

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

MA-00086
812639
Maths 2E



Code épreuve : 287

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées - ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I -

1. $\forall (t, h) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\{ (X_t = i), 1 \leq i \leq n \}$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall j \in \{1, n\}, P(X_{t+h} = j) = \sum_{i=1}^n P([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])$$

2. Comme $(X_{t+h} = j), 1 \leq j \leq n$ forme un système complet d'événements sachant $(X_t = i)$ réalisé alors on a bien :

$$\sum_{j=1}^n P_{[X_t = i]}(X_{t+h} = j) = 1 \quad \forall i \in \{1, n\}, \forall t \in S_i, \forall h \in \mathbb{R}_+$$

Comme $1 = 1 + \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) h + o(h)$ alors on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (a_{ij}) h = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$$

3.

a) On admet 3. a)

b) D'après 3. a)

$$P(X_{t+h} = j) = P(X_t = j) + \sum_{i=1}^n (a_{ij} h + o(h)) P(X_t = i)$$

$$\text{Donc } f_j(t+h) = f_j(t) + \sum_{i=1}^n (a_{ij} h + o(h)) f_i(t)$$

$$\Leftrightarrow f_j(t+h) - f_j(t) = \sum_{i=1}^n (a_{ij} h + o(h)) f_i(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \sum_{i=1}^n (a_{ij}) f_i(t) + o(1)$$

$$\text{On en déduit que } f_j'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} =$$

$$\Leftrightarrow f_j'(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) a_{ij}$$

$$c) Z'(t) = (f_1'(t) \dots f_j'(t) \dots f_n'(t))$$

Et d'après 3. b), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f' &= \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) a_{i1} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^n f_i(t) a_{im} \right) \\ &= \left(f_1(t) \quad \dots \quad f_n(t) \right) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\mathcal{L}_f' = \mathcal{L}_f G}$$

Veuillez fermer la page s'il vous plaît

4. La loi uniforme U_T admet une espérance donc d'après le théorème du transfert, $E(Z_i, T)$ existe et :

$$E(Z_i, T) = \int_0^T f_i(t) \times \frac{1}{T} dt \quad \text{car pour tout } t \in [0, T] \text{ une densité de } U_T \text{ vaut } \frac{1}{T} \text{ et } 0 \text{ si } t \notin [0, T]$$

$$e_i(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) dt$$

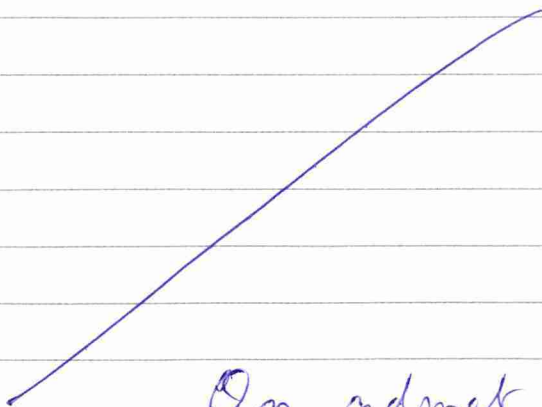
5.

a) Notons (1): $y' + (a+b)y = b$

D'après 3.c), $L_{f'} = L_f \cdot G$

$$\Leftrightarrow (f_1'(t) \ f_2'(t)) = (f_1(t) \ f_2(t)) \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1'(t) = \\ f_2'(t) = \end{cases}$$



On admet 5.a)

b) Une solution de l'équation homogène associée à (1) est une fonction de la forme $t \mapsto e^{-(a+b)t}$, $a \in \mathbb{R}$.

De plus une solution particulière de (1) est une solution

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées - ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

constante $t \mapsto \frac{b}{a+b} = p$

Donc l'ensemble des solutions de (1) sont les fonctions de la forme :

$$y: t \mapsto d e^{-(a+b)t} + p$$

On d'après 5.a) f_1 vérifie 1.

On admet 5.b)

c) D'après 5.b), $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = p$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} (p + (a-p)e^{-(a+b)t}) = p$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+b)t} = 0$ car $-(a+b) < 0$
 $a > 0, b > 0$

$$d) \lim_{T \rightarrow +\infty} e_n(T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) dt \right)$$

$$\begin{aligned} \text{On } \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^{+\infty} p + (a-p)e^{-(a+b)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\left[pt - \frac{(a-p)}{(a+b)} e^{-(a+b)t} \right]_0^T \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(Tp - \frac{(a-p)}{a+b} e^{-(a+b)T} + \frac{(a-p)}{a+b} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Pense } \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) dt \right) = p$$

$$\underline{\lim e_n = p}$$

page suivante svp

6.

a) $\lambda \in \text{Sp}(G) \Leftrightarrow G - \lambda I_3$ non inversible.

• Donc $-\frac{1}{6} \in \text{Sp}(G)$ car $G + \frac{1}{6} I_3 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{5}{30} I_3$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque donc que la première et deuxième colonne sont égales donc $(G + \frac{1}{6} I_3)$ n'est pas inversible.

• De même $-\frac{1}{10} \in \text{Sp}(G)$ car

$$G + \frac{1}{10} I_3 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible étant donné}$$

que $c_1 + c_3 = 2c_2$

• Et $0 \in G$ car G n'est pas inversible, en effet la colonne 1 additionnée à la colonne 3 de G donne un multiple de la colonne 2 de G .

$$\underline{\text{Sp}(G) = \left\{ -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, 0 \right\}}$$

b) • Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$GU = 0 \cdot U$, et comme $U \neq 0$, et que 0 est valeur propre de G , alors U est un vecteur propre de G associé à la valeur propre 0.

• Notons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$GV = -\frac{1}{10} V$, donc V est un vecteur propre de

de G associé à la valeur propre $-\frac{1}{10}$.

Finalement, notons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$

Comme $GW = -\frac{1}{6}W$, W est un vecteur propre de G associé à la valeur propre $-\frac{1}{6}$.

(U, V, W) forme une base de $\mathbb{R}_3(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de G , car :

(i) $U \neq 0, U \in E_0$, avec $E_0 = \{X \in \mathbb{R}_3(\mathbb{R}) \mid GX=0\}$
 $V \neq 0, V \in E_{-\frac{1}{10}}$
 $W \neq 0, W \in E_{-\frac{1}{6}}$

(ii) Comme $\text{card}(U, V, W) = 3 = \dim(\mathbb{R}_3(\mathbb{R}))$, la famille (U, V, W) étant libre, (U, V, W) forme une base de $\mathbb{R}_3(\mathbb{R})$.

G est donc diagonalisable, il existe donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \text{ inversible et}$$

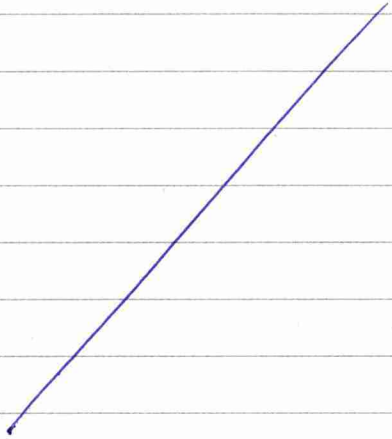
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

tel que $G = PDP^{-1}$

$$c) {}^t P P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées - ESSEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			



d) $\forall t \geq 0, P^{-1}C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

Notons $Y_t = P^{-1}C_t$ et $Y_t' = P^{-1}C_t'$

Ainsi $C_t' = GC_t \Leftrightarrow C_t' = PDP^{-1}C_t$ d'après 6b)

$\Leftrightarrow P^{-1}C_t' = DP^{-1}C_t$

$\Leftrightarrow Y_t' = DY_t$

Donc $C_t' = GC_t \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = 0 y_1(t) \\ y_2'(t) = -\frac{1}{6} y_2(t) \\ y_3'(t) = -\frac{10}{6} y_3(t) \end{cases}$

3/28

e) L'équation $y_1'(t) = 0 \Leftrightarrow y_1(t) = \alpha, \alpha = y_1(0)$

• L'équation $y_2'(t) = -\frac{1}{10} y_2(t)$ admet comme solution l'ensemble des fonctions de la forme :
 $t \mapsto \beta e^{-\frac{1}{10}t}$, avec $\beta = y_2(0)$

• L'équation $y_3'(t) = -\frac{1}{6} y_3(t)$ admet comme solution l'ensemble des fonctions de la forme :
 $t \mapsto \gamma e^{-\frac{1}{6}t}$, $\gamma \in y_3(0)$

Perc $Y_t = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) = P^{-1}C_0$

On comme $Y_t = P^{-1}C_t \Leftrightarrow C_t = P Y_t$

Perc $C_t = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0$

Perc $C_t = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \\ \alpha - 2\beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} - \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$

On $C_t = {}^t L_t$

El $L_t = (P(X_t=1) \ P(X_t=2) \ P(X_t=3))$

On $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t=1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t}) = \alpha$

Car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{10}t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{6}t} = 0$ par composition

De même $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = 2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = 3) = \alpha$

~~On a comme $P(X_t = 1) + P(X_t = 2) + P(X_t = 3) = 1$~~

On a $\alpha = \frac{1}{3}$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} L_T = (\alpha \ \alpha \ \alpha)$

Et $\alpha + \alpha + \alpha = 1$ donc $3\alpha = 1$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$

7. admise

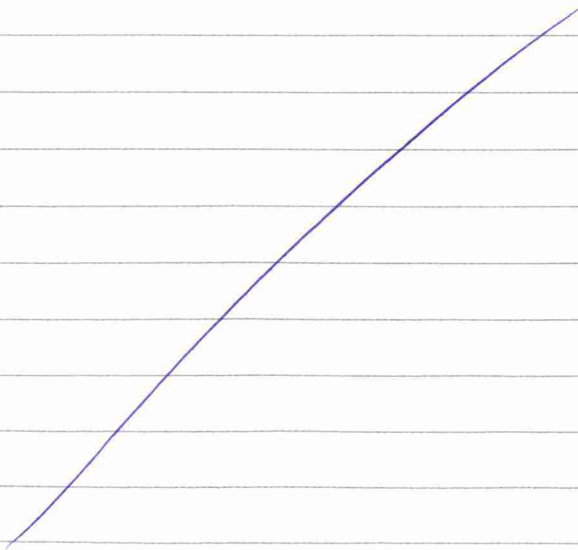
Partie II —

8.

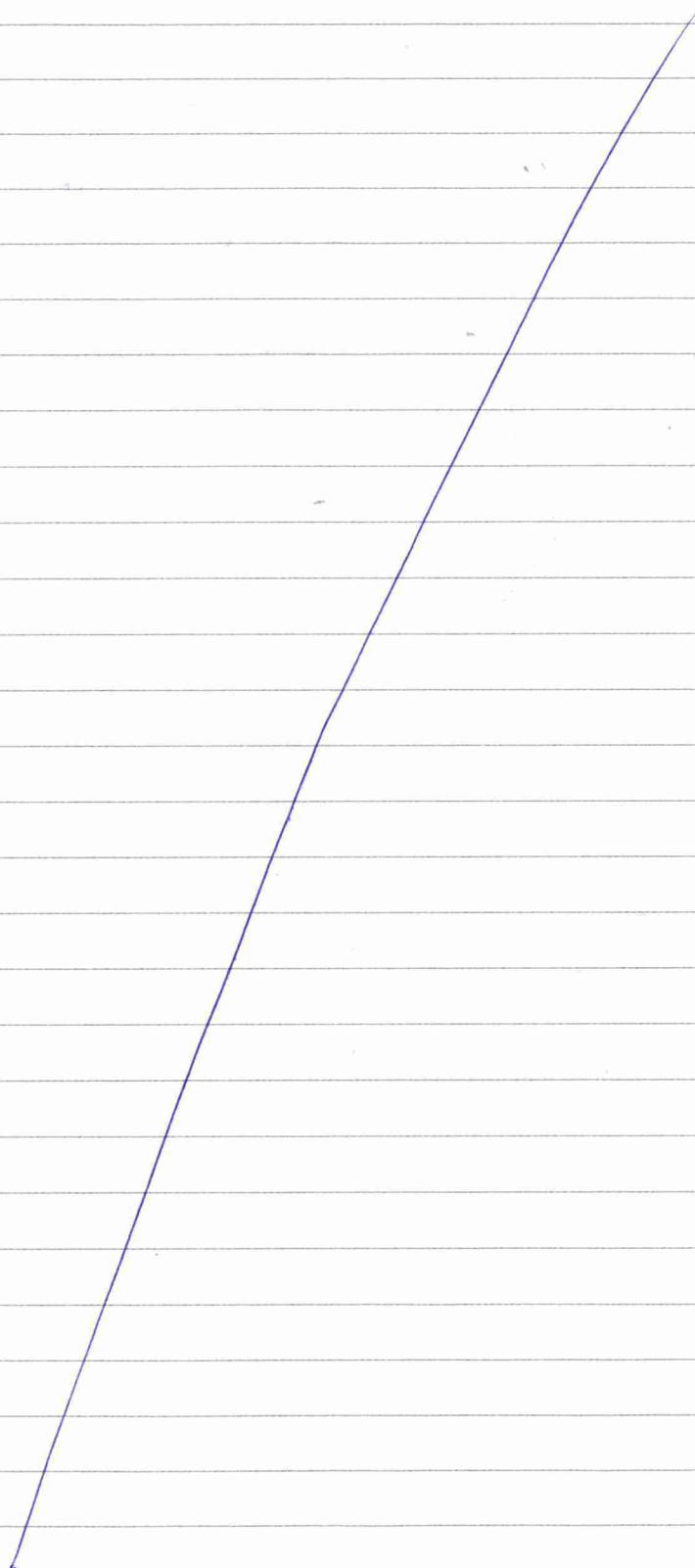
a) D'après le cours, $\forall s \geq 0$, $L_s = L_0 P(s)$

où L_s est la matrice d'état à l'instant s .

b)



Veuillez fermer la page svp



Stimulez l'annee de perge au p

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées - ESSEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

d) On cherche à montrer par récurrence que la propriété " $\Pi(ht) = (\Pi(t))^h$ " est vraie pour tout $h \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

* $\Pi(1 \times t) = \Pi(t) = (\Pi(t))^1$
la propriété est vraie pour $h = 1$

* Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $h \geq 1$, montrons alors que $\Pi((h+1)t) = (\Pi(t))^{h+1}$.

Par hypothèse : $\Pi(ht) = (\Pi(t))^h$

Donc $\Pi(ht) \times \Pi(t) = (\Pi(t))^h \times \Pi(t)$

On d'après 8.c), $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0, \Pi(s)\Pi(t) = \Pi(s+t)$

Donc $\Pi(ht+t) = (\Pi(t))^{h+1}$

Donc $\Pi((h+1)t) = (\Pi(t))^{h+1}$

* $\forall h \geq 1, \Pi(ht) = (\Pi(t))^h, \forall t \in \mathbb{R}_+$

g.

a) admise

b) admise

13/20

c) On remarque que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = i) = \frac{1}{3}$
 car le graphique représente la convergence de $t \rightarrow \infty$
 la loi G (définie à la q6.I) par $n = 100$.
 Le graphique est donc cohérent avec l'état stable
 trouvé à la question 6 de la partie I

d)
 def simul $X(k, h, LO, G)$:

...

```

s = 0
j = 0
while p >
    j + 1 = 1
    s + = LO[j]
Lk =

```

...

Partie III -

10.

a) On cherche à montrer par récurrence que la propriété " $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1} G$ " est vraie pour tout $i \geq 1$.

$$\star G^1 = G = (-\alpha - \beta)^0 G = (-\alpha - \beta)^{1-1} G$$

La propriété est vraie pour $i = 1$

$\star$ Supposons qu'elle soit vraie pour un entier naturel $i \geq 1$.
 Montrons alors que $G^{i+1} = (-\alpha - \beta)^i G$

Par hypothèse: $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1} G$

$$\text{Donc } G^i \times G = (-\alpha - \beta)^{i-1} G \times G$$

$$\text{Donc } G^{i+1} = (-\alpha - \beta)^{i-1} G^2$$

$$\text{On } G^2 = \begin{pmatrix} (-\alpha - \beta)^2 & \alpha(-\alpha - \beta) & \beta(-\alpha - \beta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= (-\alpha - \beta) G$$

$$\text{Donc } G^{i+1} = (-\alpha - \beta)^i G$$

$$\forall i \geq 1, \underline{G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1} G}$$

b) la matrice I_3 et $\frac{k}{h} G$ commutent puisque

$$I_3 \times \frac{k}{h} G = \frac{k}{h} G = \frac{k}{h} G \times I_3 :$$

Donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall h \geq 1, \forall k \in \mathbb{R},$$
$$\left(I_3 + \frac{k}{h} G\right)^h = \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} \left(\frac{k}{h} G\right)^i (I_3)^{h-i}$$
$$= \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} \left(\frac{k}{h}\right)^i \times G^i \times I_3$$

On peut faire $i \geq 1$ d'après 10. a). on a: $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1} G$

$$\text{Donc } \left(I_3 + \frac{k}{h} G\right)^h = 1 \times I_3 \times \left(\frac{k}{h}\right)^0 \times G^0 + \sum_{i=1}^h \left(\frac{k}{h}\right)^i \times (-\alpha - \beta)^{i-1} G \times I_3$$
$$\left(I_3 + \frac{k}{h} G\right)^h = I_3 + \left(\sum_{i=1}^h \left(\frac{k}{h}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1}\right) G$$

$$\text{c) On } \frac{\sum_{i=1}^h \left(\frac{k}{h}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1}}{-(\alpha + \beta)} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{On } \sum_{i=1}^h \binom{h}{i} \left(\frac{k}{h}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} &= \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} \left(\frac{k}{h}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} + \frac{1}{\alpha + \beta} \\
 &= \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} \left(\frac{k}{h}\right)^i (-\alpha - \beta)^i \times \frac{1}{-(\alpha + \beta)} + \frac{1}{\alpha + \beta} \\
 &= \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} \left(\frac{(-\alpha - \beta)k}{h}\right)^i \times \frac{1}{-(\alpha + \beta)} \\
 &+ \frac{1}{\alpha + \beta} \\
 &= \frac{1}{-(\alpha + \beta)} \left(1 - (\alpha + \beta) \frac{k}{h}\right)^h + \frac{1}{\alpha + \beta}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^h \binom{h}{i} \left(\frac{k}{h}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} = \frac{1 - \left(1 - (\alpha + \beta) \frac{k}{h}\right)^h}{\alpha + \beta} \quad \forall h \geq 1, \forall k \geq 0$$

$$\text{On } \left(I_3 + \frac{k}{h} G\right)^h = I_3 + \frac{1 - \left(1 - (\alpha + \beta) \frac{k}{h}\right)^h}{\alpha + \beta} \times G \text{ d'après 10.6) }$$

De plus d'après (**) partie II.

$$\Pi(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \frac{k}{h} G\right)^h$$

$$\text{Donc } \Pi(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \frac{1 - \left(1 - (\alpha + \beta) \frac{k}{h}\right)^h}{\alpha + \beta} G\right)$$

On d'après le cours $e^u \sim 1 + u$

Donc comme $\lim_{h \rightarrow +\infty} -(\alpha + \beta) \frac{k}{h} = 0$ par quotient,

$$\text{On a } e^{-\frac{(\alpha + \beta)k}{h}} \sim 1 - (\alpha + \beta) \frac{k}{h}$$

$$\text{Donc } \left(e^{-\frac{(\alpha + \beta)k}{h}}\right)^h \underset{0}{\sim} e^{-(\alpha + \beta)k} \underset{0}{\sim} \left(1 - (\alpha + \beta) \frac{k}{h}\right)^h$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées - ESSEC		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

On en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \frac{1 - (1 - (\alpha + \beta) \frac{t}{h})^h}{\alpha + \beta} G \right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \frac{1 - e^{-(\alpha + \beta)t}}{\alpha + \beta} G \right)$$

D'où $\Pi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(I_3 + \frac{1 - e^{-(\alpha + \beta)t}}{\alpha + \beta} G \right) = I_3 + \frac{1 - e^{-(\alpha + \beta)t}}{\alpha + \beta} G$

d) On $L_t = L_0 \Pi(t)$ d'après 8.a)

Sachant que $L_0 = (100)$ gso

Alors $L_t = (P(X_t = 1) \quad \dots \quad P(X_t = 3))$

$$L_t = \left(e^{-(\alpha + \beta)t} \quad \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta} (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \right)$$

e) admise.

11.

a) $A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

17/20

Donc :

$$A^3 - 2A^2 + A = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -10 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -8 & 1 & 7 \\ 28 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^3 - 2A^2 + A = 0$

On en déduit que $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$ est un polynôme annulateur de A car $U(A) = 0$

b) $U(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$

Comme x est racine de x on peut factoriser $U(x)$ par x .

et $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

Donc $U(x) = x(x-1)^2$

De plus $(1 + \frac{0}{n})^n = Q(1)U(1) + a + b + c$ d'après (*)

On a annule U donc $Q(1)U(1) = 0$

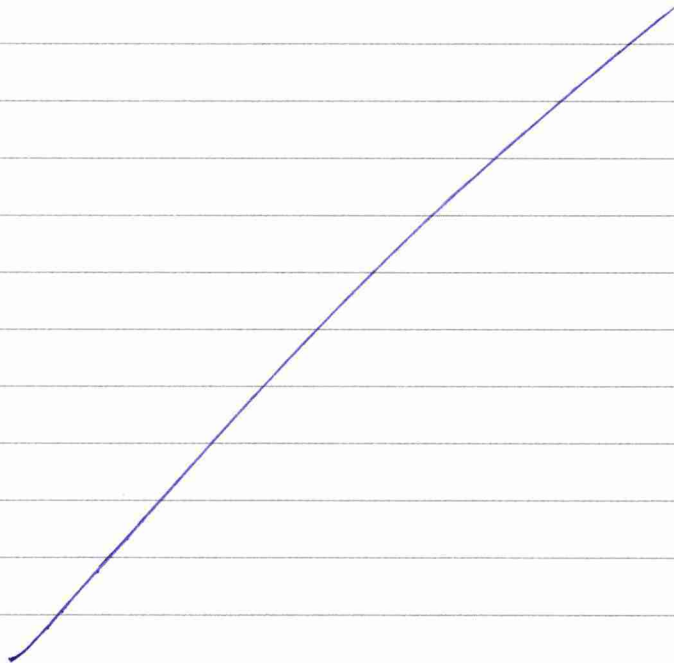
Donc $\left(1 + \frac{Q}{h}\right)^h = a + b + c$

Et tant que Q annule U car $U(0) = 0$ donc $U(0)Q(0) = 0$

Donc $(1)^h = c \implies c = 1$ d'après (*)

c) $\left(1 + \frac{Q}{h}\right)^h = \frac{Q}{h} \left(1 + \frac{Q}{h}\right)^{h-1}$

On



On admet 11. c)

d) Lemme $\Pi(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{Q}{h} A\right)^h$ d'après (**)

et que $\left(1 + \frac{Q}{h} A\right)^h = a A^2 + b A + I_3$ car $U(A) = 0$

On a d'après 11. c)

$\Pi(t) = (1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t})A^2 + ((2 + \alpha t)e^{-\alpha t} - 2)A + I_3$
car l'expression ne dépend pas de h

