, $[Q = k]$ est réalisé signifie que

$X = 3k + R$ avec $R \in \{0,1,2\}$

et $X \in \mathbb{N}$

donc $\boxed{[Q=k] = [X = 3k+R]}$ avec R fixe.

b) ~~On se place dans le système complet d'évènements~~ $([R=i])_{i\in\{0,1,2\}}$

~~et on a d'après la formule des probabilités totales~~,

$$\cancel{P([X=3k+R]) = \sum_{i=0}^{2} P([R=i]) \times P_{[R=i]}([X=3k+R])}$$

$$\cancel{= P([R=1]) \times P_{[R=1]}([X=3k+1]) + P([R=2]) \times P_{[R=2]}([X=3k+2]) + P([R=0]) \times \underbrace{P_{[R=3]}([X=3k+0])}_{q^{3k}\times p}}$$

b) $\forall k \in \mathbb{N},\ P([Q=k]) = P([X=3k+R])$

$= P([X=3k+1] \cup [X=3k+2] \cup [X=3k+3])$

$= P([X=3k+1]) + P([X=3k+2]) + P([X=3k+3])$ par incompatibilité

$= (1-p)^{3k+1}p + (1-p)^{3k+2}p + (1-p)^{3k}p$

$= q^{3k}(qp + q^2p + p)$

$= q^{3k}p(q+q^2+1)$

$= q^{3k}p(1-p+1+q^2)$

$= q^{3k}(p-p^2+p+pq^2) = q^{3k}(2p-p^2+(1-q)q^2)$

$= q^{3k}(2p-p^2+q^2-q^3)$

et $2p-p^2+q^2 = 2p-(1-2q+q^2)+q^2 = 2p+2q-1 = 2(p+q)-1$

$= 2\times 1 - 1$

$= 1$

$= \cancel{P_{[X=3k]}([Q=k]) \times P([X=3k])}$

Finalement, on a bien

$P([Q=k]) = q^{3k}\times(1-q^3)$ et $Q(\Omega)=\mathbb{N}$.

donc $\boxed{Q \hookrightarrow BN(1-q^3)}$

3) $P([R=0]) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X=3k]\right)$

Posons $N\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} P([X=3k])$ (incompatibilité)

$= \sum_{k=0}^{N}(1-p)^{3k}q$

$= q\sum_{k=0}^{N}(1-p)^{3k}$ (linéarité de la somme)

$= q\times\sum_{k=0}^{N}((1-p)^3)^k$ $\quad (1-p)^3 \in [0,1[$

de somme $q \times \dfrac{1}{1-(1-p)^3}$ (somme de série géométrique convergente car $(1-p)^3 \in [0,1[$)

donc $P([R=0]) = \dfrac{q}{1-(1-2p+p^2)(1-p)}$

$= \dfrac{q}{\cancel{1-1+2}}$

$= \cancel{\dfrac{q}{1-(1+2p^2-p^3-2p-p+p^2)}}$

$= \cancel{\dfrac{q}{1-(1+3p^2-3p-p^3)}}$

$= \dfrac{q}{}$

$= \dfrac{1-p}{1-(1-2p+p^2)(1-p)}$

$= \dfrac{1}{2p-p^2}$

$= \dfrac{1}{2(1-q)-(1-q)^2}$

$= \dfrac{1}{2-2q-1+2q-q^2}$

$= \dfrac{1}{1-q^2}$ → erreur de calcul.

$P([R=1]) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=3k+1]\right)$

Posons $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} P([X=3k+1])$ (par incompatibilité des $[X=3k+1]$)

$$= \sum_{k=0}^{N} (1-p)^{3k+1} q$$

$$= pq \sum_{k=0}^{N} \left((1-p)^3\right)^k$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} pq \times \frac{1}{1-(1-q)^3}$$ (somme de série géométrique convergente car $(1-p)^3 \in]0,1[$

donc $P([R=1]) = pq \times \frac{1}{1-(1-q)^3}$

$$= \frac{q}{1-p^2}$$

$$= \frac{q}{(1-p)(1+p)}$$

$$= \frac{q}{q \times (1+1-q)}$$

$$= \frac{q}{q(2-q)}$$

$$= \frac{q}{2q-q^2} \longrightarrow \text{problème.}$$

Si on prend plutôt le système complet d'évènements $([X=3k])_{k \in \mathbb{N}}$ et que l'on pose d'après la formule des probabilités totales,

$$P([R=1]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{[X=3k]}(R=1) \times P([X=3k])$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P([Q=3k-1]) \times P([X=3k])$$

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 32	Session : 2023

Épreuve de : mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q^3)^{3k-1} \times (1-(1-q^3)) \times (1-q)^{3k} \times p$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q^3)^{3k-1} \times q^3 p (1-q)^{3k}$$

5) a) On a dit que $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ dans Q1 donc ici $X = $ rd.geometric(p)-1 simule X.

b)
```
def div(p):
    X=simulX(p)
    Q=   floor(X/3)
    R = X-Q
    return(X,Q,R)
```

Problème.

1) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $h(k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

donc $h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$

or le cosinus est 2π périodique

donc $\boxed{h(k+n) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$

$\boxed{h \in F_n}$.

2) • $F_n \subset E$ (définition)

* $0_E \in F_n$ car $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$, $f(k+n) = 0 = f(k)$
↪ notée f

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f, g) \in F_n^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$(\lambda f + g)(k+n) = \lambda f(k+n) + g(k+n)$ (linéarité de l'affectation)

$= \lambda f(k) + g(k)$ car f et g sont dans F_n

donc $\boxed{F_n \text{ sous espace vectoriel de } E}$.

3) $k = nq + r$ donc $f(k) = f(k+n)$ (énoncé)

donc $f(nq+r) = f(nq+r+n)$

$= f(n(q+1)+r)$

$= f(r + \underbrace{n(q+1)}_{\text{multiple de } n \text{ noté } N})$

$= f(r+N)$

3) (suite) $= f(r)$ si $N \in \mathbb{N}, N \geq 3$.

4) a) d'après la q3, on a $(q, r) \in \mathbb{Z} \times I_n$ tels que $k = nq + r$ et $f(k) = f(r)$.

donc si on fait varier r entre 0 et $n-1$ on a

$$f(k) = f(nq+r) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \times e_i(k).$$

b) $\forall k \in \mathbb{Z}$, si on prend $f \in F_n$, on a

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(k)$$

donc tout vecteur de F_n s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de B_n ; donc B_n génératrice de F_n.

B_n est une famille de n vecteurs non nuls et elle est génératrice de F_n, donc c'est une $\boxed{\text{base}}$.

c) $f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(k)$ et $e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\cancel{= \sum_{i=0}^{n-1} f}$$

$$\boxed{= f(k)\, e_k(k)}.$$

donc les coordonnées d'un élément quelconque de F_n dans B_n sont $(0, \ldots, 0, \underbrace{e_k(k)}_{=1}, \ldots, 0)$

5) a. $\forall (f,g) \in F_n^2$, $\langle f,g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,g(k)$

* $\langle . \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$

on pose $k \in$ ~~ℕ~~,

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g,h) \in F_n^3$,

$$\langle \lambda f + g, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(k)\, h(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\lambda \times f(k) + g(k)\big)\, h(k) \quad \text{(linéarité de l'affectation)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda f(k)\, h(k) + g(k)\, h(k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k)\, h(k) \quad \text{(linéarité de la somme)}$$

$$= \lambda \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$$

donc $\langle . \rangle$ est <u>linéaire à gauche</u>.

* $\forall (f,g) \in F_n^3$, $\langle f,g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,g(k)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(k)\, f(k)$$

$$= \langle g,f \rangle$$

donc $\langle . \rangle$ <u>symétrique</u>.

on conclut la <u>bilinéarité</u>.

* $\forall f \in F_n$, $\langle f,f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \times f(k)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(k)\big)^2 \geqslant 0 \quad \text{(somme de termes positifs)}$$

donc $\langle . \rangle$ <u>positif</u>.

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 32 | Session : 2023

Épreuve de : mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

* $\forall f \in F_n,\ \langle f,f\rangle = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-1} (f(k))^2 = 0$

$\iff (f(k))^2 = 0 \quad \forall k \in [\![0,n-1]\!]$ car somme de termes positifs

$\iff \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ f(k) = 0.$

$\iff f = 0$

donc $\langle . \rangle$ est défini.

Donc $\langle . \rangle$ est un produit scalaire.

b) $\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ \forall k \in \mathbb{Z},$

$\|e_i(k)\|^2 = \langle e_i(k), e_i(k)\rangle$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (e_i(k))^2$

$= (e_i(i))^2$

$= 1$ donc $\|e_i(k)\| = 1.$

De plus $\forall j \in [\![0,n-1]\!],$

$\langle e_i(k), e_j(k)\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)\, e_j(k)$

$= \underbrace{e_i(i)}_{=1} \times 0 + 0 \times \underbrace{e_j(j)}_{=1}$

$\boxed{=0}$

donc $\mathcal{B}_n$ est une base orthogonale de n vecteurs tous de norme 1, donc une $\boxed{\text{base orthonormale pour } \langle \cdot \rangle}$

5) c. $\cos(a+kb) = \dfrac{\sin\left(a+\frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{(2k-1)b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

(d'après la relation donnée)

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(a+\frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{(2k-1)b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\times\frac{4k\pi}{n}}{2}\right) - \sin\left(-\frac{4k\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right)}$

$$= \frac{\sin\left(4k\pi - \frac{4k\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4k\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{4k\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right)}$$ car le sinus est 2π périodique

$$= \frac{-\sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{4k\pi}{2n}\right)}$$ car le sinus est impaire

$\boxed{= 0}$

e) $\|h(k)\|^2 = \|\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\|^2$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{2\times 2k\pi}{n}\right)+1}{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\times 0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}$$ (linéarité de la somme et qd)

$$= \frac{1}{2}\times n$$

$$= \frac{n}{2}$$ donc $\boxed{\|h(k)\| = \sqrt{\frac{n}{2}}}$ car la norme est positive.

6) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Df(k) = f(k+1) - f(k)$

donc $Df(k+n) = f(k+n+1) - f(k+n)$

$$= f((k+1)+n) - f(k+n)$$

$$\boxed{= f(k+1) - f(k)}$$ car $f \in F_n$.

donc $\boxed{Df \in F_n}$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in F_n^2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$D(\lambda f+g) = (\lambda f+g)(k+1) - (\lambda f+g)(k)$$

$$= \lambda f(k+1) + g(k+1) - \lambda f(k) + g(k)$$

par linéarité de l'affectation

$$= \lambda D(f) + D(g)$$

donc $\boxed{D \in \mathcal{L}(F_n)}$.

c) $Dh(k) = h(k+1) - h(k)$

$$= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d) $\|Dh\|^2 = \langle Dh, Dh\rangle$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (Dh(k))^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(-2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

7) Δ est à valeurs dans F_n car $f \in F_n$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in F_n^2,$

$$\forall k \in \mathbb{Z},\quad \Delta(\lambda f+g)(k) = (\lambda f+g)(k+1) - 2\times(\lambda f+g)(k) + (\lambda f+g)(k-1)$$

$$= \lambda f(k+1) + g(k+1) - 2\lambda f(k) - 2g(k) + \lambda f(k-1) + g(k-1)$$

(linéarité de l'affectation)

$$= \lambda(f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)) + g(k+1) - 2g(k) + g(k-1) = \lambda\Delta(f)(k) + \Delta g(k)$$

donc $\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(F_n)}$.

7) a. $\forall (f,g) \in F_n^2,$

$$\langle f, \Delta g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\Delta g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\left(g(k+1) - 2f(k) + f(k-1)\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 628268

7) a (suite) $\langle f, \Delta g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-Df(k) + f(k+1)\right)\left(g(k+1) - \cancel{2}f(k) + f(k) + f(k-1)\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-Df(k) + f(k+1)\right)\left(Dg(k) + f(k) - f(k-1)\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k+1) - Df(k)\right)\left(Dg(k) + Dg(k-1)\right)$

$= -\sum_{k=0}^{n-1} \left(Df(k)Dg(k) - Dg(k-1)f(k+1) - f(k+1)Dg(k) + Df(k)Dg(k-1)\right)$

b) Δ est symétrique $\Leftrightarrow$ $\forall (f,g) \in F_n^2$,

$\langle f, \Delta g\rangle = \langle \Delta f, g\rangle$

or $\langle f, \Delta g\rangle = -\langle Df, Dg\rangle$ (q7a)

donc $\langle \Delta f, g\rangle = \langle g, \Delta f\rangle$ (symétrie du produit scalaire)

$= -\langle Dg, Df\rangle$

donc $\langle \Delta f, g\rangle = \langle f, \Delta g\rangle$

donc $\boxed{\Delta \text{ symétrique}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Supposons λ valeur propre de Δ,
$\exists f \in F_n, f \neq 0_{F_n},$

$$\Delta f = \lambda f$$

donc $\langle \Delta f, f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle = \lambda \|f\|^2$ (bilinéarité du produit scalaire)

et $\langle \Delta f, f \rangle = -\langle Df, Df \rangle$ (Q7a)

$$= -\|Df\|^2$$

donc $\lambda \|f\|^2 = -\|Df\|^2$

or $\|f\|^2 \geqslant 0$ (norme positive
$\|Df\|^2 \geqslant 0$ et carré positif)

donc $-\|Df\|^2 \leq 0$ donc $\boxed{\lambda \leq 0}$.

8) a - Soit ε_0 l'application constante égale à 1,

$\forall k \in \mathbb{Z}, \Delta \varepsilon_0(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1)$

$$= 1 - 2 + 1$$

$$= 0$$

donc $\boxed{\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)}$.

b) Soit $f \in F_n$,

$f \in \mathrm{Ker}(\Delta) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \Delta f(k) = 0$

$\Rightarrow \langle \Delta f(k), f(k) \rangle = 0$
$\Rightarrow \langle Df(k), Df(k) \rangle = 0$
$\Rightarrow \|Df(k)\|^2 = 0$
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, Df(k) = 0$ (définition du produit scalaire)

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+1) = f(k)$
$\Rightarrow$ ~~$f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = f(k+1) - f(k+1) + f(k) - f(k)$~~
$\Rightarrow f$ constante
$\Rightarrow f \in \mathrm{vect}(\varepsilon_0)$

d'autre part, on a $vect(\mathcal{E}_0) \subset Ker(\Delta)$ car $\mathcal{E}_0 \in Ker(\Delta)$ (q8a)

Donc on a $vect(\mathcal{E}_0) \supset Ker(\Delta)$ d'après la démonstration précédente

donc on conclue $\boxed{Ker(\Delta) = vect(\mathcal{E}_0)}$

9) Δ est symétrique (q7b) donc Δ est diagonalisable donc Ainsi il existe une base orthonormale de F_n, formée uniquement de vecteurs propres de Δ ~~dans laquelle la matrice de Δ est semblable~~

or g est un vecteur propre de $\Delta \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\Delta(g) = \lambda g$$

$$\text{donc } \forall k \in \mathbb{Z},\ g(k+1) - 2g(k) + g(k-1) = \lambda g(k)$$

$$\text{ie } g(k+1) + g(k-1) = (\lambda+2) g(k)$$

si on admet que $(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1})$ est une base orthonormale de F_n,

alors $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $\forall f \in F_n$,

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathcal{E}_i}$$

(décomposition du vecteur dans la base).

b)

$$\|f\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathcal{E}_i, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \mathcal{E}_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i \alpha_j \langle \mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j \rangle \quad \text{(bilinéarité de } \langle\cdot\rangle)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i \alpha_j \langle \mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j \rangle \quad \text{car } (\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{n-1}) \text{ orthonormale}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i \alpha_j$$

10) a – la première colonne de A est la décomposition de $\Delta(e_0)$ dans (e_0, e_1, e_2)

$\forall k \in \mathbb{Z},\ \Delta(e_0(k)) = e_0(k+1) - 2e_0(k) + e_0(k+1)$

si $k=1$, on a $\Delta(e_0(0)) = e_0(1) - 2e_0(0) + e_0(1)$

b) $A = -2I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$ (I_3 et N commutent)

on veut aX^2+bX+c tel que $aA^2+bA+c=0$

or $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

donc $A^2 = -3A$

donc $A^2 - 3A = 0_{M_3}$ donc $\boxed{X^2+3X}$ est un polynôme annulateur de A.

les seules valeurs propres possibles pour A sont les racines du polynôme ie $\underline{0 \text{ et } -3}$.

or $Rg(A) = Rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3+L_1 \end{matrix}$

$= Rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \leftarrow L_3+L_2$

$= Rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3$

donc $\underline{0 \text{ est valeur propre de } A}$.

$Rg(A+3I_3) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=1 < 3$ car les colonnes sont proportionnelles

donc $\underline{-3 \text{ est valeur propre de } A}$

$\boxed{Sp(A) = \{0, -3\}}$.

On a donc $\|Df\|^2 \geq |-3| \times \|f\|^2$ (9b)

ie $\boxed{\|Df\|^2 \geq 3\|f\|^2}$.