



E3-00015
290896
Maths S

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de :

Mathématiques BT Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) Soit $h \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[h; h+1]$

donc $\forall k \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

ces fonctions sont continues sur $[h; h+1]$ donc par croissance de l'intégrale sur des bornes croissantes, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

b) Par sommation pour $k \in [1; n-1]$ ($n \geq 2$) dans la 1) c)

$$\text{on a : } \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1$$

d'après la Relation de Charles

$$\text{donc } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

donc d'après l'énoncé, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\forall n \geq 2, S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq S_n - \frac{1}{n}$$

$$c) \int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln(|t|)]_1^n = \ln n$$

donc d'après la 1) b) on a $\forall n \geq 2$,

$$\S \quad \ln n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \ln n \quad (*)$$

$$d) \forall n \geq 2, \ln n > 0$$

donc en divisant par $\ln n$ dans (*),

$$\text{on a : } 1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0 \quad (\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln n = +\infty)$$

$$\text{donc par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$$

$$\text{donc } S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

2) a) rang(50) signifie que le programme
termine jusqu'à ce que S_n soit supérieur ou
égal à 50

b) Si l'on fait l'appel rang(50) alors
pour $n \geq 50$,

$$S_n \sim \ln n \quad \text{or} \quad \ln n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc pour $\ln n$
assez grand,
on a $S_n \geq 50$

si l'on fait l'appel rang(50) alors on a $S_n = \ln n$
pour n assez grand.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0; 1]$
 $x \in]0; 1[$, $t \neq 1$

donc somme géométrique liée

$$\text{ainsi, } \sum_{k=1}^n t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$$

b) $t \mapsto \sum_{k=1}^n t^{k-1}$ est continue sur $[0, x]$
(fonction polynomiale)

d'où par passage à l'intégrale et d'après la 3) a), on a :

$$\int_0^x \sum_{k=1}^n t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

d'où par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^x = -\ln(1-x)$$

$$\int_0^x t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^x = \frac{x^k}{k}$$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

c) $\forall t \in [0, x], x \in]0, 1[, 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$

ces fonctions sont continues.

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-x}$$

sur $[0, x]$ d'où par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt$$

sur des bornes croissantes, on a :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \xrightarrow{x < 1} 0 \quad \text{car } x < 1$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de :

Mathématiques ET Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

suite Ex 2 = donc par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0 \quad (x < 1)$$

d) x est indépendante de n donc en faisant tendre n vers $+\infty$ ~~on a~~ = dans la 3) b)

on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=2}^n \frac{x^h}{h} = -\ln(1-x) \quad (x < 1)$

donc $\sum_{h=2}^{\infty} \frac{x^h}{h}$ converge et $\sum_{h=2}^{\infty} \frac{x^h}{h} = -\ln(1-x)$

Exercice 2 :

1) a) $\forall z \in \mathbb{Z} \quad Z_n (z) =]0, 1[$

~~$\forall x < 0$~~ $\forall x < 0, F_n(x) = 0$

$\forall x > 1, F_n(x) = 1$

F_n est la fonction de répartition de Z_n

$\forall x \in [0, 1], P(Z_n \leq x)$

\Leftarrow

$$1 - F_n(x) = P(Z_n > x) \\ = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ = P(X_1 > x) \cdot \dots \cdot P(X_n > x)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq x))$$

les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont

$$= (1-x)^n \quad \text{si } (x) \text{ indépendante de } (x) \text{ même loi et à densité } X_i \sim U[0, 1]$$

donc $\forall x \in [0, 1], F_n(x) = 1 - (1-x)^n$.

b) F_n est de classe C^q sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et 1 (x)

F_n est continue sur $] -\infty, 0[$ et $] 1, +\infty[$ en tant que fonction constante (nulle sur \mathbb{R}^+)

F_n est continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynomiale

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - (1-x)^n = 1 - 1 = 0 = F_n(0)$

donc F_n est continue à droite en 0

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^-} F_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - (1-x)^n = 1 - 0 = 1 = f_n(1)$$

donc f_n est continue à droite en 1

donc f_n est continue sur \mathbb{R} ($x < 1$)

donc Z_n est à densité d'après (a) et (c)

$$c) \forall x < 0, F_n'(x) = 0$$

$$\forall x > 1, F_n'(x) = 0$$

$$\forall x \in [0; 1], F_n'(x) = n(1-x)^{n-1}$$

donc F_n' et f_n coïncident sur \mathbb{R}

or, F_n' est une densité de Z_n par le cours

donc $f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et une densité de Z_n

2) ~~return min(rand(1)~~

return rmin (rd.rand(n)).

$$3) \forall x \in [0; 1], |1-x| < 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (1-x)^n = 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donc $Z_n \xrightarrow{L} 0$ (Variable nulle)

4) a) Considérons $Z_{n-1} = \min(X_1, \dots, X_{n-1})$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z_n = X_n)$$

$$= P(\min(X_1, \dots, X_n) = X_n)$$

$$= P(\cancel{X_1 \geq X_n} \cap \dots \cap \cancel{X_{n-1} \geq X_n})$$

$$\cancel{[X_1 \geq X_n]} = \emptyset \quad [X_n \geq X_n] = \Omega \text{ (événement certain)}$$

$$= P(X_1 \geq X_n \cap \dots \cap X_{n-1} \geq X_n) \quad (P(X_1 \geq X_n) \cap \dots \cap (X_{n-1} \geq X_n))$$

$$= \cancel{P(\min(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq X_n)} = (P(X_1 \geq X_n) \cap \dots \cap (X_{n-1} \geq X_n))$$

$$= \cancel{P(Z_{n-1} \geq X_n)}$$

$$= P(\min(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq X_n)$$

$$= \underline{P(Z_{n-1} - X_n \geq 0)} \quad \text{car } X_n \sim \mathcal{U}([0, 1]) \text{ et } \mu \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

or, d'après l'énoncé

$$\underline{P(Z_{n-1} - X_n \geq 0)} = \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\underline{\text{Conclusion, } P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}, n \geq 1}$$

$$c) P(Z_n - X_n = 0) = \frac{1}{n} \neq 0, T_n = Z_n - X_n$$

$$\underline{\text{donc } P(T_n = 0) = \frac{1}{n} \neq 0, T_n \text{ n'est donc pas à densité}}$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques EN Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Exercice 2 :

```
c) def Var T
    from numpy import as np
    from random import as rd
    from numpy import as
```

return (np.var2(n) - rd.rand(n))

Var2(n) est la fonction Python qui simule Z_n dans la 3) b)

5) a) Non, T_{500} n'est pas discrète car

après lecture de la figure 1, on remarque
que $T_{500}(r)$ n'est pas dénombrable.

b) Oui elle l'est car $P(T_n = 0) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

lorsque n est assez grand. (Beaucoup de valeurs ~~de~~ seront
alors proches de 0)

Problème: Préliminaires:

$$1) \dim(E^*) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K})$$

$$\text{or, } \dim(\mathbb{K}) = 1$$

$$\text{donc } \dim(E^*) = \dim(E).$$

2) a) $\varphi \in E^*$, donc φ est une forme linéaire de E sur \mathbb{K}

$$\text{si } \varphi = 0 \text{ alors } \text{rg}(\varphi) = 0$$

si φ est non nulle, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$ ~~$\text{rg}(\varphi) = \dim(E)$~~
 d'après le théorème du rang comme en ~~travail~~ en dimension finie $\dim(\text{ker}(\varphi)) = n - \text{rg}(\varphi) = n - 1 = 1$

si $\varphi \neq 0$, alors ~~$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$~~ donc ~~$\text{rg}(\varphi) = 1$~~ ~~donc nécessairement~~
 ~~$\text{rg}(\varphi) = 1$~~ ~~$\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$~~ ~~donc $\text{rg}(\varphi) = 1$~~

donc les rangs possibles de φ sont 0 ou 1.

b) si $\text{rg}(\varphi) = 0$ alors $\varphi = 0_{\mathbb{E}}$

donc φ est nulle

si $\text{rg}(\varphi) = 1$ alors on a : $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})$
 $\dim(\mathbb{R})$

et $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ comme $\text{Im}(\varphi)$ est
un sous-espace vectoriel
de \mathbb{R}

donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$

donc φ est surjective

φ est donc soit surjective soit nulle.

c) $\varphi \neq 0_{\mathbb{E}}$, $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E}

donc φ est une forme linéaire surjective

et $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ cf (2-b)

donc d'après le théorème du rang comme \mathbb{E}

est de dimension finie, on a :

$\dim(\ker(\varphi)) = n - 1$, donc $\ker(\varphi)$ est
un hyperplan de \mathbb{E}

Partie I:

$$3) a) E = \mathbb{R}_p[x]$$

$$P \in \mathbb{R}_p[x]$$

$$\text{donc } \exists (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1},$$

$$P(t) = \sum_{k=0}^p \alpha_k t^k$$

~~donc par linéarité de l'intégrale, on a:~~

$$g(P) =$$

~~donc par linéarité de l'intégrale, on a:~~

$$g(P) = \sum_{k=0}^p \alpha_k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^p \frac{\alpha_k}{k+1} \in \mathbb{R}$$

Soient $(P_1, P_2) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$g(\lambda P_1 + P_2) = \int_0^1 (\lambda P_1 + P_2)(t) dt$$

$$= \lambda \int_0^1 P_1(t) dt + \int_0^1 P_2(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \lambda g(P_1) + g(P_2)$$

donc g est une forme linéaire de E sur \mathbb{K}

donc $g \in E^*$.

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques ET Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite partie I :

b) si $g(P) = 0$ alors ~~$\int_0^1 P(t) dt = 0$~~

~~donc supposons que $\exists t_0 \in]0, 1[$, $P(t_0) \neq 0$~~

~~alors alors $\sum_{k=0}^n$~~

si $g(P) = 0$ alors $\int_0^1 P(t) dt = 0$

supposons $P(t) \leq 0$ alors comme P est continue sur $]0, 1[$
et $\int_0^1 P(t) dt = 0$

alors on a : $P(t) = 0$ donc P admet une infinité de racines
donc P est le polynôme nul

Absurde car $P \in E$ et donc $\deg(P) \geq 1$

on obtient le même résultat si on suppose que $P(t) \geq 0$

D'où une contradiction donc $g(P) \neq 0$

donc \mathcal{B} d'après la 2-c), $\dim(\ker(\varphi)) = \cancel{p-1}$.

c) soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \varphi(Q_k) &= \int_0^1 t^k - \frac{1}{k+1} dt \\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

donc $Q_k \in \ker(\varphi)$

et la famille (x, \dots, x^p) est une famille de polynômes non nuls à degrés échelonnés elle est donc libre et de cardinal $p = \dim(\ker(\varphi))$

c'est donc une base de $\ker(\varphi)$.

4) a) $f(p) = p(0) \in \mathbb{K}$

$\forall \lambda$ soient $(p_1, p_2) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f(\lambda p_1 + p_2) &= (\lambda p_1 + p_2)(0) \\ &= \lambda p_1(0) + p_2(0) \\ &= \lambda f(p_1) + f(p_2) \end{aligned}$$

donc $f \in E^*$.

b) Soit $P \in \ker(\mathcal{F})$,

alors $P(0) = 0$, $P \in E$, $\ker(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(X_1, \dots, X^p)$
et $\dim(\ker(\mathcal{F})) = p = \text{Card}(\{X_1, \dots, X^p\})$

donc $\ker(\mathcal{F}) = \text{Vect}(X_1, \dots, X^p)$.

Car f non
nulle donc
 $\ker(\mathcal{F})$ est
un hyperplan
de E

5) a) $\ker f \subset \ker g$ (x1)

f et g sont deux éléments de E^* , non nuls
~~ce~~ donc leurs noyaux sont des hyperplans de E

(x2) donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g)) = n - 1$ cf énoncé

donc d'après (x1) et (x2), on a :

$\ker f = \ker g$.

b) $\dim \ker f = n - 1$

or, $\dim(E) = n$ donc d'après le théorème
du rang (on est en dimension finie), on a :

$\text{rg}(f) = 1$

donc $\exists x_0 \in E \mid x_0 \in \text{Im}(f)$, donc il existe

un vecteur x_0 de E qui n'appartient pas à

$\ker(f) = \ker(g)$

$$c) x_0 \neq 0_E$$

$$\text{donc } \dim(\text{Vect}(x_0)) + \dim(\ker f)$$

$$= n - 1 + 1 = n = \dim(E)$$

soit $x \in \ker(f) \cap \text{Vect}(x_0)$

alors $f(x) = 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda x_0$

alors $f(x) = 0_E$ donc $\lambda f(x_0) = 0_E$

or, $f(x_0) \neq 0_E$ car f non nul d'après l'énoncé

donc $\lambda = 0$ donc $x = 0_E$

donc $\ker f \cap \text{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

donc $E = \ker f \oplus \text{Vect}(x_0)$

d) soit $x \in E, \exists! (y, z) \in \ker f \times \text{Vect}(x_0)$

$$x = y + z$$

alors $\forall x \in E, f \circ h(x) = g(x_0) f(x) - f(x_0) g(x)$

$$= g(x_0) f(y+z) - f(x_0) g(y+z)$$

f est linéaire $= g(x_0) f(y) + g(x_0) f(z) - f(x_0) g(y) - f(x_0) g(z)$

or, $y \in \ker f = \ker g$ $f(y) = g(y) = 0$

donc $f(y) = g(y) = 0$

donc $h(x) = g(x_0) f(z) - f(x_0) g(z)$

or, $z \in \text{Vect}(x_0)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, z = \lambda x_0$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de :

Mathématiques ET Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite partie I

Suite 5) d)

$$\text{donc } h(n) = g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(x_0)$$

$$\text{car } f = \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0) = 0$$

est linéaire

$$\text{donc } \forall x \in E, h(x) = 0 \quad \text{donc } h = 0_E$$

e) comme $h = 0$ on a :

$$g(x_0) f = f(x_0) g$$

$$g(x_0) \neq 0 \quad \text{alors } f = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g$$

$$\text{en posant } \lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad \text{on a : } f = \lambda g$$

f et g sont donc colinéaires.

Proposition II :

6) a) (e_1, \dots, e_{n-1}) est une base de H

H est un hyperplan de E ~~et~~

donc $E = H \oplus \text{Vect}(e_n)$, $e_n \neq 0$ d'où l'existence de e_n

donc la concaténation d'une base de $\text{Vect}(e_n)$ et d'une base de H forme une base de E

donc $\exists e_n \in E$, (e_1, \dots, e_n) est une base de E

b) φ est une forme linéaire non nulle

donc $\dim \ker(\varphi) = n - 1$

donc $\ker(\varphi) = [1, n-1]$, $\varphi(e_i) = 0$ (H hyperplan)

et $\varphi(e_n) = \lambda \neq 0$ car $\varphi \neq 0_E$

en prenant $\lambda = 1$, on a $\varphi(e_n) = 1$

la définition est donc correcte.

H est un hyperplan de E , φ est non nulle

donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ donc $\text{rg}(\varphi) = 1$ et d'après le théorème du rang, comme on est en dimension finie, on a :

$$\underline{\dim(\ker(\varphi)) = n-1 = \dim(H)}$$

soit $x \in E$, $x \in \ker(\varphi) \iff H$

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ car (e_1, \dots, e_n) est une base de E

$x \in \ker(\varphi) \iff \varphi(x) = 0$

$\iff \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = 0$ car φ est linéaire

$\iff \lambda_n e_n + 0 = 0$ car $\varphi(e_i) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$\iff \lambda_n e_n = 0$

$\iff \lambda_n = 0$ car $e_n \neq 0$

$\iff x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$

$\iff x \in H$

donc $\ker(\varphi) = H$.

7) Soit $x \in \ker(f)$

$$f(x) = 0_E \text{ alors } f_1(x) = 0_E, \dots, f_p(x) = 0_E$$

$$\text{alors } x \in \ker\left(\prod_{i=1}^p f_i\right)$$

$$\text{soit } x \in \ker\left(\prod_{i=1}^p f_i\right)$$

$$\text{alors } \forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(x) = 0_E$$

$$\text{donc par définition de } f \text{ on a : } f(x) = 0_E$$

$$\text{donc } x \in \ker f$$

$$\text{donc par double inclusion, } \ker f = \ker\left(\prod_{i=1}^p f_i\right)$$

8) a) $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est la base canonique de \mathbb{R}^p

f est surjective donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^p$

$\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p = \text{Im}(f)$ donc comme f est surjective

ε_1 admet un antécédent x par f .

b) Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i f_i = 0_E$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x) = 0_E$$

or, d'après la question 8) a) on a : $f(x) = \varepsilon_1$

$$\text{donc } \varepsilon_1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Emplacement
GR Code

Épreuve de :

Maths ET Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite 8) b) f est surjective donc $\ker(\varphi) = \{0\}$
 $\dim(\ker(\varphi)) = n - 2$
et donc d'après le 8 - a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(n) = 0_E &\Rightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(n) = 0_E \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_i = 0_E \quad \text{cf (8.a)} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Car la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est libre
donc la famille (f_1, \dots, f_p) est libre dans E^p

9) a) f n'est pas surjective donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^p$
donc $m = \text{rg}(f) \neq p$.

b) Soit (e_1, \dots, e_m) une base de $\text{Im} f$
alors d'après le théorème de la base incomplète,
il existe $p-m$ vecteurs (e_{m+1}, \dots, e_p) tels de \mathbb{R}^p
telles que $B = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de \mathbb{R}^p

donc ~~\mathbb{R}^p~~ $\text{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p

(*) donc $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^p$ donc $\text{rg}(f) \leq p$

Supposons que ~~$\text{rg}(f) = p$~~ $p = \text{rg}(f)$

alors $m = p$ donc cela veut dire que

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^p$ car on a une inclusion avec (*) et l'égalité des dimensions dans (*)

or, f n'est pas surjective donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^p$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \in \mathbb{R}^p \\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{pmatrix}$$

Contradiction donc $\text{rg}(f) \neq p$

donc $\text{rg}(f) \leq p-1$

Notons H un hyperplan de \mathbb{R}^p , $\dim(H) = p-1$

donc $\text{Im}(f) \subset H$.

c) Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i f_i = 0, \quad \text{on va considérer que la famille } (f_1, \dots, f_p) \text{ est libre}$$

donc $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0$

Soit (e_1, \dots, e_{p-1}) une base de H alors

(e_1, \dots, e_p) est une base de \mathbb{R}^p d'après la question 3)c)

Notons $f_i(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in [1, p-1] \\ 1 & \text{si } i = p \end{cases}$ d'après la question 6) (Unité)

~~alors on a $f_i(e_p) = 1$~~ donc $\ker(f_i) = H$

or, $\text{Im}(f) \subset \ker(S_i) = H$ cf (9.c)

donc si $\forall i \in [1, p]$, $\alpha_i = 0$ alors en prenant $x \in \mathbb{R}^p$
 $\Rightarrow x = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \in H = \ker(S_i)$

on a $x = 0_E$

donc $\ker(S_i) = \{0_E\}$ donc $\text{Im}(f) = \{0_E\}$,

Absurde, donc $\exists i_0 \in [1, p]$, $\alpha_{i_0} \neq 0$

donc il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ non tous nuls tels que :

$\sum_{i=1}^p \alpha_i f_i = 0_E$ donc la famille (f_1, \dots, f_p) est liée

10) a) (f_1, \dots, f_p) est liée dans E^*

donc ~~car~~

or, on a montré que dans la question 3) a) que :

f n'est pas surjective $\Rightarrow (f_1, \dots, f_p)$ ~~dans~~ est liée dans E^*

donc par contraposée,

(f_1, \dots, f_p) est liée dans $E^* \Rightarrow f$ est surjective

donc f est bien surjective

$$\& b) \ker f = \bigcap_{i=1}^p \ker f_i$$

$$\text{donc } \dim\left(\bigcap_{i=1}^p \ker f_i\right) = \dim(\ker(f)) \quad (*)$$

or, f est surjective donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^p$

$$\text{donc } \text{rg}(f) = p \quad \text{or, } \dim(E^n) = n$$

donc d'après le théorème du rang (on est en dimension finie), on a :

$$\text{donc } \dim(\ker(f)) = n - p \quad \text{donc d'après } (*), \text{ on a :}$$

$$\text{donc } \dim\left(\bigcap_{i=1}^p \ker f_i\right) = n - p$$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de :

Maths en Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III :

a) $\forall x \in E, f_a(x) = \langle a, x \rangle \in \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire
De plus, f_a est ~~linéaire~~ linéaire

car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E donc linéaire par rapport à l'une de ses variables

donc $f_a \in E^*$.

b) ~~soit~~ $x \in \ker(f_a),$

$\Leftrightarrow f_a(x) = 0_E \Leftrightarrow \langle a, x \rangle = 0_E$

$\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(a)^\perp$

donc $\ker(f_a) = \text{Vect}(a)^\perp$, $a \neq 0_E$, car $a \in E$ et $\dim E = n \geq 1$

c) Si f_a est l'application nulle

car $\forall x \in E, f_a(x) = 0_E$

$$\text{donc } \langle a, x \rangle = 0_E$$

$$\text{donc } a \in E^\perp = \{0_E\}, x \in E$$

$$\text{donc } a = 0_E$$

$$\text{si } f_a = 0_E \text{ alors } a = 0_E$$

12) f_a est linéaire

$$\forall (a, b) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K},$$

$$\phi(\lambda a + b) = f_{\lambda a + b}(x), x \in E$$

$$= \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle$$

$$= \lambda f_a(x) + f_b(x)$$

$$= \lambda \phi(a) + \phi(b)$$

le produit
scalaire
est bilinéaire

donc ϕ est linéaire.

b) ϕ est linéaire, or, $\exists a \in E^*$

donc $\phi \in E^*$

et $\dim(E) = \dim(E^*)$ cf (1 - Partie I)

soit $a \in \ker(\phi)$ alors $\phi(a) = 0_E$
alors $\exists a = 0_E$

donc d'après la 1) c), on a : $a = 0_E$

donc $\ker(\phi) = \{0_E\}$

donc ϕ est injective et $\dim(E) = \dim(E^*)$

De plus, on est en dimension finie

donc ϕ est bien un isomorphisme de E sur E^* .

c) Soit $\varphi \in E^*$, supposons qu'il existe $(a, a') \in E^2$

tel que $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$
 $\varphi(x) = \langle a', x \rangle, \quad x \in E$

alors $\langle a, x \rangle - \langle a', x \rangle = 0_E$

alors $\langle a - a', x \rangle = 0_E$ par bilinéarité
du produit
scalaire

alors $(a - a') \in E^\perp = \{0_E\}$

donc $a - a' = 0$

donc $a = a'$

il existe donc un unique $a \in E$ tel que :

$\forall \varphi \in E^*, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$

13) a) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$

$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$

Notons $C_{ij} = ({}^tAB)_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$

par produit matriciel, on a :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki}$$

$$\text{or, } \text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^p C_{ii} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ki} b_{ki} \in \mathbb{R}$$

Soient $(A_1, A_2) \in (\Gamma_p(\mathbb{R}))^2$, $B \in \Gamma_p(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{alors } \langle \lambda A_1 + A_2, B \rangle = \text{tr}({}^t(\lambda A_1 + A_2)B)$$

$$\text{par linéarité de la transposée} = \text{tr}(\lambda {}^tA_1 + {}^tA_2)B)$$

$$\text{par linéarité de la trace} = \lambda \text{tr}({}^tA_1 B) + \text{tr}({}^tA_2 B)$$

$$= \lambda \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$$

donc $\langle ; \rangle$ est linéaire par rapport à ses variables

et symétrique donc bilinéaire

en effet, par commutativité du produit de deux

$$\text{nœuds, on a } \text{tr}({}^tBA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ki} b_{ki} = \text{tr}({}^tAB)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Maths ET Lyon.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite partie III :

13) a)

$$\text{Soit } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad \text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p (a_{ki})^2 \geq 0$$

$$\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p (a_{ki})^2 = 0$$

or, il s'agit d'une somme de termes positifs ou nuls
donc chacun des termes est nul

donc $(a_{ki})^2 = 0$ donc $a_{ki} = 0$ donc $A = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire

sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

13) b) si $\varphi = \mathbb{E} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire

Notons pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\phi(A) = \mathbb{P}_A$ ($A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$)

$$\text{où } \forall \pi \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_A(\pi) = \langle \mathbb{P}_A, \pi \rangle = \langle {}^tA, \pi \rangle = \text{tr}({}^tA\pi).$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est linéaire car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire
 donc ϕ est linéaire aussi

Montrons que ϕ est un isomorphisme de E sur E^*

on travaille en dimension finie, car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire ($E = \mathbb{R}^n$), \mathbb{R}^n est un espace euclidien donc de dimension finie

alors soit $A \in \ker(\phi)$ alors $\phi(A) = 0_{E^*}$

$$\Rightarrow \langle A, \pi \rangle = 0_{E^*}$$

$$\Rightarrow A \in E^\perp = \{0_E\}$$

$$\Rightarrow A = 0_{\mathbb{R}^n}$$

donc $\ker(\phi) = \{0\}$, de plus, $\dim(E) = \dim(E^*)$
 donc ϕ est un isomorphisme de E sur E^*

Donc en utilisant de manière licite le résultat de la question 12c)

on peut dire que si $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varphi \in E^*$)

alors $\exists A \in \mathbb{R}^n$ telle que $\forall x \in E$,

$$\varphi(x) = \langle A, x \rangle = \text{tr}(A\pi)$$



