Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 36	Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2 :

1) Soit $c > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement $1)$

et $\int_{-\infty}^{1} f(x)dx = 0$ car $\forall x < 1$, $f(x) = 0$

et soit $A > 1$,

$$\int_1^A \frac{c}{x^{c+1}} dx = c\left[-\frac{1}{cx^c}\right]_1^A = 1 - \frac{c}{cA^c} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$$

donc par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1

f peut donc être considéré comme une densité de probabilité

b) $E(X)$ existe $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument (a).

donc converge car fonction à valeurs positives

($xf(x) = 0$ pour $x < 0$)

or, $xf(x) = \frac{c}{x^c}$ or, $c > 2$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^c} dx$ converge comme intégrale

de Riemann convergente

donc d'après (a), $E(X)$ existe

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^c} dx = \frac{1}{c-1}$

donc $E(X) = \frac{c}{c-1}$

3) $\forall x < 1$, $F(x) = 0$

$\forall x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

$= c \left[-\frac{1}{cx^c} \right]_1^x$

$= c \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{cx^c} \right] = 1 - \frac{1}{x^c}$

donc $\forall x \geq 1$, $F(x) = 1 - \frac{1}{x^c}$

4) a) $X(\Omega) = [1; +\infty[$

donc $Y(\Omega) = [0; +\infty[$

et $\forall x < 0$, $G(x) = 0$

$\forall x \geq 0$, $P(Y \leq x) = P(\ln X \leq x)$

$x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$= P(X \leq e^x)$

$= 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-cx}$ cf (3)

donc $P(Y \leq x) = 1 - e^{-cx}$ si $x \geq 0$

b) $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, on reconnait la fonction d'une repartition d'une loi $\mathcal{E}(c)$

$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

c)
```
~~Import numpy as np~~
Import random as rd
Def simulX(c)
X = ~~rd.exponential(1/c)~~ rd.exponential(c)
return X
```

5) ~~Import numpy as np~~
~~Import random as rd~~
~~Def simul2(c)~~
~~X = rd.exponential(c)~~
~~Y = rd.exponential(c)~~
~~Z' = np.log(X+Y)~~
~~Z = np.exp(Z')~~
~~return Z~~

) ~~Z(= ln X_1 + ln X_2~~

```
Import numpy as np
Import random as rd
Def simul2(c)
2 = np.(Simul X(c)^.2)
return 2
```

, X_1 et X_2 suivent la même loi

6) Z admet une espérance et une variance comme produit de variables aléatoires admettant une espérance et une variance

or, $E(Z) = E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$ cf (2)

X_1 et X_2 étant indépendantes

$Z^2 = X_1^2 X_2^2$, d'après le lemme des coalitions X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes

donc $E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$ cf (2)

or, ~~$E(X_1^2) =$~~

~~d~~

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EDHEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Ex 2 :

6) D'après la formule de Koenig - Huygens, on a :

$$\cancel{V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2}$$

$$\cancel{= \frac{c^2}{(c-1)^2} - \frac{c^2}{(c-2)^2}}$$

$$\cancel{= \frac{c^2(c-1)^2(c-2)^2 - c^2(c-1)^4}{(c-1)^4(c-2)^2}}, \quad c > 2$$

$$\cancel{= \frac{c^2(c-1)^2((c-2)^2 - (c-1)^2)}{(c-1)^4(c-2)^2}}$$

$$\cancel{= c^2(c-1)^2(c^2 - 2c + 4 - c^2 + 2c - 1)}$$

$$\cancel{V(Z) = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}}$$

$$\cancel{= \frac{c^2(c-1)^4 - c^2(c-1)^2(c-2)^2}{(c-2)^4(c-1)^2}}$$

$$\cancel{= \frac{c^2(c-1)^2((c-1)^2 - (c-2)^2)}{(c-2)^4(c-1)^2}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \frac{c^2(c-1)^2(\cancel{c^2}-2c+1-\cancel{c^2}+4c-4)}{(c-1)^4(c-2)^2}$$

$$\cancel{= \frac{c^2(c^2-2c+\frac{1}{c})(2c-3)}{(c-1)^4(c-2)^2}}$$

$$\cancel{= c^2(2c^3-3c^2+4c^2+6c+2c}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^4-4c^3+6c^2-4c+1) - c^4(c^2-4c+4)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(\cancel{c^4}-\cancel{4c^3}+6c^2-4c+1-\cancel{c^4}+\cancel{4c^3}-4c^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7)a) $X_1 \sim \mathcal{E}(c)$, cf (4.b)

donc par transformée affine,

$cX_1 \sim \mathcal{E}(1)$,

il en est de même pour cX_2

b) cY_1 et cY_2 sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{E}(1)$

donc par stabilité de la loi $\mathcal{E}(1)$,

$cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$

8) a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\cancel{\forall x}$ $H(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x)$
$= P(c(Y_1+Y_2) \leq cx)$, $c > 2$
$= P(cY_1 + cY_2 \leq cx)$
$= K(cx)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = K(cx)$

et une densité h de Y_1+Y_2 est : $Y_1 + Y_2$ est à densité comme somme de deux variables à densité

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = cK'(cx)$

or, $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$, une densité de $cY_1 + cY_2$ est donc $k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ xe^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

donc $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ c(cx)e^{-xc} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

donc $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ c^2 x e^{-cx} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$, densité de $Y_1 + Y_2$

b) $\ln Z = \cancel{\ln(X_1 + X_2)}$
$\ln X_1 + \ln X_2$
$= Y_1 + Y_2$

$Z(\Omega) = [1; +\infty[$

et $\forall x < 1$, $F_Z(x) = 0$

$\forall x \geq 1$, $F_Z(x) = P(Z \leq x)$
$x \longmapsto \ln x$ est $= P(\ln Z \leq \ln x)$
strictement croissante $= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln x)$
sur $[1; +\infty[$ $= H(\ln x)$

donc $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ H(\ln x) \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

F_Z est continue et de classe C^1 sur $]-\infty; 1[$ (fonction) nulle
$x \longmapsto \ln x$ est de classe C^1 (et continue) sur $[1; +\infty[$ et à valeurs dans $[0; +\infty[$
et ~~aussi~~ H est continue sur $[0; +\infty[$
donc F_Z est, par composée, continue

et de classe C^1 sur $[1; +\infty[$.

et $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x = 0$, or, H est continue en 0

donc $\lim\limits_{x \to 1^-} H(\ln x) = H(0) = 0 = F_Z(1)$ donc

F_Z est continue à ~~dro~~ gauche en 1, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, Z est donc à densité et une densité f_Z de

Z est : $f_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{x} h(\ln x) \text{ si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{x} c^2 \ln x \, e^{-\ln x \times c} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

$e^{-c \ln x} = x^c$

$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Ex 2 :

9) a) Soit $\alpha > 1$. La fonction $x \longmapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et réalise une bijection croissante de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$

le changement de variable $u = \ln x$ est donc licite

(1) et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \int_0^{+\infty} u e^{-u(\alpha-1)} du$, après changement de variable

Ces intégrales sont de même nature donc convergentes car on reconnaît presque une fonction gamma (à une constante près)

et posons le changement de variable affine $x = u(\alpha-1)$

alors $\int_0^{+\infty} u e^{-u(\alpha-1)} du = \frac{1}{(\alpha-1)^2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

$= \frac{\Gamma(2)}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$

donc d'après (α) *, $\forall \alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge

et vaut $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $E(Z) = \int_0^{+\infty} x f_Z(x)\,dx$ (On a montré l'existence de la variance et l'espérance dans 6)

$= c^2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^c}\,dx$

$= \frac{c^2}{(c-1)^2}$, $c = \alpha$ dans la 5) a) licite car $c > 1$

Conforme au résultat trouvé

$E(Z^2) = c^2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{c-1}}\,dx = \frac{c^2}{(c-2)^2}$, $c-1 > 1$

Conforme au résultat trouvé

Calcul ~~V~~ $V(X)$, question 2)

$E(X^2) = \int_1^{+\infty} \frac{c\,x^2}{x^{c+1}}\,dx = c\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{c-1}}\,dx = \frac{c}{c-2}$

licite car $c-1 > 1$, intégrale de Riemann convergente

donc d'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$V(X) = \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}$

Exercice 3 :

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}, [X=k] = \bigcap_{i=1}^{k} F_i \cap P_{k+1}$

or, on a l'indépendance des lancers,

donc $P(X=k) = \prod_{i=1}^{k} P(F_i) \times P(P_{k+1})$

on a $P(F_i) = q$
$P(P_{k+1}) = p$

donc $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = q^k p$

2) On remarque que $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ au vu de la probabilité trouvée

$X = (X+1) - 1$, X admet donc une espérance et une variance

et par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(X+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$
$= \frac{q}{p}$

donc $E(X) = \frac{q}{p}$

et $V(X) = V(X+1) = \frac{1-p}{p^2}$

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$

$(Q=k) = (3Q = 3k)$, $X = 3Q + R$
$= (3Q + R = 3k + R)$

or, $([R=0] ; (R=1), (R=2))$ est un système coplet d'évènement

~~donc $(Q=k) = ((X = X=k) \cap ($~~

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $[Q=k] = ([X=3k] \cap [R=0]) \cup ([X=3k+1] \cap [R=1])$
$\cup ([X=3k+2] \cap [R=2])$

~~or~~, si $X = 3k$, alors nécessairement $R = 0$, $[X=3k] \subset [R=0]$

donc $[X=3k] \cap [R=0] = [X=3k]$

De même, $[X=3k+1] \cap [R=1] = [X=3k+1]$

et $[X=3k+2] \cap [R=2] = [X=3k+2]$

~~donc par incompatibilité des évènements et~~

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $[Q=k] = [X=3k] \cup [X=3k+1] \cup [X=3k+2]$

b) par incompatibilité des évènements, on a :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Q=k) = P(X=3k) + P(X=3k+1) + P(X=3k+2)$
$= q^{3k}p + q^{3k+1}p + q^{3k+2}p$
$= (q^3)^k (p + qp + q^2p)$
$= (1-(1-q^3))^k (1 + q(1-q) + q^2(1-q))$
$= (1-q^3)(1-(1-q^3))^k$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Conclusion : $Q \hookrightarrow BN(1-q^3)$

3) $P(R=0) = P(X=3Q)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=3Q)\cap(Q=k)) \quad , \text{ formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements } [Q=k]_{k\in\mathbb{N}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=3k)\cap(Q=k))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=3k)\times \underbrace{P_{(Q=k)}(X=3k)}_{=1\ (\ast\ast)}$$

$(\ast\ast)$ si $Q=k$, $\Leftrightarrow$ $X=3k$ car $R=0$

cf (1a) $|q|<1$ $= p\sum_{k=0}^{+\infty} q^3$

$$= \frac{p}{1-q^3} = \frac{1-q}{1-q^3}$$

$$= \frac{\cancel{1-q}}{\cancel{(1-q)}(1+q+q^2)}$$

$$= \frac{1}{1+q+q^2}$$

donc $P(R=0) = \dfrac{1}{1+q+q^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) a) On sait que si $X \sim BN(p)$

alors $X+1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

donc comme $X = (X+1) - 1$.

alors la fonction simulX renvoie bien la valeur prise par X

b)
```
Def div(p)
  X = simulX(p)
  Q = rd.geometric(1-((1-p)^3)) - 1
  R = X - 3.Q
  return(X, Q, R)
```

Suite Question 3 :

On repose 2 fois le même système complet d'événements, $[Q=k]_{k\in\mathbb{N}}$

alors $P(R=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=3k+1) \cap (Q=1))$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=3k+1)$, $P_{(Q=1)}(X=3k+1) = 1$ pareil que [illegible]

$= \frac{qp}{1-q^3} = \frac{q}{1+q+q^2}$

$P(R=1) = \frac{q}{1+q+q^2}$

$$P(R=2) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=3k+2) \cap (Q=k))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=3k+2) = \frac{q^2 p}{1-q^3} = \frac{q^2}{1+q+q^2} \quad , \quad P_{(Q=k)}(X=3k+2) = 1$$

donc $P(R=2) = \dfrac{q^2}{1+q+q^2}$

~~$\forall k$~~ 4) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P((Q=k) \cap (R=0)) = \cancel{P(X=3k) = q^{3k} p}$

$$= P(Q=k) \times P_{(R=0)}(Q=k)$$

$$= P(Q=k) \times P(X=3k)$$

$$= P(Q=k) \times P(R=0)$$

De façon analogue pour $R=0$, $R=1$

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, i \in \{0;1;2\}$, $P((Q=k) \cap (R=i)) = P(Q=k) \times P(R=i)$

Q et R sont donc indépendantes

Exercice 1 :

1) $M = \mathrm{Mat}_B(f)$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$\mathrm{rg}(f) = 1$

or, $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, donc d'après le théorème du rang,

$\dim(\ker(f)) = n-1 > 0$ car $n \geq 2$

donc $E_0(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, 0 est valeur propre de f

2) a) Notons $C_1, \_\_, C_n$ les colonnes de M

alors $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1, \_\_, C_n)$

or, $rg(M) = 1$, Considérons que les colonnes de M soient linéaire à la première

alors $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1) = \mathrm{Vect}(C)$, $C_1 = C$

d'après l'énoncé

~~et~~ mais $M \in M_n(\mathbb{R})$ donc il existe une matrice

$L = (l_1, \_\_, l_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que

$M = (l_1, \_\_, l_n)\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ | \\ m_{n1} \end{pmatrix}$ (par produit matriciel)

en prenant $l_1 = 1$, alors on peut dire qu'il existe une matrice $L = (1, l_2, \_\_, l_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que

$M = CL$

b) $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(CL)$

* ~~Notons~~ or, $(CL)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, l_{jk}$ par produit matriciel

or, $\mathrm{Tr}(CL) = \mathrm{Tr}(LC)$ car ~~on~~ car $C \in \mathbb{R}^n$ et L aussi

donc $\mathrm{Tr}(M) = LC$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 36

Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EDHEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) $M^2 = (CL)(CL)$

$= C\underbrace{LC}_{= tr(M)}L$ cf (2.b)

$= tr(M)M$, par linéarité de la trace $M = CL$

donc $M^2 = tr(M)M$

3) $X(X - tr(M))$ est un polynôme annulateur de M, alors $Sp(M) \subset \{0 ; tr(M)\}$ (×)

Si $tr(M)$ n'est pas valeur propre de M alors $Sp(M) = \{0\}$ (cf (1)) et (×)

alors cela voudrait dire que $\dim(\ker(f)) = n$ ($\mathbb{R}^n = \ker f$)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé à la question 1),

donc $tr(M) \in Sp(f)$

4) si $tr(M) = 0$

alors $Sp(M) = \{0\}$, la démonstration est la même que la question précédente

en supposant que M est diagonalisable en plus de la 3)

alors M serait la matrice nulle, ce qui est absurde car C, sa première colonne est non nul

donc si $tr(M) = 0$, M n'est pas diagonalisable

5) $tr(M) \neq 0$, $M = Mat_B(f)$ $\quad (tr(f) = tr(M))$

donc $Sp(M) = \{0 ; tr(M)\}$ cf (4) $= Sp(f)$

~~donc E_0~~ or, $\dim(E_0(f)) = n-1$ $\quad tr(M) \in \mathbb{R}$

et $\dim(E_{tr(f)}(f)) \geq 1$ car $E_{Tr(f)}(f) \neq \{0\}$

donc $\dim(E_0(f)) + \dim(E_{Tr(f)}(f)) \geq n-1+1 = n$

donc f est bien diagonalisable et $Sp(f) = \{0 ; tr(f)\}$

6)a) On suppose que A n'est pas inversible

$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

~~On suppose ac ≠ b~~

On suppose $ac \neq b$ $\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$

$y = z - ax$

donc on a : $ax + \cancel{y}\, z - ax + \frac{1}{c}z = 0$, dans la 2e ligne

$\Rightarrow z = 0$ On divise par ~~ac≠b~~ $ac - b \neq 0$

donc $y = ax$, $2ax = 0$ De même

$x = 0$

alors on a : $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, Absurde

Car on a établi que A est non inversible

et réciproquement $ac = b$

b) D'après la question précédente, $rg(A) = 1$

7)a) $A^2 = 3A$ après calculs et $Tr(A) = 3 \neq 0$

donc en reprenant la 5), ~~A est diag~~ g est diagonalisable et $Sp(g) = \{0 ; 3\}$ ($A = Mat_B(g)$)

Probleme :

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, ~~$x \in \mathbb{R}$~~

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos(2\pi) - \sin(2k\pi)\sin(2\pi)$$

~~cos~~ or, $\cos(2\pi) = 1$
et $\sin(2\pi) = 0$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = h(k)$$

donc $h(k+n) = h(k)$, $h \in F_n$

2) $F_n \subset E$
F_n contient l'application nulle

et $\forall (f,g) \in F_n^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$(\lambda f)(k+n) = (\lambda f)(k)$
$g(k+n) = g(k)$

alors $(\lambda f + g)(k+n)$
$= \lambda f(k+n) + g(k+n)$, par linéarité de f et g, licite d'après l'énoncé
$= \lambda f(k) + g(k)$
$= (\lambda f + g)(k)$

donc $\lambda f + g \in F_n$

F_n est donc un sous-espace vectoriel de E

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies ED HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Problème :

3) Soit $k \in \mathbb{N}$, $\exists! (q,r) \in (\mathbb{Z} \times I_n)$, $k = nq + r$

$\forall f \in F_n$, $f(k) = f(nq+r)$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, $nq \in \mathbb{Z}$ et $r \in I_n$,

~~$f(k) = f(k+n)$ donc $f(nq+r) = f(nq+r+n)$~~

~~$f(nq+r)$~~ donc en prenant $k = nq$ et $r = n$,

on a : $f(nq+r) = f(r)$ car $f \in F_n$

or, $k = nq+r$, donc $f(k) = f(r)$

4) a) Soit $f \in F_n$, en prenant $i = r \in I_n$ dans la question 3)

alors $\exists! (q,i) \in \mathbb{Z} \times I_n$, $k = nq + i$

donc $f(k) = f(i)$ (x) or, $e_i(k) = 1$ si $k = i$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et 0 sinon

~~donc~~ or, $f(k) = f(k)\,e_k(k) + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n-1} f(i)\times 0$

$$cf(x) = f(i)\,e_k(k) + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n-1} \underbrace{0}_{} \times f(i)$$

cela vaut $e_i(k)$ pour $k \neq i$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\,e_i(k)$$

donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\,e_i(k)$

b) comme le couple $(q, i) \in \mathbb{Z} \times I_n$ est unique

alors ~~$f(0), \ldots$~~ les $(f(i))_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ sont les uniques

réels tels que $f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\,e_i(k)$ $(*)$

(si il existait un autre n-uplet de réels tels qu'on ait $(*)$, on aurait plus $(*)$)

posons $\lambda_i = f(i)$, $i \in [\![0;n-1]\!]$

alors $\exists! (\lambda_0, \_\_\_, \lambda_{n-1})$,

$$f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i\,e_i(k), \quad \text{alors } f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i$$

donc $B_n = (e_1, \_\_\_, e_{n-1})$ est une base de F_n

par définition dans le cours

c) les coordonnées d'un élément ~~et~~ f de F_n dans la base B_n seraient les $(f(i))_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ car

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k)$$

5) a) Soient $(f_1, f_2) \in F_n^2$, $g \in F_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda f_1 + f_2, g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f_1 + f_2)(k) g(k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f_1(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f_2(k)g(k)$$

par linéarité de f et g

$$= \lambda\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$$

De plus, par commutativité du produit de deux réels ($(f, g) \in F_n^2$, ce sont donc des réels par définition de F_n)

on a : $\langle f ; g\rangle = \langle g ; f\rangle$

donc $\langle ; \rangle$ est symétrique, linéaire par rapport à ~~sa~~ l'une de ses variables donc bilinéaire

et $\langle f, f\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(k) \geq 0$ (somme de termes positifs ou nuls)

si $\langle f, f\rangle = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} f^2(k) = 0$ or, il s'agit d'une somme de termes positifs ou nuls

donc chacun des termes est nul donc $f^2(k) = 0$
donc $f^2(k) = 0$

donc $f = 0_{F_n}$

$\langle \cdot ; \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire sur F_n

b) Soit $i \neq j$, $(i,j) \in [\![0; n-1]\!]^2$

$$\langle e_i ; e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k)$$

$$= \cancel{e_i(k)} \; e_i(i) e_j(i) + e_i(j) e_j(j)$$

$e_j(i) = 0$ car $j \neq i$

$$+ \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n-1} e_i(k) e_j(k)}_{=0}$$ par définition de e_i

$e_i(j) = 0$ car $j \neq i$

donc $\langle e_i ; e_j \rangle = 0$

et $\|e_i\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} e_i^2(k)$

$$= \underbrace{e_i^2(i)}_{=1} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} e_i^2(k)}_{=0}$$

$$= 1$$

$\|e_i\| = 1$ $(i = j)$

donc B_n est une famille orthonormale et une base de F_n

donc B_n est une base orthonormale pour ce produit scalaire

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite Problème :

c) $\forall b \in]0;2\pi[$, $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N}$

($\sin(0) = 0$, $\cancel{\sin(\pi) = 0}$)
$\sin(\pi) = 0$)

donc $\cos(a+kb) = \dfrac{\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

et par sommation pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

par téléscopage $= \cancel{\cos(}\ \dfrac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

d) en prenant $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n}$ dans l'égalité précédente, on a : $n \geq 3$

donc $\frac{4\pi}{n} \in]0; 2\pi[$ comme $\pi \simeq 3,14$

on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

d'~~après les formules de l'énoncé, on a~~ :

$\sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{n}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right)$.

$= -\sin(4\pi)\cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\cos(4\pi)$

$\cos(4\pi) = \cos(2 \times 2\pi) = 2\cos^2(2\pi) - 1 = 1$

$\sin(4\pi) = 0$

donc $\sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{n}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)$

donc $\sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = 0$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$

De façon analogue au raisonnement ci-dessus, ~~on~~ en prenant $a = \frac{2\pi}{n}$ et $b = \frac{4\pi}{n}$, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0$

e) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} h^2(k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)$, d'après la 3^e formule du rappel

$= \frac{n}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}_{=0}$ cf (d)

$= \frac{n}{2}$

donc $\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$

3) a) Soit $f \in F_n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$

$Df(k+n) = f(k+n+1) - f(k+n)$

or, $f \in F_n$, $f(k+n+1) = f((k+1)+n) = f(k+1)$

$f(k+n) = f(k)$

donc $D(f)(k+n) = f(k+1) - f(k) = D(f)(k)$

donc $D(f) \in F_n$

b) $D(f) \in F_n$, soient $(f,g) \in F_n^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$D(\lambda f+g)(k) = (\lambda f+g)(k+1) - (\lambda f+g)(k)$

f et g sont linéaires $= \lambda f(k+1) + g(k+1) - \lambda f(k) - g(k)$

$= \lambda(f(k+1) - f(k)) + g(k+1) - g(k)$

$= \lambda D(f)(k) + D(g)(k)$

$D(\lambda f+g) = \lambda D_f + D_g$

donc $\Delta(f)$ est un endomorphisme de F_n

c) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $h \in F_n$ cf (1.c)

$$D(h)(k) = \cancel{\sin} \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(2\times\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(2\times\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(2\times\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(2\times\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)$$, en utilisant la formule 3 et 4 du Rappel.

donc $D(h)(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)$

d) $$\|Dh\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cancel{2} Dh^2(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)$$ cf (5.d)

$$= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)\right)$$ cf Rappel

$$= 2n\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)}_{=0}$$ cf (5.d)

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Suite Problème :

Suite 6) d),

alors $\|D_h\|^2 = 2n\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$

donc $\|D_h\| = \sqrt{2n}\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

7) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\forall (f,g) \in F_n^2$,

$$\langle f, \Delta g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\big(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1)$$

et $$\langle Df, Dg\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(k+1) - f(k)\big)\big(g(k+1) - g(k)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} g(k)f(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or, $\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k)g(k)$

or, $f(0) = f(n)$ $\quad = \underbrace{f(n) - f(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$

donc $f(0) - f(n) = 0$

car $f \in F_n$ (en prenant $k=0$)

$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$

et $\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k)$

$= \sum_{k=1}^{n} f(k)g(k-1)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1)$, $(f(n)g(n-1) = f(0)g(-1)$ f et $g \in F_n^2)$

Bilan : $-\langle Df, Dg \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)f(k-1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$

$+ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1)$

$= \langle f, \Delta g \rangle$

donc $\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle$, $(f,g) \in F_n^2$.

b) Soient $(f,g) \in F_n^2$,

$\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle$

~~or,~~ et $\langle \Delta f, g \rangle = -\langle Dg, Df \rangle$

$= -\langle Df, Dg \rangle$ par symétrie du produit scalaire $\langle , \rangle$

$= \langle f, \Delta g \rangle$

donc par définition, Δ est un endomorphisme symétrique de F_n

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Sp(\Delta)$ et g un vecteur propre associé à λ

alors $\Delta g = \lambda g$.

or, en prenant $f = g$ dans (a 7) b) (licite car $g \in F_n$)

on a : $\langle g, \Delta g \rangle = -\|Dg\|^2$

$\Rightarrow \lambda \|g\|^2 = -\|Dg\|^2$

donc $\lambda = -\dfrac{\|Dg\|^2}{\|g\|^2} \leq 0$, $\|g\|^2 > 0$ car g vecteur propre donc $g \neq 0$

donc $\lambda \leq 0$ alors

$Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}^-$

8) a) $\varepsilon_0 = 1$

$k \in \mathbb{Z}$ $\Delta(\varepsilon_0)(k) = $ ~~1-...~~ $1 - 2 + 1 = 0$

$\varepsilon_0(k+1) = 1$

$\varepsilon_0(k) = 1$ donc $\Delta(\varepsilon_0) = 0_{F_n}$

$\varepsilon_0(k-1) = 1$ donc $\varepsilon_0 \in \ker(\Delta)$

b) on a montré dans la 8) a)

que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0) \subset \ker(\Delta)$

soit $g \in \ker(\Delta)$, donc $g(k+1) - 2g(k) + g(k-1) = 0$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, ~~$\Delta g(k) = 0$~~ or, $g \in F_n$ ~~en~~

$\Rightarrow$ ~~$g(k+1) = g(k)$~~ et ~~en prenant a = 0~~

$g(k+1) = g(k)$ en prenant $n = 1$ dans la définition de F_n

donc ~~g est périodique de période 1~~

Voir (x)

elle est donc constante

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $g(k) = \lambda = \lambda \varepsilon_0$

donc $g \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_0)$ donc $\ker(\Delta) \subset \mathrm{Vect}(\varepsilon_0)$

donc par double inclusion, on a : $\ker(\Delta) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0)$

9) a) Δ est un endomorphisme symétrique de F_n

donc Δ est diagonalisable

donc il existe une base orthonormale ~~de~~ formée de

vecteurs propres de Δ de la forme $(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$

(x) : donc $g(k+1) - 2g(k) + g(k-1) = 0$

$\Rightarrow g(k-1) = g(k)$

donc g est constante donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $g = \lambda = \lambda \varepsilon_0$

Copie anonyme - n°anonymat : 290896

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 36 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Appro ECD HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Suite Problème :

9) a) Suite donc comme on a une base orthonormale de F_n

alors ~~...~~, $f = \sum_{i=0}^{n-1} \langle f ; \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ (décomposition dans une base orthonormale)

$= \sum_{i=1}^{n-1} \langle f ; \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

$\langle f ; \varepsilon_0 \rangle = 0$ cf énoncé

$\langle ; \rangle$ est un produit scalaire

donc ~~...~~ $\langle f ; \varepsilon_i \rangle \in \mathbb{R}$

cf en posant $\alpha_i = \langle f ; \varepsilon_i \rangle$, $i \in [\![1 ; n-1]\!]$

on a montré que : $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid$

$f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$

b) D'après la question 7) a),

$c = \min(|\lambda|, \lambda \in Sp(f))$

on a : $\langle f ; \Delta f \rangle = -\|Df\|^2$

Notons $Sp(\Delta) = \{\lambda_1, \_\_\_, \lambda_n\}$

alors $\Delta f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i \varepsilon_i$ cf (9.a)

donc $\langle f ; \Delta f \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \varepsilon_j ; \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i \varepsilon_i \rangle$

par bilinéarité du produit scalaire $= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle \varepsilon_i ; \varepsilon_j \rangle$

$(\varepsilon_1, \_\_, \varepsilon_{n-1})$ est une base orthonormée ~~de~~ $= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \lambda_j$ $\cancel{\le c \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2}$ $\cancel{\|f\|^2}$

~~or $c = \min\{|\lambda|, \lambda \in Sp(\Delta) \setminus \{0\}\}$~~

$\cancel{\langle f ; \Delta f \rangle \ge 0} \le \left|\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \lambda_j\right| \le c \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2}_{=\|f\|^2}$ d'après l'inégalité triangulaire

~~donc $-\|Df$~~

$\langle f ; \Delta f \rangle \ge \le \left|\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \lambda_j\right| \le c \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2}_{=\|f\|^2}$, inégalité triangulaire

donc $\|Df\|^2 \ge c\|f\|^2$

10) a) $B_3 = (e_0, e_1, e_2)$

~~$\Delta(f)(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$~~

~~$\Delta(f)(e_0) = f(e_0+1) - 2f(e_0) + f(e_0-1)$~~

~~$f(e_0+1) = \sum f(0) e_0^2 + f$~~

$= \cancel{f(e_1) + f}$ $e_1 + e_2$

$$\Delta e_0(k) = e_0(k+1) - 2e_0(k) + e_0(k-1)$$
$$= e_1(k) - 2e_0(k) + e_2(k) \quad \text{par définition de } e_i$$

or, la première colonne de A représente les ~~coto~~ coordonnées de Δe_0 dans la base (e_0, e_1, e_2)

donc la première ~~c~~ colonne de A est bien :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A$$

$A^2 = -3A$

$P(X) = X^2 + 3X$ est un polynôme annulateur de A

X^2+3X
$X(X+3)$

$Sp(A) \subset \{0, -3\}$

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A

On a $C_3 - C_2 = C_1$

donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_2, C_3)$

La famille (C_2, C_3) étant libre alors $rg(A) = 2$
donc par théorème

du rang, on a : $\dim(\ker A) = \cancel{1}\ 2 > 0$

donc $0 \in Sp(A)$

or, A est symétrique réelle donc diagonalisable

donc il existe une autre valeur propre possible
dont le sous-espace propre associé est de dimension 1
or, $Sp(A) \subset \{0 ; -1 ; -3\}$

donc $-3 \in Sp(A)$, $Sp(A) = \{-3 ; 0\}$

$c = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(A) \setminus \{0\}\}$

$c = 3$, car $|\lambda| = 3$, $\min(|\lambda|) = 3$

donc $\|Df\|^2 \geq 3\|f\|^2$

c) ~~III~~ $h \in F_n$

$\|Dh\|^2 \geq 3\|h\|^2$

~~donc $2n \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{3n}{2}$~~

Si $\|Dh\|^2 > 3\|h\|^2$

alors on a : $2n \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) > \frac{3n}{2}$

$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$

Impossible car $\exists n \in \mathbb{N} \mid \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$

Donc $\|Dh\|^2 = 3\|h\|^2$

donc $\sqrt{2n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 3\sqrt{\frac{n}{2}}$, $\|Dh\| = 3\|h\|$