Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

A5-00007
404309
Maths E

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 5}}$

se construit telle que $a_{ij} = 1$ pour $j \in [\![1;5]\!]$, $i \in [\![1;5]\!]$ ssi

$i-1$ et $j-1$ deux sommets adjacents.

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2)a) Les chaînes $\{2;1;0;3\}$; $\{3;4;3;2\}$; $\{3;0;3;2\}$

et $\{2;1;2;3\}$ sont les chaînes de longueur 3 reliant

2 à 3. Il y en a 4.

b)
```
B = f(A, 3)
n = B[2;3]
print(n)
```

3) a) D'après le graphe,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Comme d'après ce qui précède, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

on vérifie en effet que $\boxed{D - A = L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

c) $\boxed{\text{L est symétrique donc L est diagonalisable.}}$

4) a) ${}^tX L X$, étant le produit matriciel d'une matrice colonne LX et d'une matrice ligne ${}^tX$, est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et la quantité <u>${}^tXLX$ appartient à l'ensemble des réels (soit $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$).</u>

b) D'abord,

$$LX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$$

Ensuite, ${}^tX L X = (a \ b \ c \ d \ e) \, LX$

$\iff {}^tXLX = 2a^2 - ba - da - ab + 2b^2 - cb - bc + 2c^2 - dc - ad - cd + 3d^2 - ed - ed + e^2$

$\iff {}^tXLX = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2dc + d^2 + e^2 - 2ed + d^2 + d^2 - 2ad + a^2$

$\iff {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (e-d)^2 + (d-a)^2$

$\iff \boxed{{}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2}$

c) Si X vecteur propre de L associé à une valeur propre λ, alors :

$$LX = \lambda X$$

$\iff {}^tX L X = \lambda \, {}^tX X$.

$\iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 = \lambda \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \right)$

Aussi, si cela est vrai, comme $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geqslant 0$

et ${}^tXLX \geqslant 0$, λ ne peut être négatif.

Enfin, les valeurs propres de L sont donc positives ou nulles.

d) Par produit matriciel, en sommant les coefficient ligne par ligne, il vient :

$$LU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times U.$$

Or U n'est pas le vecteur nul et $LU = 0 \times U$ donc

U vecteur propre associé à la valeur propre 0 de L et

ainsi, $\lambda_1 = 0$

5) a) Montrons que L est de rang 4, afin de montrer, d'après le Théorème du rang, que $\dim(\ker(L)) = 1$ et donc que
$LX = 0 \iff \cancel{X} \in \mathrm{Vect}(U)$ car U vecteur de $\ker(L)$ de dimension 1 donc base de $\ker(L)$.

D'abord :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $rg(L) \leq 4$.

Montrons désormais que $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ scalaires,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ - \quad -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_4 = \lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Ainsi, $rg(L) = 4$ car quatre de ses colonnes sont libres et 1 liées. Dès lors $\dim(\ker(L)) = 1$ et $LX = 0 \Leftrightarrow X \in Vect(U)$ car U base de $\ker(L)$.

b) L étant diagonalisable, et $E_0(L) = \text{Vect}(U)$,

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 sont nécessairement différents de

0 car deux les $(\lambda_i)_{i \in [\![1;5]\!]}$ sont égaux ssi ils sont

associé au même espace propre de dimension au moins 2.

La multiplicité de 0 est de 1 car $\dim(E_0(L)) = 1$.

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 sont donc strictement positifs car différents de 0 et positifs d'après 4). c).

Exercice 2 :

1. D'après la seconde inégalité des accroissements finis, pour toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq K \text{ avec } K \in]0;1[,$$

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|}$

2) D'après (1), $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$

Autrement dit, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, Veuillez m'excuser, j'ai oublié cette page.

IDEM

(Suite exercice 2 ⟶)

$\forall \alpha > 0, \forall y \in]x-\alpha; x+\alpha[, \exists \varepsilon > 0, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ avec

$\varepsilon = K|x-y|$.

Dès lors, d'après la définition de la limite finie à gauche et à droite en un point, $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$

3) Supposons que $f(x) = x$ admette 2 solution au moins, x' et y' appartenant à $\mathbb{R}$, avec $x' \neq y'$.

On aurait alors d'après $(\ast)$:

$$|f(x') - f(y')| \leq K|x' - y'|$$

$$\Leftrightarrow \quad |x' - y'| \leq K|x' - y'|$$

Or $K \in]0;1[$, donc

$$|x'-y'| > K|x'-y'|$$

Ceci est absurde. On a $x' = y'$ et $\underline{f(x) = x \text{ admet au plus une solution}}$!

4) Soit $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$ » est vraie.

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 0$, l'initialisation est immédiate car

$$|u_1 - u_0| \leq K^0 |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0|$$

La propriété est initialisée.

<u>Hérédité :</u>

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$.

On a l'hypothèse de récurrence suivante :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$$

Or, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K |u_{n+1} - u_n|$

étant donné que $u_{n+2} = f(u_{n+1})$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

et que f est K-contractante.

Donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$

d'après l'hypothèse de récurrence.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n |u_1 - u_0|$

b) Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} |u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_1 - u_0| \sum_{n=0}^{N} K^n$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} K^n = \frac{1}{1-K}$ car $K \in]0;1[$

Donc, par comparaison à une série convergente, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge absolument d'après ce qui précède.

Enfin, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Ainsi, comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n$ converge, par télescopage, $u_0 - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe car la série est convergente

telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente.

c) Par unicité de la limite, et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad a = f(a) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} u_n = a \text{ et } f(u_n) = u_{n+1}.$$

De plus, on avait montré que $f(x)=x$ admettait au plus 1 solution. a est solution de l'équation.

Il vient que $f(x)=x$ admet une unique solution.

5) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall p \geq 1, \ \forall i \in [\![n ; n+p-1]\!]$,

$$|u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0| \quad \text{d'après 4)a)}$$

D'où $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$

en sommant car l'inégalité est respectée pour chaque termes.

b) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i\right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|$$

$$\Longleftrightarrow \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \quad \text{par Télescopage.}$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \times K^n \times \frac{1 - K^{n+p-1-n+1}}{1-K}$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Enfin, $\boxed{|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} |u_1 - u_0|}$

c) Aussi, lorsque p tend vers $+\infty$, comme $K \in]0;1[$ et $\lim_{p \to +\infty} u_{n+p} = a$, il vient par opération sur les limites :

$$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |u_1 - u_0|$$

6) $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

a) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ quotient de dénominateur non-nul de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = \frac{-e^t(1+e^t)^2 + 2e^{2t}(1+e^t)}{(1+e^t)^4}$

$$= \frac{-e^t(1+e^t) + 2e^{2t}}{(1+e^t)^3} = \frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}$$

b) On a donc $\forall t < 0,\ f''(t) < 0$

et $\forall t > 0,\ f''(t) > 0$.

Il vient le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Var f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

$f'(0) = -\frac{1}{4}$ et

par opération sur les limites, $\lim\limits_{t \to -\infty} f'(t) = 0$

et $f'(t) = \dfrac{-e^t}{(1+e^t)^2} = -\dfrac{e^t}{e^{2t}+2e^t+1}$

$= -\dfrac{1}{e^t + 2 + \frac{1}{e^t}}$

Donc $\lim\limits_{t \to -\infty} f'(t) = 0$

Enfin, d'après ce qui précède,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \left| f'(t) \right| \leqslant \frac{1}{4}}$$

c) f est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'inégalité des accroissements finis avec un majorant de $\frac{1}{4}$

Ainsi, d'après ce qui précède, $\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4}\text{-contractante.}}$

d) Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

La suite est convergente d'après la question 4)b).

En effet, $u_0 = 0 \in \mathbb{R}_+$, f est $\frac{1}{4}$-contractante et

$u_{n+1} = f(u_n)$.

Ainsi, en passant du cas général au cas particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient toutes les conditions à sa convergence prouvée en 4)b), $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente.}}$

e)
```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

f) D'après la 5.)c), dans ce cas, on a :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \left|\frac{1}{2} - 0\right|$$

$$\Leftrightarrow |a - u_n| \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Or $0 < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{3 \times 4^n}{2} \geqslant 1000$

strict.

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \quad 4^n \geqslant \frac{2000}{3}$

En effet, u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant \frac{2000}{3}$.

g)

```
n = 0
while 4**(n) < 2000/3 :
    n = n + 1
print( suite (n))
```

Exercice 3 :

Soient a et b et $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

1) a) Si $a = b$, A étant triangulaire supérieure et ses valeurs propres étant ses coefficients diagonaux, on a A qui n'admet qu'une seule valeur propre $a\ (= b)$.

b) Si $a = b$ et A diagonalisable, il existe P inversible et $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ telle que

$$A = P D P^{-1}.$$

Or $D = a I_2$ avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $A = a P I_2 P^{-1} = a I_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ce qui est absurde. Si $a = a$, A non diagonalisable.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) Supposons $a \neq b$.

a) A étant triangulaire supérieure, les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux a et b.

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\b^2-ab\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$

Pour $a \neq b$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres a et b

car $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ non nuls et

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$$

c) Comme $b \neq a$, $b-a \neq 0$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ non colinéaires. Dès lors, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

Ainsi, $\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$

d) Pour $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,

on a : $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^2 - ab \end{pmatrix}$

et $AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^2 - ab \end{pmatrix}$

Donc, pour $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\boxed{AP = PD}$

P est inversible car matrice de passage donc

$$AP = PD \iff A = PDP^{-1}$$

Ainsi, D étant diagonale et P inversible, $\boxed{\text{A est diagonalisable.}}$

3) Soit X et Y indépendantes telles que

$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X=n] \cap [Y=n])$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$$ par indépendance de X et Y.

b) $$P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

4) a) $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable ssi $X=Y$ d'après tout ce qui précède.

Ainsi, $p = \frac{1}{3}$ est la probabilité que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.

b) Pour de grandes valeurs de n, $[X = Y]$ se réalise assez de fois pour que la variable i soit proche de $\frac{2}{3}$.

Problème :

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité.

Soit $c > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1) f est positive sur $\mathbb{R}$. De plus f continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.

On a $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt = 0$ car f s'annule sur $]-\infty ; 1[$.

D'autre part,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}}\,dx = c \times \frac{1}{1+c-1} = 1$$

comme intégrale de Riemann avec $c > 0$ et $1+c > 1$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Enfin, f peut être considéré comme une densité de probabilité.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 28 **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

2) $\forall x \in]-\infty ; 1[, \quad F(x) = 0$

$\forall x \in [1 ; +\infty[, \quad F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{t^c} \right]_1^x$

Ainsi, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^c} \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$

3) Pour $t \geq 1$.

a) Pour $x \geq 1$,

$$P_{[X>t]}(X \leq tx) = \frac{P([X>t] \cap [X \leq tx])}{P(X > t)}$$

$$= \frac{P(t < X \leq tx)}{1 - P(X \leq t)}$$

$$= \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$$

Pour $x < 1$, comme $t > 0$,

$t > tx$ donc $\boxed{P_{[X>t]}(X \leq tx) = 0}$.

b) Ainsi, pour $x \geq 1$,

$$P_{[X>t]}(X \leq tx) = P_{[X>t]}\left(\frac{X}{t} \leq x\right)$$

$$= \frac{P(t < X \leq tx)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{P\left(1 < \frac{X}{t} \leq x\right)}{P\left(\frac{X}{t} > 1\right)}$$

Or $P\left(\frac{X}{t} > 1\right)$ sachant $X > t$ est égale à 1.

et ainsi, $\forall x \geq 1$, $P_{[X>t]}(X \leq tx) = P\left(1 < \frac{X}{t} \leq x\right)$

$$= \int_0^x f(t)\,dt$$

et $\forall x < 1$, $P_{[X>t]}(X \leq tx) = 0$.

$\frac{X}{t}$ conditionnellement à $[X > t]$ suit la loi de X.

Partie 2 : Réciproque de la propriété précédente.

4) Y étant à densité,

$$\underline{G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt = 0}$$ car g nulle sur $]-\infty;1[$.

5) a) On a $P(Y>t)>0$ pour $t>1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{[Y>t]}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) = P(Y \leq x).$$

D'où, $\forall x \geq 1$, $\forall t > 1$,

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P_{[Y>t]}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) \\ &= \frac{P\left(\left[\frac{Y}{t} \leq x\right] \cap [Y>t]\right)}{P(Y>t)} \\ &= \frac{P(x < Y \leq tx)}{1 - P(Y \leq t)} \\ &= \boxed{\frac{G(tx) - G(x)}{1 - G(t)}} \end{aligned}$$

b) Par régularité de la fonction de répartition, G est $\mathcal{C}^1$ partout où g est continue.
En particulier, g continue sur $]1;+\infty[$ donc

$$\underline{G\ \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1;+\infty[.}$$

(g n'est pas continue en 1 donc G non $\mathcal{C}^1$ en 1)

Ainsi,

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{1}{1 - G(t)} \times tG'(tx)$$

$$\iff \boxed{G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}}$$

c) Lorsque x tend vers 1 à droite,

comme $G'(x) = \frac{c}{x^{1+c}}$ pour $x > 1$,

On a $\forall t > 1$, $c = \dfrac{tG'(t)}{1 - G(t)}$

$$\iff c(1 - G(t)) = tG'(t)$$

$$\iff c = tG'(t) + cG(t)$$

$$\iff \boxed{1 = \frac{t}{c}G'(t) + G(t)}$$

6) a) y solution de (E_1) avec $t \in]1; +\infty[$

ssi $y + \dfrac{t}{c}y' = 0$ avec $y(t) = \dfrac{z(t)}{t^c}$

On a $y'(t) = \dfrac{z'(t)t^c - cz(t)t^{c-1}}{{t^c}^2}$

$$= \frac{z'(t)t - cz(t)}{t^{c+1}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z(t)}{t^c} + \frac{t}{c}\,\frac{z'(t) - c\,z(t)}{t^{c+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z(t)}{t^c} - \frac{z(t)}{t^c} + \frac{z'(t)}{c\,t^c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'(t)}{c\,t^c} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \forall t \in]1;+\infty[,\ z'(t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad y$ solution de (E_1) avec $z(t) = t^c g(t)$ ssi

z est constante sur $]1;+\infty[$.

b) $\forall t \in]1;+\infty[, \quad K = t^c y(t)$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{K}{t^c}$$

Ainsi, pour K constante réelle, toutes les solutions y de (E_1) sont de la forme, avec c paramètre :

$$y : t \longmapsto \frac{K}{t^c}.$$

c) $u : t \longmapsto 1$ est constante sur $]1;+\infty[$

telle que $\forall t \in]1;+\infty[$, $u'(t) = 0$

et que $\forall t \in]1;+\infty[$, $u(t) + \frac{t}{c} u'(t) = 1$

d) Si h solution de (E_2),

$\forall t \in]1;+\infty[$, $h(t) + \frac{t}{c} h(t) = 1$

$\Leftrightarrow$ $h(t) - u(t) + \frac{t}{c} h'(t) - \frac{t}{c} u'(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ $h - u$ solution de (E_1) car u constante

égale à 1 sur $]1;+\infty[$.

Réciproquement, si $h - u$ solution de E_2,

$\forall t \in]1;+\infty[$, $(h-u)t + \frac{t}{c}(h-u)'(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ $h(t) - 1 + \frac{t}{c} h'(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ $h(t) + \frac{t}{c} h'(t) = 1$

$\Leftrightarrow$ h solution de (E_2)

Enfin, l'équivalence est démontrée.

e) D'après ce qui précède, pour h solution de (E_2), $h - 0$ solution de (E_1)

donc $\forall t > 1$, $(h - 0)(t) = \frac{K}{t^c}$

$\iff \forall t > 1, \; h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$

7) a) G est solution de (E_2) donc

$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Or, $G(1) = 0$ donc $K = -1$.

Dès lors, $\forall t > 1, \; G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$.

b) On retrouve bien $G(1) = 0$ lorsque $t \to 1$ et ainsi la relation s'étend à $[1; +\infty[$.

Y suit donc la loi de Pareto de paramètre c.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto :

8) $Z = \ln(X)$

a) $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$ car $X(\Omega) = [1 ; +\infty[$

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{R}_+$, $P(Z \leq z) = P(\ln(X) \leq z)$

$\Leftrightarrow P(Z \leq z) = P(X \leq e^z)$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{P(Z \leq z) = F(e^z)}$ $\left(\forall z \in \mathbb{R}_-^*, P(Z \leq z) = 0\right)$

b) $\forall z \in \mathbb{R}_+$, $P(Z \leq z) = F(e^z)$

$$= 1 - \frac{1}{(e^z)^c}$$

$$= \boxed{1 - e^{-cz}}$$

Z suit donc une loi exponentielle de paramètre c.

c)
```
def simulX(c):
    Z = rd.exponential(c)
    return(np.exp(Z)).
```