

PARTIE I Etude d'une suite.

Q1) a) $u_2 = 2 - 1 + \frac{2}{2} \sum_{i=1}^{2-1} u_i = 1 + u_1$. $u_3 = 3 - 1 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{3-1} u_i = 2 + \frac{2}{3}(u_1 + u_2) = 2 + \frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3}(u_1 + 1)$.
 $u_3 = 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}u_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}u_1$. $u_2 = 1 + u_1$ et $u_3 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}u_1$.

b) Supposons que n soit élément de $\mathbb{N}$, $n \geq 0$.

$u_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ d'où $2 \sum_{i=1}^{n-1} u_i = n u_n - n(n-1)$.

De même $2 \sum_{i=1}^{n-2} u_i = (n-1)u_{n-1} - (n-1)(n-2)$ (car $n-1 \geq 1$).

Alors $2u_{n-1} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} u_i - 2 \sum_{i=1}^{n-2} u_i = n u_n - n(n-1) - (n-1)u_{n-1} + (n-1)(n-2)$

$2u_{n-1} = n u_n - (n-1)u_{n-1} - n^2 + n + n^2 - 3n + 2$; $0 = n u_n - (n-1+2)u_{n-1} - 2n + 2$.

Si n est élément de $\mathbb{N}$, $n \geq 1$, $n u_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$.

Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $n u_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$; $\frac{n u_n}{n(n+1)} - \frac{(n+1)u_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$.

Ainsi $v_n - v_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$.

b) Soit x un élément de $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} - 2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{4}{x+1} - \frac{2}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, $\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{4}{x+1}$.

c) Supposons que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

$v_n = v_n - v_2 + v_2 = \sum_{k=3}^n (v_k - v_{k-1}) + v_2 = \sum_{k=3}^n \frac{2(k-1)}{k(k+1)} + \frac{u_2}{3} = \sum_{k=3}^n \frac{-2}{k} + \sum_{k=3}^n \frac{4}{k+1} + \frac{1+u_1}{3}$.

$v_n = -2 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + 4 \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3}$.

$v_n = -2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 2n \frac{1}{2} + 4 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3} = 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3} + \frac{4}{n+1}$.

$$e) \quad u_n = (n+1) \left[2h_n + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1} \right].$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2h_n) = +\infty \quad \text{car } h_n \sim \ln n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1} \right] = \frac{u_1}{3} - 2.$$

$$\text{Ainsi } \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1} = o(h_n); \text{ par conséquent: } 2h_n + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1} \sim 2h_n.$$

$$\text{Alors } u_n \sim (n+1)(2h_n) \sim 2n h_n \sim 2n \ln n$$

$$\underline{\underline{u_n \sim 2n \ln n.}}$$

PARTIE II

[A]

$$[A] \quad E(Z) = \sum_{i=1}^p z_i p(Z=z_i).$$

$(A_1, A_2, \dots, A_q)$ est un système complet d'événements et $P(A_j) \neq 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

La formule des probabilités totales donne alors: $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(Z=z_i) = \sum_{j=1}^q P(Z=z_i / A_j) P(A_j)$

$$\text{Ainsi } E(Z) = \sum_{i=1}^p z_i \left(\sum_{j=1}^q P(Z=z_i / A_j) P(A_j) \right)$$

$$E(Z) = \sum_{j=1}^q \left[\sum_{i=1}^p z_i P(Z=z_i / A_j) \right] P(A_j) = \sum_{j=1}^q E(Z / A_j) P(A_j).$$

$$\underline{\underline{E(Z) = \sum_{j=1}^q P(A_j) E(Z / A_j).}}$$

Remarque. Ceci est encore vrai si $(A_1, A_2, \dots, A_q)$ est un système quasi-complet d'événements et que $P(A_j) \neq 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

Les deux versions (système complet et système quasi-complet) s'étendent encore au cas où Z prend pour que ses valeurs dans $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ (i.e. pour tout $j \in \mathbb{R} - \{z_1, z_2, \dots, z_p\}, P(Z=z_j) = 0 \dots$ ou $\sum_{i=1}^p P(Z=z_i) = 1$).

Avant de répondre aux questions nous allons préciser la notion de variable aléatoire presque sûrement continue et de variable aléatoire presque sûrement discrète dans un ensemble.

Soit la suite l'espace probabilisé de référence est $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Les variables aléatoires considérées se sont sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et sont discrètes.

• Soit X une telle variable aléatoire et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ une partie de $\mathbb{R}$ ayant r éléments.

X prend presque sûrement ses valeurs dans A si : $\sum_{k=1}^r P(X=a_k) = 1$

Remarque... Comme les événements $\{X=a_1\}, \{X=a_2\}, \dots, \{X=a_r\}$ sont deux à deux disjoints, X prend presque sûrement ses valeurs dans A si et seulement si $(\{X=a_k\})_{k \in \{1, \dots, r\}}$ est un système quasi-complet d'événements.

[P1] X prend presque sûrement ses valeurs dans $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R} - A, P(X=x) = 0$.

On C.N. Supposons que X prend presque sûrement ses valeurs dans A .

Soit $x \in \mathbb{R} - A$.

$$0 \leq P(X=x) = P(\{X=x\} \cup (\bigcup_{k=1}^r \{X=a_k\})) = P(\bigcup_{k=1}^r \{X=a_k\}) \leq 1 - \sum_{k=1}^r P(X=a_k) = 0$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} - A, P(X=x) = 0$.

C.S. Supposons que : $\forall x \in \mathbb{R} - A, P(X=x) = 0$.

$$\sum_{k=1}^r P(X=a_k) = P(\bigcup_{k=1}^r \{X=a_k\}) = P(X^{-1}(A)) \quad \text{car disjoints.}$$

$$1 = P(X^{-1}(\Omega)) = P(X^{-1}(A \cup \bar{A})) = P(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(\bar{A})) = P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(\bar{A})).$$

$$P(X^{-1}(\bar{A})) = P(X^{-1}(\bar{A} \cap X^{-1}(\mathbb{R}))) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \bar{A} \cap X^{-1}(\mathbb{R})\}) = \sum_{x \in \bar{A} \cap X^{-1}(\mathbb{R})} P(X=x) = 0$$

$$\text{Ainsi } 1 = P(X^{-1}(A)) + P(X^{-1}(\bar{A})) = P(X^{-1}(A)).$$

Donc $\sum_{k=1}^r P(X=a_k) = 1$. Ceci achève la preuve de P1.

P2 On suppose que X prend ses valeurs presque sûrement dans $A = \{a_1, \dots, a_r\}$.
 $E(X)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^r a_k P(X=a_k)$

Don Si X est fini, $E(X)$ existe. Supposons que $X(\omega)$ soit fini.

$$X(\omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}_0, +\infty\} \text{ avec } x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j.$$

$\forall x \in \mathbb{R} - A, P(X=x) = 0$, donc $\{k \in \mathbb{N} \mid P(X=x_k) \neq 0\}$ est fini; ainsi

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}_0, +\infty, P(X=x_k) = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}_0, +\infty, x_k P(X=x_k) = 0$. Par la suite de même général $x_k P(X=x_k)$ est absolument convergente et $E(X)$ existe !

$$E(X) = \sum_{x \in X(\omega)} x P(X=x) = \sum_{\substack{x \in X(\omega) \cap A \\ P(X=x) \neq 0 \text{ si } x \in A}} x P(X=x) = \sum_{x \in X(\omega) \cap A} x P(X=x) + \sum_{\substack{x \in X(\omega) \cap A \\ P(X=x) = 0 \text{ si } x \in A}} x P(X=x) = \sum_{x \in A} x P(X=x)$$

$$E(X) = \sum_{x \in A} x P(X=x) = \sum_{k=1}^r a_k P(X=a_k).$$

P3 Si X prend ses valeurs presque sûrement dans A et si A' est une partie finie de $\mathbb{R}$ contenant A alors X prend ses valeurs presque sûrement dans A' .

Don $\sum_{x \in A'} P(X=x) = \sum_{x \in A} P(X=x) + \sum_{\substack{x \in A' \cap A \\ P(X=x) = 0 \text{ si } x \notin A}} P(X=x) = \sum_{x \in A} P(X=x) = 1.$

P4 On suppose que X prend presque sûrement ses valeurs dans A et que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ prenant presque sûrement ses valeurs dans $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ (c'est-à-dire B fini).

Alors $X+Y$ prend presque sûrement ses valeurs dans $A+B = \{a_i+b_j; i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, p\}\}$

Don Soit $z \in \mathbb{R} - (A+B)$. Montrons que $P(X+Y=z) = 0$.

1^{er} Cas.. $\exists \theta (x+y)(2)$. Alors nécessairement $P(X+Y=3)=0$.

2^e Cas.. $\exists \in (x+y)(2)$. Poser $S_3 = \{(u,y) \in X(2) \times Y(2) \mid x+y=3\}$.

$$P(X+Y=3) = \sum_{(u,y) \in S_3} P(\{X=u\} \cap \{Y=y\})$$

Soit $(u,y) \in S_3$. Noter que $P(\{X=u\} \cap \{Y=y\})=0$;

$\exists \theta A+B$ dec ou $x \notin A$ ou $y \notin B$.

- si $x \notin A$. Alors $P(X=x)=0$. Or $0 \leq P(\{X=u\} \cap \{Y=y\}) \leq P(X=x)=0$
 donc $P(\{X=u\} \cap \{Y=y\})=0$ $\uparrow$ - conséquence de P
- si $y \notin B$. Alors $P(Y=y)=0$. Or $0 \leq P(\{X=u\} \cap \{Y=y\}) \leq P(Y=y)=0$
 donc $P(\{X=u\} \cap \{Y=y\})=0$.

Ainsi $\forall (u,y) \in S_3$, $P(\{X=u\} \cap \{Y=y\})=0$.

Par conséquent $P(X+Y=3)=0$

ce qui achève de prouver P4.

niveau

Voilà on peut maintenant travailler presque ^{niveau} sérieusement.

Q1) a) la formule des probabilités totales donne : $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1 / I_1 = 1) P(I_1 = 1) + P(X_2 = 1 / I_1 = 2) P(I_1 = 2) = \frac{1}{2} [P(2 - 1 + X_{2,1} = 1) + P(2 - 1 + X_{2,2} = 1)]$

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} [P(X_2 = 0) + P(X_2 = 0)] = \frac{1}{2} [1 + 1] = 1. \quad P(X_2 = 1) = 1.$$

Ainsi X_2 est une variable aléatoire presque sûrement égale à 1. $0_2 = E(X_2) = 1$

b) la formule des probabilités totales donne :

$$P(X_3 = 2) = P(X_3 = 2 / I_2 = 1) P(I_2 = 1) + P(X_3 = 2 / I_2 = 2) P(I_2 = 2) + P(X_3 = 2 / I_2 = 3) P(I_2 = 3)$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{1}{3} [P(3 - 1 + X_{3,1} = 2) + P(3 - 1 + Z_{3,2} + T_{3,2} = 2) + P(3 - 1 + X_{3,3} = 2)]$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{1}{3} [P(X_2 = 0) + P(Z_{3,2} + T_{3,2} = 0) + P(X_2 = 0)]$$

Or $P(X_2 = 0) = 0$ car X_2 est presque sûrement égale à 1, ainsi

$$P(X_3 = 2) = \frac{1}{3} [P(Z_{3,2} + T_{3,2} = 0)].$$

$Z_{3,2}$ (resp. $T_{3,2}$) suit la même loi que $X_{2,1} = X_2$ (resp. $X_{3,2} = X_2$) et X_2

est la variable constante égale à 0. Or $Z_{3,2} + T_{3,2}$ est également la variable constante égale à 0 ; $P(Z_{3,2} + T_{3,2} = 0) = 1$. $P(X_3 = 2) = \frac{1}{3}$.

la formule des probabilités totales donne encore :

$$P(X_3 = 3) = \sum_{i=1}^3 P(X_3 = 3 / I_2 = i) P(I_2 = i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 P(X_3 = 3 / I_2 = i)$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{3} [P(X_3 = 3 / I_2 = 1) + P(X_3 = 3 / I_2 = 2) + P(X_3 = 3 / I_2 = 3)]$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{3} [P(3 - 1 + X_2 = 3) + P(3 - 1 + Z_{3,2} + T_{3,2} = 3) + P(3 - 1 + X_2 = 3)]$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{3} [P(X_2 = 1) + P(Z_{3,2} + T_{3,2} = 1) + P(X_2 = 1)]$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{3} [1 + 0 + 1] \quad (P(X_2 = 1) = 1 \text{ et } Z_{3,2} + T_{3,2} = 0) ; \quad \underline{P(X_3 = 3) = \frac{2}{3}}.$$

$$\underline{P(X_3 = 2) = \frac{1}{3} \text{ et } P(X_3 = 3) = \frac{2}{3} \dots \forall x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}, P(X_3 = x) = 0.}$$

X_3 prend donc presque sûrement ses valeurs dans $\{2, 3\}$. Ainsi $E(X_3) = 2P(X_3 = 2) + 3P(X_3 = 3)$

$$E(X_3) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad \underline{\underline{U_3 = E(X_3) = \frac{8}{3}}}$$

Q2) Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule des probabilités totales donne : $\frac{4}{3} P(X_4 = x) = \sum_{i=1}^4 P(X_4 = x / I_4 = i) P(I_4 = i)$

$$P(X_4 = x) = \frac{1}{4} [P(X_4 = x / I_4 = 1) + P(X_4 = x / I_4 = 2) + P(X_4 = x / I_4 = 3) + P(X_4 = x / I_4 = 4)]$$

$$P(X_4 = x) = \frac{1}{4} [P(4-3 + X_{4,3} = x) + P(4-3 + Z_{4,2} + T_{4,2} = x) + P(4-3 + Z_{4,3} + T_{4,3} = x) + P(4-3 + X_{4,1} = x)]$$

$$P(X_4 = x) = \frac{1}{4} [3 P(X_3 = x-3) + P(Z_{4,2} + T_{4,2} = x-3) + P(Z_{4,3} + T_{4,3} = x-3)]$$

$Z_{4,2}, T_{4,2}, Z_{4,3}, T_{4,3}$ ont respectivement même loi que : X_3, X_2, X_2, X_3 ; ainsi $Z_{4,2} + T_{4,2}$ et $Z_{4,3} + T_{4,3}$ ont même loi ; ainsi $Z_{4,2} + T_{4,2}$ et $Z_{4,3} + T_{4,3}$ ont même loi que X_2 ou $X_3 = 0$.

$Z_{4,2} + T_{4,2}$ et $Z_{4,3} + T_{4,3}$ sont presque sûrement constantes égales à 1.

$$P(Z_{4,2} + T_{4,2} = x-3) = P(Z_{4,3} + T_{4,3} = x-3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-3 \neq 1 \\ 1 & \text{si } x-3 = 1 \quad (\text{ie } x=4) \end{cases}$$

$$P(X_3 = x-3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-3 \notin \{3, 5\} \\ \frac{1}{6} & \text{si } x-3 = 2 \quad (\text{ie } x=5) \\ \frac{2}{3} & \text{si } x-3 = 3 \quad (\text{ie } x=6) \end{cases}$$

Finalement $P(X_4 = x) = \frac{1}{4} [2 P(X_3 = x-3) + 2 P(Z_{4,2} + T_{4,2} = x-3)]$

$$P(X_4 = x) = \frac{1}{2} [P(X_3 = x-3) + P(Z_{4,2} + T_{4,2} = x-3)] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{4, 5, 6\} \\ \frac{1}{2} (0+1) & \text{si } x=4 \\ \frac{1}{2} (\frac{1}{6}+0) & \text{si } x=5 \\ \frac{1}{2} (\frac{2}{3}+0) & \text{si } x=6 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}(\frac{1}{6}+0) = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2}(\frac{2}{3}+0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1.$$

X_4 prend presque sûrement ses valeurs dans $\{4, 5, 6\}$.

$$\underline{\underline{P(X_4 = 4) = \frac{1}{2} ; \quad P(X_4 = 5) = \frac{1}{6} ; \quad P(X_4 = 6) = \frac{1}{3} .}}$$

Alors $E(X_4) = 4 P(X_4 = 4) + 5 P(X_4 = 5) + 6 P(X_4 = 6) = 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{3} = \frac{29}{6}.$

$$\underline{\underline{U_4 = E(X_4) = \frac{29}{6} .}}$$

③ Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket$. Notons que ceci vaut déjà pour $n=1$ et $n=2$.

Montrons à l'aide d'une récurrence faible que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} - \llbracket 0, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket, P(X_n = x) = 0$.

→ La propriété est vraie pour $n=3$ ($\llbracket 0, \frac{3(3-1)}{2} \rrbracket = \llbracket 0, 3 \rrbracket$) et X_3 prend presque

sûrement ses valeurs dans $\{1, 2\}$ donc presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, 3 \rrbracket$

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ ($n \geq 4$) et montrons la pour n .

Soit $x \in \mathbb{R} - \llbracket 0, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket$, montrons que $P(X_n = x) = 0$.

Une fois encore : $P(X_n = x) = \sum_{i=1}^n P(X_n = x | I_n = i) P(I_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(X_n = x | I_n = i)$.

$$nP(X_n = x) = P(n-1 + X_{n-1} = x) + \sum_{i=2}^{n-1} P(n-2 + Z_{n,i} + T_{n,i} = x) + P(n-1 + X_{n-1} = x).$$

$$nP(X_n = x) = P(X_{n-1} = x - n + 1) + \sum_{i=2}^{n-1} P(Z_{n,i} + T_{n,i} = x - n + 1) + P(X_{n-1} = x - n + 1).$$

$$nP(X_n = x) = 2P(X_{n-1} = x - n + 1) + \sum_{i=2}^{n-1} P(Z_{n,i} + T_{n,i} = x - n + 1).$$

X_{n-1} prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, \frac{(n-1)(n-2)}{2} \rrbracket = \llbracket 0, \sum_{k=1}^{n-2} k \rrbracket$.

$n-1 + X_{n-1}$ prend alors presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket n-1, \sum_{k=1}^{n-2} k + n-1 \rrbracket$

$n-1 + X_{n-1}$ prend alors presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket n-1, \sum_{k=1}^{n-1} k \rrbracket = \llbracket n-1, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket$.

Or $x \notin \llbracket 0, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket$ donc $x \notin \llbracket n-1, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket$; ainsi $P(n-1 + X_{n-1} = x) = 0$.

$P(X_{n-1} = x - n + 1) = 0$. Soit i un élément de $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$. $1 \leq i-1 \leq n-2$ et $1 \leq n-i \leq n-2$.

$Z_{n,i}$ a la même loi que X_{i-1} et X_{i-1} prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, \frac{(i-1)(i-2)}{2} \rrbracket$.

$T_{n,i}$ a la même loi que X_{n-i} et X_{n-i} prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} \rrbracket$.

Ainsi $Z_{n,i} + T_{n,i}$ prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket 0, \frac{(i-1)(i-2)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} \rrbracket$.

Donc $n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$ prend presque sûrement ses valeurs dans $\llbracket n-1, n \rrbracket$ avec

$$\alpha = \frac{(i-1)(i-2)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} + n-1 = \frac{1}{2} [i^2 - 3i + 2 + n^2 - ni - n - ni + i^2 + i + n - 2]$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - \alpha = \frac{1}{2} [n^2 - n - i^2 + 3i - 2 + n^2 + ni + n + ni - i^2 - i - n + 2] = \frac{1}{2} [2ni + 2i - 2i^2 - 2]$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - \alpha = ni + i - i^2 - n = n(i-1) - i(i-1) = (n-i)(i-1) \geq 0; \quad \alpha \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Alors $[[n-1, 0]] \subset [0, \frac{n(n-1)}{2}]$; ainsi $n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$ prend également presque sûrement ses valeurs dans $[0, \frac{n(n-1)}{2}]$.

Comme $x \notin [0, \frac{n(n-1)}{2}]$, $P(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = x) = 0$; $P(Z_{n,i} + T_{n,i} = x - n + 1) = 0$.

Finalement: $P(X_{n,i} = x - n + 1) = 0$ et $\forall i \in [[2, n-1]]$, $P(Z_{n,i} + T_{n,i} = x - n + 1) = 0$.

Alors $n P(X_n = x) = 0$; $P(X_n = x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R} - [0, \frac{n(n-1)}{2}]$, $P(X_n = x) = 0$.

X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, \frac{n(n-1)}{2}]$ et ainsi l'adhère la mesure.

Rappelons que la propriété est également vraie pour $n=1$ et 2 ($X_1 = 0$ et X_2 est presque sûrement constant égale à 1); nous l'avons d'ailleurs utilisée dans la preuve.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $[0, \frac{n(n-1)}{2}]$.

(94) On s'appuie la partie II A, $E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_n / I_n = i) P(I_n = i)$

Supposons $n \geq 3$.

$$\text{Alors } E(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n E(X_n / I_n = i) = \frac{1}{n} [E(X_n / I_n = 2) + E(X_n / I_n = n) + \sum_{i=2}^{n-1} E(X_n / I_n = i)].$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} [E(n-1 + X_{n-1}) + \sum_{i=2}^{n-1} E(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i}) + E(n-1 + X_{n-1})].$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} [2(n-1)E(X_{n-1}) + \sum_{i=2}^{n-1} [E(Z_{n,i}) + E(T_{n,i}) + n-1]] \quad \text{car } Z \text{ est indépendant de } T \text{ et } X_{n-1}.$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} [2E(X_{n-1}) + \sum_{i=2}^{n-1} E(n-i) + \sum_{i=2}^{n-1} E(X_{n-1}) + 2(n-1) + (n-2)(n-1)].$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} \left[2V_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} V_i + \sum_{i=2}^{n-1} V_{n-i} + n(n-1) \right].$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} \left[2V_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} V_i + \sum_{i=1}^{n-2} V_i + n(n-1) \right].$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left[2 \sum_{i=1}^{n-1} V_i + n(n-1) \right]. \quad V_n = n-1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} V_i.$$

Pour $n=2$: $V_n = 1$ et $n-1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} V_i = 2-1 + \frac{2}{2} \sum_{i=1}^1 V_i = 1 + V_1 = 1$.

Alors pour $n \geq 2$: $V_n = n-1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} V_i$

b) d'après I $V_n \sim \ln n$.

Q5 a) $n \geq 3$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Notons nous prouvons dans Q3 que :

$$n P(X_n = k) = 2 P(n-1 + X_{n-1} = k) + \sum_{i=2}^{n-1} P(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = k).$$

une probabilité étant un réel positif :

$$P(X_n = k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(n-1 + X_{n-1} = k) = 0 \\ \forall i \in \mathbb{I}2, n-1\mathbb{I}, P(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = k) = 0 \end{cases}$$

$$P(X_n = \alpha_n) \neq 0 \text{ d'ac } P(n-1 + X_{n-1} = \alpha_n) \neq 0 \text{ ou } \exists i \in \mathbb{I}2, n-1\mathbb{I}, P(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = \alpha_n) \neq 0.$$

Dans le premier cas : $P(X_{n-1} = \alpha_n - n + 1) \neq 0$ d'ac $\alpha_n - n + 1 \geq \alpha_{n-1}$ c'est à dire $\alpha_n \geq n-1 + \alpha_{n-1}$.

Examinons le second cas ; $\exists i \in \mathbb{I}2, n-1\mathbb{I}, P(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = \alpha_n) \neq 0$.

$$\text{Alors } 0 \neq P(n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = \alpha_n) = \sum_{a \in T_{n,i}(\mathbb{R})} P((T_{n,i} = a) \cap (Z_{n,i} = \alpha_n - n + 1 - a))$$

une probabilité étant un réel positif, $\exists a \in T_{n,i}(\mathbb{R}), P((T_{n,i} = 0) \cap (Z_{n,i} = \alpha_n - n + 1 - a)) \neq 0$

Or $\{T_{n,i}=a\} \cap \{Z_{n,i}=\alpha_{n-n+1}-a\}$ est contenu dans $\{T_{n,i}=a\}$ et $\{Z_{n,i}=\alpha_{n-n+1}-a\}$.

Ainsi $0 < P(\{T_{n,i}=a\} \cap \{Z_{n,i}=\alpha_{n-n+1}-a\}) \leq P(T_{n,i}=a)$ et

$$0 < P(\{T_{n,i}=a\} \cap \{Z_{n,i}=\alpha_{n-n+1}-a\}) \leq P(Z_{n,i}=\alpha_{n-n+1}-a).$$

Alors $P(X_{n-i}=a) = P(T_{n,i}=a) \neq 0$; $a \geq \alpha_{n-i}$

$$P(X_{i-1}=\alpha_{n-n+1}-a) = P(Z_{n,i}=\alpha_{n-n+1}-a) \neq 0 ; \alpha_{n-n+1}-a \geq \alpha_{i-1}.$$

Si $\alpha_n \geq n-1 + a + \alpha_{i-1} \geq n-1 + \alpha_{n-i} + \alpha_{i-1}$.

Ainsi $\alpha_n \geq n-1 + \alpha_{n-1}$ ou $\exists i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $\alpha_n \geq n-1 + \alpha_{n-i} + \alpha_{i-1} = n-1 + \alpha_{i-1} + \alpha_{n-i}$

α_n est au moins égal au minimum des nombres $n-1 + \alpha_{n-1}$, $n-1 + \alpha_1 + \alpha_{n-2}$, $n-1 + \alpha_2 + \alpha_{n-3}$, ..., $n-1 + \alpha_{n-2} + \alpha_2$

b) i) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{\ln x} - 2$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \frac{1}{x \ln x} \geq 0$.

Ainsi g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0, 1]$, $g(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)$.

En particulier : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $g(\frac{a+b}{2}) = g(\frac{1}{2}a + (\frac{1}{2})b) \leq \frac{1}{2}g(a) + (\frac{1}{2})g(b) = \frac{g(a)+g(b)}{2}$.

Alors si $(i, n) \in \mathbb{N}^2$ et si $2 \leq i \leq n-1$: $g(\frac{i+n+1-i}{2}) \leq \frac{g(i)+g(n+1-i)}{2}$.

Donc $\forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$, $2 \leq i \leq n-1 \Rightarrow g(\frac{n+1}{2}) \leq \frac{1}{2}(g(i)+g(n+1-i))$.

$\forall (i, n) \in \mathbb{N}^2$, $2 \leq i \leq n-1 \Rightarrow g(i)+g(n+1-i) \geq 2g(\frac{n+1}{2})$.

ii) $g(n+1) - g(n) = (n+1)\log_2(n+1) - 2(n+1) + 2 - n\log_2(n) + 2n - 2 = \log_2(n+1) + n(\log_2(n+1) - \log_2(n)) - 2$

$$g(n+1) - g(n) = \log_2(n+1) + \frac{n}{\ln 2} \left(\ln \frac{n+1}{n} \right) - 2 = \log_2(n+1) + \frac{n}{\ln 2} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) - 2$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \leq x$; donc : $g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1) + \frac{n}{\ln 2} \times \frac{1}{n} - 2 = \log_2(n+1) + \frac{1}{\ln 2} - 2$

Or $\frac{1}{\ln 2} - 2 \leq 0$ donc $g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1)$.

Pour avoir $g(n+1) - g(n) \leq n-1$, il suffit d'avoir $\log_2(n+1) \leq n-1$ car $g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1)$.

$$\log_2(n+1) \leq n-1 \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} \leq n-1 \Leftrightarrow \ln(n+1) \leq (n-1)\ln 2 \Leftrightarrow n+1 \leq 2^{n-1}$$

Si $n=1, 2, \dots$ l'énoncé admet par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{I}, n+1 \leq 2^{n-1}$

→ Prouvons pour $n=1$ ($1+1 \leq 2^{1-1} \Leftrightarrow 2 \leq 1$!)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{I}$ et montrons la pour $n+1$.

$$2^{n-1} \geq n+1; \quad 2^{(n+1)-1} = 2^n \geq 2(n+1) = n+2 + (n) \geq n+2. \text{ Ceci achève l'énoncé.}$$

$$\text{Ainsi: } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{I}, 2^{n-1} \geq n+1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{I}, g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1) \leq n-1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{I}, g(n+1) - g(n) \leq n-1.$$

$$\text{Si } n=1: g(n+1) - g(n) = g(2) - g(1) = 2\log_2 2 - 4 + 2 - (\log_2 1 + 1 - 2) = 2 - 4 + 2 - 0 + 2 - 1 = 0 = n-1$$

$$\text{Donc si } n=1: g(n+1) - g(n) = n-1 \leq n-1!$$

$$\text{Si } n=2: g(n+1) - g(n) = 3\log_2 3 - 6 + 2 - 2\log_2 2 + 4 - 2 = \log_2 27 - 6 + 2 - 4 + 2 = (\log_2 27 - 4)$$

$$g(n+1) - g(n) = \log_2 27 - 5 + 1 = 3 + \log_2 27 - \log_2 2^5 = 3 + \log_2 \frac{27}{2^5} \leq 1 = n-1$$

Finalement: $g(n+1) - g(n) \leq n-1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

(Q6) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geq (n+1)\log_2(n+1) - \alpha_n = g(n+1)$.

$$\rightarrow \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0. \quad g(2) = 2\log_2 2 - 2 = 0. \text{ La propriété est vraie pour } n=1.$$

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à $n-1$ (i.e.) et montrons la pour n .

$$\alpha_n \geq \alpha_n(n-1 + \alpha_{n-1}, n-1 + \alpha_1 + \alpha_{n-2}, n-1 + \alpha_2 + \alpha_{n-3}, \dots, n-1 + \alpha_{n-2} + \alpha_2)$$

$$n-1 + \alpha_{n-1} \geq g(n-1) \text{ et } \forall i \in \mathbb{I}, n-2, \mathbb{I}, n-1 + \alpha_{i-1} + \alpha_{n-i} \geq n-1 + g(i) + g(n-i)$$

$$\text{Or } g(n+1) - g(n) \leq n-1 \text{ d'où}$$

$$n-1 + g(n) \geq g(n+1); \text{ par conséquent: } n-1 + \alpha_{n-1} \geq g(n+1).$$

doit $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

$$n-1 + \alpha_{i-1} + \alpha_{n-i} \geq n-1 + g(i) + g(n-i+1) \geq n-1 + 2g\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

$$n-1 + 2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = n-1 + 2\left(\frac{n+1}{2} \log_2 \frac{n+1}{2} - 2 \times \frac{n+1}{2} + 2\right)$$

$$n-1 + 2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = n-1 + (n+1)(\log_2(n+1) - \log_2 2) - 2n + 2$$

$$n-1 + 2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = (n+1)\log_2(n+1) + n-1 - (n+1)\log_2 2 - 2n + 2. \text{ Notons que } \log_2 2 = 1.$$

$$n-1 + 2g\left(\frac{n+1}{2}\right) = (n+1)\log_2(n+1) + n-1 - n-1 - 2n + 2 = (n+1)\log_2(n+1) - 2n = g(n+1).$$

$$\text{Donc } n-1 + \alpha_{i-1} + \alpha_{n-i} \geq g(n+1).$$

$$n-1 + \alpha_{n-1} \geq g(n+1) \text{ et } \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, n-1 + \alpha_{i-1} + \alpha_{n-i} \geq g(n+1).$$

$$\text{Rais } \alpha_n \geq \min(n-1 + \alpha_{n-1}, n-1 + \alpha_1 + \alpha_{n-2}, n-1 + \alpha_2 + \alpha_{n-3}, \dots, n-1 + \alpha_{n-2} + \alpha_3) \geq g(n+1).$$

Ceci adéq. la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \geq (n+1)\log_2(n+1) - 2n.$$

PARTIE III Etude d'un algorithme de tri.

A Sans toute la suite nous notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations de E .
Comme E a n éléments, $\mathcal{S}$ a $n!$ éléments.

Q1 $T_2(e_1) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. doit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$P(T_2 = e_k) = P(\{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma(e_1) = e_k\}) = \frac{\text{card}\{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma(e_1) = e_k\}}{\text{card } \mathcal{S}}.$$

$$P(T_2 = e_k) = \frac{1}{n!} \text{card}\{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma(e_1) = e_k\}$$

considère une permutation de $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ qui transforme e_1 en e_k
soit à considérer une bijection de $E - \{e_1\}$ sur $E - \{e_k\}$. $E - \{e_1\}$ et $E - \{e_k\}$
ont $n-1$ éléments. Il y a donc $(n-1)!$ bijections de $E - \{e_1\}$ sur $E - \{e_k\}$.

Ainsi $\{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma(e_1) = e_k\}$ a $(n-1)!$ éléments.

$$P(T_1 = e_k) = \frac{1}{n!} \times (n-1)! = \frac{1}{n}.$$

$\forall k \in \{1, n\}, P(T_1 = e_k) = \frac{1}{n}$. T_1 suit une loi uniforme sur E

Remarque... Il en est de même de $T_2, T_3, \dots, T_n$.

Q2) Nous supposons pour chaque i la définition des $T'_1, T'_2, \dots, T'_{n-1}$ que
 $\circ$ n'est pas élément de E !!

a) Pour construire une liste d'actions $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ vérifiant $2 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq n$
 il convient d' se choisir k éléments distincts de $\{1, n\}$; il y a C_n^k possibilités de le faire;
 d' se les ordonner dans l'ordre croissant; il y a une possibilité de le faire.

Il y a donc C_n^k listes $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ d'actions vérifiant $2 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq n$.

b) Soit σ une permutation de E . Pour tout $j \in \{1, n\}$, notons $p_j(c_j)$ le rang de c_j dans
 la liste $(\sigma(c_1), \sigma(c_2), \dots, \sigma(c_n))$ (si $k \in \{1, n\}$, $p_j(c_j) = k' \Leftrightarrow \sigma(c_{k'}) = c_j$).

Nous définirons ainsi une application p_σ de E dans $\{1, n\}$; p_σ est à fait
 une bijection de E sur $\{1, n\}$. Notation dérivée par p_σ .

L'application $\sigma \mapsto p_\sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur l'ensemble des bijections E
 sur $\{1, n\}$.

Notons H l'ensemble $\bigcap_{j=1}^k [T'_j = v_j] \cap [T_1 = e_{k+1}]$.

Soit σ un élément de $\mathcal{S}$

$$\sigma \in H \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(e_1) = e_{k+1} \\ \text{pour tout } j \in \{1, k\}, \text{ le } j^{\text{ème}} \text{ élément de } (\sigma(c_1), \sigma(c_2), \dots, \sigma(c_n)) \text{ inférieure} \\ \text{à } \sigma(c_1) = e_{k+1} \text{ est } v_j \end{cases}$$

Notons que $v_1, v_2, \dots, v_k$ sont les k éléments de E strictement inférieurs à e_{k+1} .

$$\text{Ainsi } \sigma \in H \Leftrightarrow \begin{cases} p_0(\alpha_{k+1}) = 1 \\ 2 \leq p_0(\alpha_1) < p_0(\alpha_2) < \dots < p_0(\alpha_k) \leq n \end{cases}$$

Résulte qu'il y a autant d'éléments dans H que de bijection f de E sur $\mathbb{I}_1, n \mathbb{I}$ vérifiant : $p(\alpha_{k+1}) = 1$ et $p(\alpha_1) < p(\alpha_2) < \dots < p(\alpha_k)$.

On construit une telle bijection

1° on donne pour image 1 à α_{k+1} (unicité)

2° on choisit une suite d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ telle que $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités)

3° pour tout j dans $\mathbb{I}_1, k \mathbb{I}$ on donne pour image i_j à α_j

4° on construit une bijection de $\{\alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n\}$ sur $\mathbb{I}_{k+1}, n \mathbb{I} - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$; il y a $(n - (k+1))!$ possibilités.

$$\text{Ainsi } \text{card } H = 1 \times \binom{n}{k} \times 1 \times (n - (k+1))! = \frac{(n-1)!}{k!} \times (n - (k+1))! = \frac{(n-1)!}{k!}$$

$$\text{Alors } P(H) = \frac{\text{card } H}{\text{card } E} = \frac{\frac{(n-1)!}{k!}}{n!} = \frac{1}{n \cdot k!}$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k [T_j = \alpha_j] \cap [T_{k+1} = \alpha_{k+1}]\right) = \frac{1}{n \cdot k!}$$

$$\text{c) } P\left(\bigcap_{j=1}^k [T_j = \alpha_j] \mid [T_{k+1} = \alpha_{k+1}]\right) = P \frac{P\left(\bigcap_{j=1}^k [T_j = \alpha_j] \cap [T_{k+1} = \alpha_{k+1}]\right)}{P([T_{k+1} = \alpha_{k+1}])} = \frac{\frac{1}{n \cdot k!}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{k!}$$

$$\text{Ainsi } P\left(\bigcap_{j=1}^k [T_j = \alpha_j] \mid [T_{k+1} = \alpha_{k+1}]\right) = \frac{1}{k!}$$

- Q1 a) L'instruction $\text{Tri}(T, i, i)$ provoque l'appel de la procédure Tri ,
 deb et fin recevant la valeur de i . Comme $\text{fin} \leq \text{deb}$
 le test est négatif ($(\text{fin} > \text{deb})$ est le booleen *false*) et
 ainsi l'achève l'appel de la procédure; Tu n'as fait aucune modification.
 b) nous écrivons $A = a$ pour dire que A reçoit la valeur $a \dots$

1. L'appel $\text{Tri}(T, 1, 5)$ $T = [2, 9, 6, 1, 5]$

$\text{deb} = 1$ $\text{fin} = 5$; $5 > 1$; on exécute $\text{place}(T, \text{deb}, \text{fin}, \text{pl})$ qui va
 mettre 2 à sa place dans le tableau.

Après l'exécution de cette instruction $\text{pl} = 2$ et $T = [1, 2, 9, 6, 5]$

$\text{pl} > \text{deb}$ ($2 > 1$) et $\text{pl} < \text{fin}$ ($2 < 5$)

Ainsi nous exécutons successivement $\text{Tri}(T, \text{deb}, \text{pl}-1)$ et $\text{Tri}(T, \text{pl}+1, \text{fin})$.

2. L'appel $\text{Tri}(T, \text{deb}, \text{pl}-1)$ le tableau rate un change car $\text{deb} = 1$ et $\text{pl}-1 = 1$

3. L'appel $\text{Tri}(T, \text{pl}+1, \text{fin})$

$\text{deb} = 3$, $\text{fin} = 5$; $5 > 3$; on exécute $\text{place}(T, \text{deb}, \text{fin}, \text{pl})$ qui va
 mettre 9 à sa place dans le tableau $[1, 2, 6, 5, 9]$.

Après l'exécution de cette instruction $\text{pl} = 5$ et $T = [1, 2, 6, 5, 9]$

$5 > 3$ mais on n'a pas $5 < 5$

Ainsi nous n'exécutons que $\text{Tri}(T, \text{deb}, \text{pl}-1)$

4. L'appel $\text{Tri}(T, \text{deb}, \text{pl}-1)$

$\text{deb} = 3$ et $\text{fin} = 4$; $4 > 3$; on exécute $\text{place}(T, \text{deb}, \text{fin}, \text{pl})$ qui
 va mettre 6 à sa place dans le tableau $[1, 2, 5, 6, 9]$

Après l'exécution de cette instruction $\text{pl} = 4$ et $T = [1, 2, 5, 6, 9]$

$\text{pl} > \text{deb}$ ($4 > 3$) mais on n'a pas $\text{pl} < \text{fin}$ ($4 < 4$ est *false*)

Ainsi nous exécutons $\text{Tri}(T, \text{deb}, \text{pl}-1)$ uniquement

5. L'appel $\text{Tri}(T, \text{deb}, \text{pl}-1)$ dans le dernier état car ($\text{deb} = 3$ et
 $\text{pl}-1 = 3$).

Ceci termine l'appel 4, qui termine l'appel 3 et qui
 achève l'appel 1 non ?! le tableau est trié.

Résumé. Pour trier le tableau $[2, 9, 6, 3, 5]$:

1^o on met 2 à sa place et on obtient le tableau $[1, 2, 9, 6, 5]$. $pe = 2$.

2^o on trie les sous-tableaux $[9]$ et $[9, 6, 5]$

Il n'y a rien à faire pour le premier car sa longueur est 1 (donc $deb \geq fin$)

pour trier $[9, 6, 5]$

1^o on met 9 à sa place et on obtient le tableau $[6, 5, 9]$. $pe = 5$.

2^o on trie les sous-tableaux $[6, 5]$ et $[]$!

Le second est vide. Il n'y a donc rien à faire.

pour trier $[6, 5]$

1^o on met 6 à sa place et on obtient $[5, 6]$. $pe = 4$.

2^o on trie les sous-tableaux $[5]$ et $[]$ dans la deuxième car il n'y a rien à faire.

Le tableau initial a été trié de la manière suivante :

$[2, 9, 6, 3, 5] \rightarrow [1, 2, 9, 6, 5] \rightarrow [1, 2, 6, 5, 9] \rightarrow [1, 2, 5, 6, 9]$.

$pe = 2$

$pe = 5$

$pe = 4$

c) L'algorithme précédent est un algorithme récursif qui met les éléments d'un tableau T dans l'ordre croissant de la manière suivante

1^o on met le premier élément du tableau à sa place par glissement.

2^o on trie suivant le même principe les deux sous-tableaux constitués par les éléments restant à la droite et les éléments restant à gauche de l'élément à sa place.

L'algorithme s'arrête lorsqu'on est parvenu à la suite de la queue des sous-tableaux constitués de manière et on considère comme trié un sous-tableau vide ou de longueur 1.

(Q2) aj. si $n=1$, l'appel $\text{Tri}(T, 1, 1)$ ne nécessite pas l'utilisation de la procédure Place . Ainsi X_1 et la variable certaine nulle.

• Supposons $n \geq 2$.

L'appel $\text{Tri}(T, 1, n)$ commence par un appel $\text{Place}(T, 1, n)$ qui fait $n-1$ comparaisons d'une place de $T[1]$ dans le tableau. Cette place est une variable aléatoire J_n qui suit clairement une loi uniforme sur $\{1, n\}$.
1^{er} cas... J_n prend la valeur 1.

Il reste alors qu'à trier un tableau de longueur ϕ et un tableau de longueur $n-1$. Le tri d'un tableau vide ne nécessite pas l'usage de Place . Le tri d'un tableau de longueur $n-1$ nécessite X_{n-1} comparaisons relatives aux appels de Place .

Alors la loi de X_n satisfait que J_n vaut 1 et la même que la loi de $n-1 + X_{n-1}$.

2nd cas... J_n prend la valeur n . Même chose. Le premier sous-tableau à trier est de longueur $n-1$ et le deuxième est vide.

Supposons $n \geq 3$.

3rd cas... J_n prend la valeur i avec $i \in \{2, n-1\}$. La place du premier élément dans le tableau est i . Le premier appel de

Place , qui s'est fait en $n-1$ comparaisons, a amené le premier élément à sa place. $i-1$ élément sont à sa gauche et $n-i$ à sa droite.

La suite se déroule ensuite à trier un tableau de longueur $i-1$ et un tableau de longueur $n-i$. Notons $Z_{n,i}$ (resp. $T_{n,i}$) le nombre de comparaisons relatives à la procédure Place pour trier le tableau de longueur i (resp. $n-i$).

• $Z_{n,i}$ et $T_{n,i}$ sont indépendantes

- $Z_{n,i}$ (resp. $T_{n,i}$) a même loi que X_{i-1} (resp. X_{n-i}).
- la loi de X_n sachant que $I_n = i$ est la même que la loi de $n-1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$.

par conséquent $(X_n)_{n \geq 1}$ vérifie les hypothèses de II.B.

Alors $E(X_n) \sim \ln n$

Remarque... c'est un excellent résultat. Rappelons que les triés classiques (bulle, insertion, ...) ont le plus souvent a $O(n^2)$

b) notons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le tri de $(n, n-1, \dots, 1, 1)$ nécessite $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons

→ c'est clair pour $n=1$. Le tableau de longueur 1 est déjà trié et pour $n=2$, $\frac{n(n-1)}{2} = 0$

→ supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons le pour $n+1$.

La première phase du tri de $(n+1, n, \dots, 1, 1)$ amène n ($n+1-1$) comparaisons $n+1$ à sa place. Reste à trier le tableau vide et le tableau $(n, n-1, \dots, 1, 1)$ cela nécessite, d'après l'hypothèse de récurrence, $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons.

En tout $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ comparaisons ont été nécessaires pour

trier $(n+1, n, \dots, 1, 1)$ et la récurrence s'achève.

Le tableau $(n, n-1, \dots, 1)$ est trié en $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque... le résultat est le même pour $(1, 2, \dots, n)$.

Remarque... $\frac{n(n-1)}{2}$ est le nombre maximum de comparaisons nécessaires au tri d'un tableau de longueur n .

5) considérons le tableau $(4, 2, 6, 3, 5, 3, 7)$

6 comparaisons et échanges pour mettre 4 à sa place.

il obtient $(2, 3, 3, \underline{4}, 6, 5, 7)$ et il reste à trier les sous-tableaux $(2, 3, 3)$ et $(6, 5, 7)$.

Pour $(2, 3, 3)$, deux comparaisons et échanges pour mettre 2 à sa place ; on obtient $(\underline{2}, 3, 3)$. Reste deux tableaux de longueur 1 à trier ce qui ne nécessite aucune comparaison ... du type "placé".

même chose pour $(6, 5, 7)$; deux comparaisons et échanges pour trier ce tableau.

Le tri de $(4, 2, 6, 3, 5, 3, 7)$ nécessite 30 comparaisons.

Remarque... 30 est le minimum de comparaisons nécessaires pour trier un tableau de longueur 7.

1) Rappelons que $g(n+1) = (n+1) \frac{h(n+1)}{\ln 2} - 2(n+1) + 2$

Ainsi pour que $g(n+1)$ soit un entier il suffit que $\exists k \in \mathbb{N}, \frac{h(n+1)}{\ln 2} = k$.

doit être un entier. $\frac{h(n+1)}{\ln 2} = k \Leftrightarrow h(n+1) = k \ln 2 \Leftrightarrow h(n+1) = k 2^k \Leftrightarrow n+1 = 2^k \Leftrightarrow n = 2^k - 1$.

Notons que $2^0 - 1 = 0$! Pour $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = 2^k - 1$.

Notons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un tableau de longueur C_k qui nécessite $g(C_k+1)$ comparaisons pour être trié.

. Soit donc pour $k=1$ on a $C_1 = 1$ et $g(C_1+1) = g(2) = 0$.

. Supposons la propriété vraie pour un entier k de $\mathbb{N}^*$ et notons le pour $k+1$.

Pour $n = C_{k+1}$. $n = 2^{k+1} - 1$. $\mathbb{Z} = \{1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1\} = \{1, 2, \dots, n\}$

Pour $a_2 = 2^k$ le nombre d'éléments de E supérieurs à a_2 est

2^{k-1} et le nombre d'éléments de E supérieurs à a_2 est 2^{k-1} .

Rappelons que $2^{k-1} = c_k$. L'hypothèse de récurrence ne permet d'affirmer que E se situe au tableau $(a_2, a_3, \dots, a_{2^k})$ constitué des éléments de $\{2, 3, \dots, 2^{k-1}\}$ qui nécessite $g(c_k + 1)$ comparaisons pour être trié.

De même E se situe au tableau $(a_{2^{k+1}}, \dots, a_n)$ constitué des éléments de $\{2^{k+1}, \dots, n\}$ qui nécessite $g(c_k + 1)$ comparaisons pour être trié.

Mais pour trier $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ il y a aussi à faire :

→ $n-1$ comparaisons pour amener a_1 à sa place

→ $g(c_k + 1)$ comparaisons pour trier la partie non-triée du tableau $(a_2, a_3, \dots, a_{2^k})$.

→ $g(c_k + 1)$ comparaisons pour trier la partie non-triée du tableau $(a_{2^{k+1}}, a_{2^{k+2}}, \dots, a_n)$.

$n-1 + 2g(c_k + 1)$ comparaisons supplémentaires pour trier $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$n-1 + 2g(c_k + 1) = 2^{k+1} - 2 + 2 [2^k \log_2 2^k - 2^{k+1} + 2].$$

$$n = 2^{k+1} \text{ et } c_k + 1 = 2^k$$

$$n-1 + 2g(c_k + 1) = 2^{k+1} \log_2 2^k - 2^{k+1} + 2 = 2^{k+1} \frac{\ln 2^k}{\ln 2} - 2^{k+1} + 2$$

$$n-1 + 2g(c_k + 1) = k 2^{k+1} - 2^{k+1} + 2 = (k+1) 2^{k+1} - 2 \times 2^{k+1} + 2$$

$$n-1 + 2g(c_k + 1) = 2^{k+1} \frac{\ln 2^{k+1}}{\ln 2} - 2 \times 2^{k+1} + 2 = g(c_{k+1} + 1).$$

$2^{k+1} = c_{k+1} + 1$

Ainsi $g(c_{k+1} + 1)$ comparaisons supplémentaires pour trier le tableau propre et l'ensemble s'achève. le problème est résolu !

J'vous aime tellement que je n'ai plus à vous quitter.

Alas

10. Une petite proportion pour la procédure "placer" et la procédure.

10. Au delà d'avoir des collègues encore plus ça que moi.

Program hec2002M1;

uses crt;

const LongMax=10; NombreMax=100;

type Nom=string[LongMax];

tableau= array[1..NombreMax] of Nom;

procedure Placer(Var T:tableau;deb,fin:integer;var pl:integer);

var i,a,b:integer;x:nom;inf,sup:tableau;

begin

x:=T[deb];pl:=deb;a:=0;b:=0;

for i:=deb+1 to fin do

begin

if T[i]>x then begin

b:=b+1;sup[b]:=T[i];

end

else begin

a:=a+1;inf[a]:=T[i];

end;

end;

pl:=deb+a;T[pl]:=x;

for i:=1 to a do T[deb+i-1]:=inf[i];

for i:=1 to b do T[pl+i]:=sup[i];

end;

procedure tri(var T:tableau;deb,fin:integer);

var pl :integer;

Begin

if fin>deb then begin

Placer(T,deb,fin,pl);

if pl>deb then tri(T,deb,pl-1);

if pl<fin then tri(T,pl+1,fin);

end;

end;

Le programme principal:

```

var i,n:integer;T:tableau;

begin

Write('Donner n. n=');readln(n);
For i:=1 to n do
  begin
    write('Le nom numéro ', i, ' : ');readln(T[i])
  end;

writeln;writeln('Le tableau non trié est :');writeln;
For i:=1 to n do write(T[i], ' ');

tri(T,1,n);

writeln;writeln;writeln('Le tableau trié est :');writeln;
For i:=1 to n do write(T[i], ' ');
writeln;

end.

```

ceci donne :

```

Donner n. n=9
Le nom numéro 1 : GODEFROY
Le nom numéro 2 : MARECHAL
Le nom numéro 3 : PREVOST
Le nom numéro 4 : COINTE
Le nom numéro 5 : MENISSIER
Le nom numéro 6 : MOATY
Le nom numéro 7 : FALLAH
Le nom numéro 8 : KHIRAT
Le nom numéro 9 : WALD+PSG

```

Le tableau non trié est :

GODEFROY MARECHAL PREVOST COINTE MENISSIER MOATY FALLAH KHIRAT WALD+PSG

Le tableau trié est :

COINTE FALLAH GODEFROY KHIRAT MARECHAL MENISSIER MOATY PREVOST WALD+PSG