

PARTIE I

408 du barème

Q1) q doit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = \sigma_{n+1} - \tau_n = h_{n+1} - h(n+1) - h_n + h_n = \frac{1}{n+1} - h\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

$$v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - h\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Moyenne classe 13,01
max 20
min 7.2
ET 3.55

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) ; \quad \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{d'où } h\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Alors } v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) ; \quad v_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$

- $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n^2} \geq 0$
- la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $-v_n$.

Ainsi la série de terme général v_n converge.

abordé par 90% des candidats. Taux de réussite 15% dit à l'appel des concours.

D) Pour $V = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \quad \text{à la limite } \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = V$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_1 + V$. Or la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c) Soit t un réel strictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n,t} = \sigma + h(t+n) - h_n = \sigma + h(t+n) - h_n - \sigma_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n,t} = \sigma + h\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \tau_n \quad \text{à la limite } h\left(1 + \frac{t}{n}\right) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \sigma$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t} = \sigma + 0 - \sigma = 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t} = 0$ et ceci pour tout réel t strictement positif.

Q2 a) soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $X_t \hookrightarrow \mathbb{D}(1)$ ou $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(1, t)$. $E(X_t) = 1/t$ et $V(X_t) = 1/t^2$.

$$\underline{E(X_t) = 1/t \text{ et } V(X_t) = 1/t^2.}$$

b) soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. le 1er te m indique que $\int_0^{+\infty} h(u) e^{-u} u^{t-1} du$ existe et vaut $\Gamma'(t)$,
 $\int_0^{+\infty} (h(u))^2 e^{-u} u^{t-1} du$ existe et vaut $\Gamma''(t)$ et $\forall u \in]0, +\infty[$, $p_{X_t}(u) = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{-u} u^{t-1}$.

Alors $\int_0^{+\infty} (h(u) | \int_{X_t}(u)) du$ existe et vaut $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ donc $\psi(t)$.

$$\underline{\int_0^{+\infty} (h(u))^2 \int_{X_t}(u) du \text{ existe et vaut } \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} .}$$

soit $r \in]1, 2[$!! . X_t prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$... on pourrait dire $]0, +\infty[$ pour simplifier ...
 . X_t est une variable aléatoire à densité de densité f_{X_t} .
 . $u \mapsto (h(u))^r$ est continue sur $]0, +\infty[$ prise au seul point 0.

le 2ème te m indique que $E((h(X_t))^r)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} (h(u))^r f_{X_t}(u) du$
 soit absolument convergente et qu'à ces d'existence $E((h(X_t))^r) = \int_0^{+\infty} (h(u))^r f_{X_t}(u) du$.

Notons que $u \mapsto (h(u))^r f_{X_t}(u)$ garde un signe constant sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} (h(u))^r f_{X_t}(u) du$ converge absolument et vaut $\int_0^{+\infty} (h(u))^r f_{X_t}(u) du$.

On nous a vu que $\int_0^{+\infty} (h(u)) f_{X_t}(u) du$ et $\int_0^{+\infty} (h(u))^2 f_{X_t}(u) du$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} (h(u))^r f_{X_t}(u) du$ converge car $r \in]1, 2[$!

ceci permet de dire que $\underline{E((h(X_t))^r) \text{ existe et vaut } \int_0^{+\infty} (h(u))^r f_{X_t}(u) du.}$

donc $E(h(X_t))$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} h(u) f_{X_t}(u) du$ soit $\psi(t)$.

$E((h(X_t))^2)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} (h(u))^2 f_{X_t}(u) du$ soit $\frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$.

Alors $V(x_t)$ existe et vaut $\frac{r''(t)}{r(t)} - (\psi(t))^2$.

$$V(x_t) = \frac{r''(t)}{r(t)} - \left(\frac{r'(t)}{r(t)} \right)^2 = \frac{r''(t)r(t) - (r'(t))^2}{(r(t))^2} = \left(\frac{r'}{r} \right)'(t) = \psi'(t).$$

Pour tout réel t strictement positif, $E(x_t)$ et $V(x_t)$ existent et :

$$\underline{E(x_t) = \psi(t) \text{ et } V(x_t) = \psi'(t).}$$

Q3 a) soit t un réel strictement supérieur à 1.

- x_t prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$
- x_t est une variable aléatoire à densité de densité f_{x_t} .
- $u \mapsto \frac{1}{u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ privé de son seul point 0.

Le texte aurait été inspiré de traiter $E(1/x_t^2)$ dans cette question

Alors $E(1/x_t)$ existe et prendra la valeur $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_{x_t}(u) du$ et absolument convergente.

Si $\forall u \in]0, +\infty[, \frac{1}{u} f_{x_t}(u) \geq 0$.

Donc $E(1/x_t)$ existe et prendra la valeur $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_{x_t}(u) du$. En cas d'épistaxe $E(1/x_t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_{x_t}(u) du$.

$$\forall u \in]0, +\infty[, \frac{1}{u} f_{x_t}(u) = \frac{1}{u} \frac{1}{r(t)} e^{-\psi(u)t-1} = \frac{e^{-\psi(u)t-1}}{r(t)} = \frac{r(t-1)}{r(t)} f_{x_{t-1}}(u) = \frac{1}{t-1} f_{x_{t-1}}(u)$$

$$\text{Si } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_{t-1}}(u) du \text{ existe et vaut } 1 \text{ donc}$$

$$r(t) = (t-1)r(t-1) \quad \uparrow \quad t = (t-1) + 1$$

$\int_0^{+\infty} f_{x_{t-1}}(u) du$ existe et vaut également 1 car $f_{x_{t-1}}$ est nulle sur $]-\infty, 0]$.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_{x_t}(u) du$ existe et vaut $\frac{1}{t-1}$. Ceci achève de montrer que

$\frac{1}{x_t}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t-1}$ lorsque $t \in]1, +\infty[$.

b) h est concave sur $]0, +\infty[$ ($\forall x \in]0, +\infty[, h''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$)

le courbe représentative est à double de toutes ses tangentes à partir de la tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = (h'(1))(x-1) + h(1) = x-1$

donc $\forall x \in]0, +\infty[, h(x) \leq (h'(1))(x-1) + h(1) = x-1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h x \leq x-1. \text{ Alors } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}-1; \forall x \in \mathbb{R}_+^*, -h x \leq \frac{1}{x}-1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1-\frac{1}{x} \leq h x.$$

$$\text{Dac } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1-\frac{1}{x} \leq h x \leq x-1.$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}_+^*. \text{ 1}^{\text{er}} \text{ cas } x \geq 1. \text{ Alors } 0 \leq h x \leq x-1.$$

$$\text{Dac } (h x)^2 \leq (x-1)^2 \leq (x-1)^2 + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2.$$

$$\text{2}^{\text{nd}} \text{ cas } x < 1. \text{ Alors } 1-\frac{1}{x} \leq h x \leq 0; 0 \leq -h x \leq -\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Dac } (-h x)^2 \leq \left(1-\frac{1}{x}\right)^2. (h x)^2 \leq \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \leq \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2.$$

$$\text{Finalement: } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (h x)^2 \leq (x-1)^2 + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2.$$

$$\text{Si soit } \omega \in \Omega \text{ tel que } X_t(\omega) > 0. \frac{X_t(\omega)}{t} > 0 \text{ dac } 1 - \frac{1}{X_t(\omega)/t} \leq h\left(\frac{X_t(\omega)}{t}\right) \leq \frac{1}{t} X_t(\omega) - 1.$$

$$1. \forall t \in \mathbb{R}_+, X_t(\omega) > 0 \Rightarrow 1 - t \wedge \frac{1}{X_t(\omega)} \leq h(X_t(\omega)) - h t \leq \frac{1}{t} X_t(\omega) - 1.$$

$$2. \underline{P(X_t > 0) = 1. \text{ Dac } P(1 - t \wedge \frac{1}{X_t} \leq h(X_t) - h t) = P(h X_t - h t \leq \frac{1}{t} X_t - 1) = 1.}$$

$$3. - E\left(1 - t \wedge \frac{1}{X_t}\right) \text{ possède une espérance qui vaut } 1 - t \wedge \frac{1}{t-1} \text{ ou } -\frac{1}{t-1};$$

$$E(h(X_t)) \text{ possède une espérance};$$

$$\frac{1}{t} X_t - 1 \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{t} \wedge t - 1 \text{ ou } 0.$$

$$\text{le tout permet de dire que: } -\frac{1}{t-1} \leq E(h(X_t)) - h t \leq 0 \quad (\text{annulation de l'espérance}) \quad \Downarrow$$

$$\text{dac } -\frac{1}{t-1} \leq E\left(h\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq 0.$$

$$\boxed{\text{"Si } E(X) \leq E(Y) \text{ et si } P(X \leq Y) = 1: E(X) \leq E(Y)."} \quad \text{Si } E(X) \leq E(Y) \text{ et si } P(X \leq Y) = 1: E(X) \leq E(Y).$$

$$\text{Supposons que } t \text{ est strictement supérieur à } 1. \text{ Notons que } \frac{1}{X_t} \text{ possède une espérance}$$

$$. X_t \text{ est une variable à densité de densité } f_{X_t}$$

$$. X_t \text{ prend ses valeurs dans }]0, +\infty[$$

$$. u \mapsto \frac{1}{u^2} \text{ est continue sur }]0, +\infty[\text{ puisé du seul point } 0.$$

la relation de transfert indique que $E(\frac{1}{\lambda_t^2})$ existe si et seulement si

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f_{\lambda_t}(u) du$ est absolument convergente ou ici convergente car

$$\forall u \in]0, +\infty[, \frac{1}{u^2} f_{\lambda_t}(u) \geq 0.$$

$$\text{A } \forall u \in]0, +\infty[, \frac{1}{u^2} f_{\lambda_t}(u) = \frac{1}{u^2} \frac{e^{-4} u^{t-1}}{\Gamma(t)} = \frac{e^{-4} u^{t-1}}{\Gamma(t)} \stackrel{t > 2}{=} \frac{\Gamma(t-2)}{\Gamma(t)} f_{\lambda_{t-2}}(u) = \frac{1}{(t-1)(t-2)} f_{\lambda_{t-2}}(u).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda_{t-2}}(u) du$ existe et vaut 1 et $f_{\lambda_{t-2}}$ est nulle sur $] -\infty, 0]$ donc $\int_0^{+\infty} f_{\lambda_{t-2}}(u) du$ existe et vaut 1. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f_{\lambda_t}(u) du$ converge et vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$.

Ce qui suffit pour dire que $E(\frac{1}{\lambda_t^2})$ existe et vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$... lorsque $t > 2$.

Reprenons $t > 2$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_t(\omega) > 0$.

$$\text{Alors } E(\frac{\lambda_t(\omega)}{t}) \leq (1 - \frac{1}{\lambda_t(\omega)/t})^2 + (\frac{\lambda_t(\omega)}{t} - 1)^2 = 1 - \frac{2t}{\lambda_t(\omega)} + \frac{t^2}{(\lambda_t(\omega))^2} + \frac{(\lambda_t(\omega) - t)^2}{t^2}.$$

$$1^\circ. \forall \omega \in \mathbb{R}, \lambda_t(\omega) > 0 \Rightarrow E(\frac{\lambda_t(\omega)}{t}) \leq 1 - 2t \times \frac{1}{\lambda_t(\omega)} + t^2 \frac{1}{(\lambda_t(\omega))^2} + \frac{1}{t^2} (\lambda_t(\omega) - t)^2$$

$$2^\circ. P(\lambda_t > 0) = 1 \dots \text{donc presque sûrement } E(\frac{\lambda_t}{t}) \leq 1 - 2t \times \frac{1}{\lambda_t} + t^2 \frac{1}{\lambda_t^2} + \frac{1}{t^2} (\lambda_t - t)^2.$$

$$3^\circ. \Rightarrow E(\frac{\lambda_t}{t}) = (E(\lambda_t) - t)^2 = (E(\lambda_t))^2 - 2t E(\lambda_t) + (t^2). \text{ A } E((\lambda_t)^2) \text{ et}$$

$E(\lambda_t)$ existent donc $E(\frac{\lambda_t}{t})$ possède une espérance.

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_t}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{t-1}$, $\frac{1}{\lambda_t^2}$ possède une espérance qui

vaut $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$ et $(\lambda_t - t)^2 = (\lambda_t - E(\lambda_t))^2$ possède une espérance qui vaut

$V(\lambda_t)$ donc t . Alors $1 - 2t \times \frac{1}{\lambda_t} + t^2 \frac{1}{\lambda_t^2} + \frac{1}{t^2} (\lambda_t - t)^2$ possède

une espérance qui vaut $1 - 2t \times \frac{1}{t-1} + t^2 \frac{1}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t^2} t$.

$$1 - \frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t(t-1)(t-2)} [t(t-1)(t-2) - 2t^2(t-2) + t^3 + (t-1)(t-2)] = \frac{2t^2 - t + 2}{t(t-1)(t-2)}$$

donc ces conditions : $E\left(h^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t^2 - t + 2}{t(t-1)(t-2)} \leq \frac{2t^2}{t(t-1)(t-2)} \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$

$t \geq 2$ $\uparrow$ $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{t-2}$

Si $t \geq 2$: $E\left(h^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

d) $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

$t+n \geq 2$. Alors $\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2$ est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui possède une espérance. L'inégalité de Tchebyschev donne alors :

$$0 \leq P\left(\left|h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$$

$t+n \geq 2$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{n} = 0. \text{ Par conséquent il vient alors :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \text{ et ceci pour tout } \varepsilon \text{ dans } \mathbb{R}_+^*.$$

$\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

(Q4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\omega \in \{\|D_n\| \geq \varepsilon\}$. Supposons que $\omega \notin \{\|A_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{\|B_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{\|C_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Alors $\|A_n(\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\|B_n(\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\|C_n(\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc $\|D_n(\omega)\| = \|A_n(\omega) + B_n(\omega) + C_n(\omega)\| \leq \|A_n(\omega)\| + \|B_n(\omega)\| + \|C_n(\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$.

Et ainsi $\|D_n(\omega)\| \leq \varepsilon$!! Donc $\omega \in \{\|A_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{\|B_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{\|C_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Enfin, on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \{\|D_n\| \geq \varepsilon\} \subset \{\|A_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{\|B_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \cup \{\|C_n\| \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Remarque que... $\forall V_1 \in \mathcal{C}_0, \forall V_2 \in \mathcal{C}_0, P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2) \leq P(V_1) + P(V_2)$.

Alors $\forall (V_1, V_2, V_3) \in \mathcal{C}_0^3, P(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \leq P(V_1 \cup V_2) + P(V_3) \leq P(V_1) + P(V_2) + P(V_3)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\{ |D_n| > \varepsilon \} \subset \{ |A_n| > \varepsilon/3 \} \cup \{ |B_n| > \varepsilon/3 \} \cup \{ |C_n| > \varepsilon/3 \}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|D_n| > \varepsilon) \leq P(\{ |A_n| > \varepsilon/3 \} \cup \{ |B_n| > \varepsilon/3 \} \cup \{ |C_n| > \varepsilon/3 \}).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq P(|D_n| > \varepsilon) \leq P(|A_n| > \varepsilon/3) + P(|B_n| > \varepsilon/3) + P(|C_n| > \varepsilon/3).$$

Or $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$ et $(C_n)_{n \geq 1}$ convergent à probabilité vers 0.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|A_n| > \varepsilon/3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|B_n| > \varepsilon/3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|C_n| > \varepsilon/3) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (P(|A_n| > \varepsilon/3) + P(|B_n| > \varepsilon/3) + P(|C_n| > \varepsilon/3)) = 0.$$

Pour conclure il suffit de voir $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|D_n| > \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(D_n)_{n \geq 1}$ converge à probabilité vers 0... ou vers la variable certaine nulle.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$. $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, |u_n - u| < \varepsilon/2$.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq p$.

$$\forall \omega \in \Omega, |V_n(\omega)| = |D_n(\omega) + u_n - u| \leq |D_n(\omega)| + |u_n - u| < |D_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \omega \in \Omega, |V_n(\omega)| > \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < |D_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |D_n(\omega)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Donc } \{ |V_n| > \varepsilon \} \subset \{ |D_n| > \frac{\varepsilon}{2} \}; \quad P(|V_n| > \varepsilon) \leq P(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, 0 \leq P(|V_n| > \varepsilon) \leq P(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}).$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}) = 0 \text{ car } (D_n)_{n \geq 1} \text{ converge à probabilité vers 0.}$$

Pour conclure on doit voir: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|V_n| > \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $(V_n)_{n \geq 1}$ converge à probabilité vers 0... ou vers la variable certaine nulle.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(|(N+u+V_n) - (N+u)| \geq \varepsilon) = P(|V_n| \geq \varepsilon).$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|(N+u+V_n) - (N+u)| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|V_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Ainsi $(N+u+V_n)_{n \geq 1}$ converge à probabilité vers la variable $N+u$.

c) Noter F_π et F_{N+u} les fonctions de répartition de π et $N+u$.

F_π et F_{N+u} sont continues sur $\mathbb{R}$ car π et $N+u$ sont des variables aléatoires à densité (N est une variable aléatoire à densité... aussi)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, N + D_n + u_n = N + u + V_n.$$

Alors $(N + D_n + u_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $N+u$. Soit $(N + D_n + u_n)_{n \geq 1}$

converge à loi vers $N+u$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $P(N + D_n + u_n \leq x) = F_{N+u}(x)$ (... car F_{N+u} est continue à tout point de $\mathbb{R}$).

A pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, π et $N + D_n + u_n$ ont même loi. suite constante!

$$\text{Soit } F_{N+u}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(N + D_n + u_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\pi \leq x) = P(\pi \leq x) = F_\pi(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{N+u}(x) = F_\pi(x)$. π et $N+u$ ont même loi car même fonction de répartition.

(PS) a) X_α et X_β prennent des valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et même dans $\mathbb{R}_+^*$...

Alors $T_{\alpha, \beta} = \frac{X_\alpha}{X_\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\Theta_{\alpha, \beta} = \frac{1}{T_{\alpha, \beta}}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $U_\alpha = \frac{1}{X_\alpha}$ et notons F_{U_α} sa fonction de répartition. Notons F_{X_α} la fonction de répartition de X_α .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{U_\alpha}(x) = P\left(\frac{1}{X_\alpha} \leq x\right) = P(X_\alpha \leq e^x) = F_{X_\alpha}(e^x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x} x^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f_{X_α} est continue sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi F_{X_α} est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{X_\alpha}(x) = f_{X_\alpha}(x)$.

$x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \in \mathbb{R}_+^*$ et F_{X_α} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition F_{U_α} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_{U_\alpha}(x) = e^x F'_{X_\alpha}(e^x) = e^x f_{X_\alpha}(e^x)$.

Soit U_α est une variable aléatoire à densité et $f_{U_\alpha} : x \mapsto e^x f_{X_\alpha}(e^x)$ on a une densité.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{v_\alpha}(x) = e^x \quad \begin{matrix} \uparrow \\ e^x > 0 \end{matrix} \quad \frac{e^{-e^x} (e^x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{e^{-e^x + \alpha x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_{v_\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-e^x + \alpha x}$$

Pour $v_\beta = h \times \beta$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{v_\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-e^x + \beta x}$.

v_β est également une variable aléatoire à densité et f_{v_β} est une densité.

Alors $-v_\beta = -h \times \beta$ est également une variable aléatoire à densité et $f_{-v_\beta} : x \mapsto f_{v_\beta}(-x)$ est une densité. $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-v_\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-e^{-x} - \beta x}$.

b) Notons que $Q_{\alpha, \beta} = h \times T_{\alpha, \beta} = h \times \frac{X_\alpha}{X_\beta} = h \times X_\alpha - h \times X_\beta = v_\alpha + (-v_\beta)$.

* v_α et $(-v_\beta)$ sont des variables aléatoires à densité de densité f_{v_α} et f_{-v_β} .

* $v_\alpha = h \times X_\alpha$ et $-v_\beta = -h \times X_\beta$ sont indépendantes car X_α et X_β sont indépendantes.

* Considérons $\varphi : x \mapsto e^{-e^x + \alpha x}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = (-e^x + \alpha) \varphi(x)$.

de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x + \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x + \alpha x) = -\infty$.

$\varphi'(x) = (-e^x + \alpha) \varphi(x)$ $\hat{n} = \varphi(h\alpha)$. Ainsi φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Donc $f_{v_\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

On peut alors dire que $Q_{\alpha, \beta}$ est une variable aléatoire à densité et

$$f_{Q_{\alpha, \beta}} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{v_\alpha}(y) f_{-v_\beta}(x-y) dy \text{ est une densité définie sur } \mathbb{R}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_{Q_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^y + \alpha y} e^{-e^{-(x-y)} - \beta(x-y)} dy.$$

$$f_{Q_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha + \beta)y} e^{-e^y(1+e^{-x})} dy.$$

ε doit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. $y \mapsto e^y(1+e^x)$ at de dans $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui permet de changer de variable $u = e^y(1+e^x)$ dans ce qui suit.

$$\int_A^B e^{(k+p)y} e^{-e^y(1+e^x)} dy = \int_{e^A(1+e^x)}^{e^B(1+e^x)} \left(\frac{u}{1+e^x}\right)^{k+p} e^{-u} \frac{du}{u} = \frac{\Gamma(k+p)}{(1+e^x)^{k+p}} \int_{e^A(1+e^x)}^{e^B(1+e^x)} f(u) du$$

$\left\{ \begin{array}{l} u = e^y(1+e^x) \\ du = e^y(1+e^x) dy = u dy \end{array} \right.$

$f_{X_{k+p}}(u) = \frac{1}{\Gamma(k+p)} e^{-u} u^{k+p-1} \quad u > 0$

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(k+p)y} e^{-e^y(1+e^x)} dy$ converge.

2) $\lim_{A \rightarrow -\infty} e^A(1+e^x) = 0$ et $\lim_{B \rightarrow +\infty} e^B(1+e^x) = +\infty$

3) $\int_0^{+\infty} f_{X_{k+p}}(u) du$ converge et vaut 1.

Alors a priori la densité $A \rightarrow -\infty$ puis $B \rightarrow +\infty$ il vient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k+p)y} e^{-e^y(1+e^x)} dy = \frac{\Gamma(k+p)}{(1+e^x)^{k+p}}$$

Alors $\int \varphi_{k,p}(x) dx = \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)\Gamma(p)} \frac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{k+p}} = \frac{1}{B(k,p)} \frac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{k+p}}$

En multipliant haut et bas par $e^{(k+p)x}$ il vient:

$$\int \varphi_{k,p}(x) dx = \frac{1}{B(k,p)} \frac{e^{dx}}{(e^x+1)^{k+p}} \text{ et ceci pour tout réel } x.$$

Remarque 1. $\varphi_{k,p}$ suit la loi bêta de dispersion et espère de paramètres α et β .

2. $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \dots$ voir plus loin (45e; fin de la page 13).

3. $\int \varphi_{k,p}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition $F_{\varphi_{k,p}}$ de $\varphi_{k,p}$

et de dans $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_{\varphi_{k,p}}(x) = \varphi_{k,p}(x)$

d) $T_{\alpha, \beta} = \frac{X_{\alpha}}{X_{\beta}}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^{\alpha}$. Notons $F_{T_{\alpha, \beta}}$ la fonction de répartition.

$$\forall x \in]-\infty, 0], F_{T_{\alpha, \beta}}(x) = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, F_{T_{\alpha, \beta}}(x) = P\left(\frac{X_{\alpha}}{X_{\beta}} \leq x\right) = P(h(X_{\alpha}) - h(X_{\beta}) \leq h(x)) = F_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x))$$

$F_{T_{\alpha, \beta}}$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $]-\infty, 0]$ car $F_{T_{\alpha, \beta}}$ est nulle sur $]-\infty, 0]$.

h est de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}_+^{\alpha}$ et $F_{\Phi_{\alpha, \beta}}$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}$. Par composition

$F_{T_{\alpha, \beta}}$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, +\infty[$.

Alors $F_{T_{\alpha, \beta}}$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}^{\alpha}$ et est continue à gauche en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{T_{\alpha, \beta}}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x)) = 0 = F_{T_{\alpha, \beta}}(0) \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty; F_{T_{\alpha, \beta}} \text{ est}$$

continue à droite en 0.

Finalement $F_{T_{\alpha, \beta}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ceci a dû servir à montrer que $T_{\alpha, \beta}$ est une variable aléatoire continue.

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F_{T_{\alpha, \beta}}(x) = 0 \text{ et } F'_{T_{\alpha, \beta}}(x) = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, F_{T_{\alpha, \beta}}(x) = F_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x)) \text{ et } F'_{T_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{1}{x} F'_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x)) = \frac{1}{x} f_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x))$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, f_{T_{\alpha, \beta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{x} f_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x)) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$f_{T_{\alpha, \beta}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{T_{\alpha, \beta}}$ sur $\mathbb{R}^{\alpha}$ donc sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivation. $f_{T_{\alpha, \beta}}$ est une densité de $T_{\alpha, \beta}$.

$$\text{Soit } x \in]0, +\infty[. f_{T_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{1}{x} f_{\Phi_{\alpha, \beta}}(h(x)) = \frac{1}{x} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{e^{\alpha h(x)}}{(1 + e^{h(x)})^{\alpha + \beta}}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_{T_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \text{ et } \forall x \in]-\infty, 0], f_{T_{\alpha, \beta}}(x) = 0.$$

$$c) J_{\alpha, \beta} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{\beta}}{\lambda_{\alpha}}} \text{ et } T_{\beta, \alpha} \text{ prend ses valeurs dans }]0, +\infty[.$$

Alors $J_{\alpha, \beta}$ prend ses valeurs dans $]0, 1[$. Notons $F_{J_{\alpha, \beta}}$ sa fonction de répartition.

$$\forall j \in]-\infty, 0], F_{J_{\alpha, \beta}}(j) = 0 ; \quad \underline{F_{J_{\alpha, \beta}} \text{ et de dans } \mathcal{B}' \text{ sur }]-\infty, 0]}$$

$$\forall j \in [1, +\infty[, F_{J_{\alpha, \beta}}(j) = 1 ; \quad \underline{F_{J_{\alpha, \beta}} \text{ et de dans } \mathcal{B}' \text{ sur } [1, +\infty[.}$$

$$\forall j \in]0, 1[, F_{J_{\alpha, \beta}}(j) = P\left(\frac{1}{1 + T_{\beta, \alpha}} \leq j\right) = P\left(\frac{1}{j} \leq 1 + T_{\beta, \alpha}\right) = P\left(\frac{1-j}{j} \leq T_{\beta, \alpha}\right).$$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 + T_{\beta, \alpha} \text{ prend ses valeurs dans }]1, +\infty[\\ j > 0 \end{array} \right.$

$$\forall j \in]0, 1[, F_{J_{\alpha, \beta}}(j) = 1 - P\left(T_{\beta, \alpha} < \frac{1-j}{j}\right) = 1 - P\left(T_{\beta, \alpha} \leq \frac{1-j}{j}\right) = 1 - F_{T_{\beta, \alpha}}\left(\frac{1-j}{j}\right).$$

$f_{T_{\beta, \alpha}}$ et une mesure continue sur $\mathbb{R}^n$ donc $F_{T_{\beta, \alpha}}$ et une mesure de dans $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\forall j \in \mathbb{R}^n, F'_{T_{\beta, \alpha}}(j) = f_{T_{\beta, \alpha}}(j).$$

$$j \mapsto \frac{1-j}{j} \text{ et de dans } \mathcal{B}' \text{ sur }]0, 1[\text{ et } \forall j \in]0, 1[, \frac{1-j}{j} \in \mathbb{R}^n$$

Pour composition $\underline{F_{J_{\alpha, \beta}}}$ et de dans $\mathcal{B}'$ sur $]0, 1[$.

Ainsi 1° $F_{J_{\alpha, \beta}}$ et de dans $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R} -]0, 1[$ donc sur $\mathbb{R}$ munie d'un ensemble fini de points.

2° $F_{J_{\alpha, \beta}}$ et continue à gauche en 0 et à droite en 1.

$$\lim_{j \rightarrow 0^+} F_{J_{\alpha, \beta}}(j) = \lim_{j \rightarrow 0^+} \left(1 - F_{T_{\beta, \alpha}}\left(\frac{1-j}{j}\right)\right) = 1 - 1 = 0 = F_{J_{\alpha, \beta}}(0); \quad F_{J_{\alpha, \beta}} \text{ et continue à droite en } 0.$$

$\lim_{j \rightarrow 0^+} \frac{1-j}{j} = +\infty$

$$\lim_{j \rightarrow 1^-} F_{J_{\alpha, \beta}}(j) = \lim_{j \rightarrow 1^-} \left(1 - F_{T_{\beta, \alpha}}\left(\frac{1-j}{j}\right)\right) = 1 - F_{T_{\beta, \alpha}}(0) = 1 - \int_{-\infty}^0 f_{T_{\beta, \alpha}}(u) du = 1 - 0 = 1 = F_{J_{\alpha, \beta}}(1);$$

$F_{J_{\alpha, \beta}}$ et continue à gauche en 1.

Finale est $F_{J_{\alpha, \beta}}$ et continue sur $\mathbb{R}$. Ceci adève de manière que $J_{\alpha, \beta}$ est une variable aléatoire à densité.

$F_{J_{\alpha, \beta}}$ est constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 1, +\infty[$. $\forall y \in] -\infty, 0[\cup] 1, +\infty[$, $F'_{J_{\alpha, \beta}}(y) = 0$.

$\forall y \in] 0, 1[$, $F_{J_{\alpha, \beta}}(y) = 1 - F_{T_{\beta, \alpha}}\left(\frac{1-y}{y}\right)$. Soit $y \in] 0, 1[$. $\frac{1-y}{y} = \frac{1}{y} - 1$.

$$F'_{J_{\alpha, \beta}}(y) = 0 - \left(-\frac{1}{y^2}\right) f_{T_{\beta, \alpha}}\left(\frac{1-y}{y}\right) \underset{\frac{1-y}{y} \in] 0, +\infty[}{=} \frac{1}{y^2} \times \frac{1}{B(\beta, \alpha)} \times \frac{\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\beta-1}}{\left(1 + \frac{1-y}{y}\right)^{\beta+\alpha}}$$

$$B(\beta, \alpha) = B(\alpha, \beta)$$

$$F'_{J_{\alpha, \beta}}(y) = \frac{1}{y^2} \times \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \times \frac{(1-y)^{\beta-1}}{y^{\beta-1} (1/y)^{\beta+\alpha}} = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{-2-(\beta-1)+\beta+\alpha} (1-y)^{\beta-1}$$

$$F'_{J_{\alpha, \beta}}(y) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}$$

$$\forall y \in] 0, 1[, \quad F'_{J_{\alpha, \beta}}(y) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}$$

$$\text{Pour } y \in \mathbb{R}, \quad f_{J_{\alpha, \beta}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}, & \text{si } y \in] 0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f_{J_{\alpha, \beta}}$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{J_{\alpha, \beta}}$ sur $\mathbb{R} -] 0, 1[$ donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'un ensemble fini de points.

$f_{J_{\alpha, \beta}}$ est une densité de $J_{\alpha, \beta} = \frac{X_{\alpha}}{X_{\alpha} + X_{\beta}}$.

$J_{\alpha, \beta}$ suit la loi bêta de première espèce de paramètres α et β .

Remarque... $\int_0^1 f_{J_{\alpha, \beta}}(y) dy$ existe et vaut 1. Donc $\int_0^1 f_{J_{\alpha, \beta}}(y) dy$ existe et vaut 1.

Ainsi $\int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$ existe et vaut $B(\alpha, \beta)$ ou $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$

PARTIE II

258 du horêwa

Q6 * $S_0(1)=1$ et $P(S_0=0)=1$. $E(S_0)=0$ et $V(S_0)=0$

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ sont indépendantes

et $\forall i \in \{1, k\}$, $Y_i \in \mathcal{E}(1)$ ou $Y_i \in \mathcal{P}(1, 1)$

Alors on vérifie alors que $Y_1 + \dots + Y_k \in \mathcal{P}(1, k)$ ou $S_k \in \mathcal{E}(k)$.

Alors $E(S_k)=k$ et $V(S_k)=k$.

Q7 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $h\left(\prod_{k=1}^n \frac{x+S_{k-1}}{x+S_k}\right) = \sum_{k=1}^n [h(x+S_{k-1}) - h(x+S_k)] = h(x+S_0) - h(x+S_n)$

En remarquant que $S_0=0$ on voit : $h(x) = h\left(\prod_{k=1}^n \frac{x+S_{k-1}}{x+S_k}\right) + h(x+S_n)$.

Δ b) Ici nous élargissons l'hypothèse insuffisante du b) en supposant que :
des variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et la variable aléatoire X_0
sont (mutuellement) indépendantes pour tout réel α strictement positif.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, X_0$ sont indépendantes, alors S_m et X_0 sont
indépendantes. De plus $S_m \in \mathcal{E}(m)$ ou $S_m \in \mathcal{P}(1, m)$, et $X_0 \in \mathcal{E}(1)$ ou $X_0 \in \mathcal{P}(1, 1)$

Alors $X_0 + S_m$ suit la loi gamma de paramètre $1+m$.

Or X_{1+m} suit la loi gamma de paramètre $1+m$.

Ainsi $X_0 + S_m$ et X_{1+m} ont même loi pour tout m dans $\mathbb{N}^*$.

Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de $X_0 + S_n$ est celle de X_{1+n} .

Q8 a) $R_{1,1} = \frac{X_0 + S_0}{X_0 + S_1} = \frac{X_0}{X_0 + Y_1}$. $R_{1,2} = \frac{X_0 + S_1}{X_0 + S_2} = \frac{X_0 + Y_1}{X_0 + Y_1 + Y_2}$.

X_0 et Y_1 sont indépendantes, $X_0 \in \mathcal{E}(1)$ et $Y_1 \in \mathcal{E}(1)$. Alors

d'après le troisième point admis : $\frac{X_0}{X_0 + Y_1}$ et $X_0 + Y_1$ sont indépendantes

Comme les variables X_t, Y_1, Y_2 sont indépendantes :

$\frac{X_t}{X_t + Y_1}$, $X_t + Y_1$ et Y_2 sont indépendantes. Par

d'après le premier point admis, $\frac{X_t}{X_t + Y_1}$ et $\frac{X_t + Y_1}{X_t + Y_1 + Y_2}$ sont indépendantes

car $u \mapsto u$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(u, v) \mapsto \frac{u}{u+v}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$

Ainsi $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes.

b) Ici nous étudions encore les propriétés d'indépendance en supposant que :
 les variables aléatoires des suites $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sont
 (mutuellement indépendantes).

Rappel : Soient $\hat{U}, \hat{V}, \hat{U}', \hat{V}'$ quatre variables aléatoires sur $(\mathcal{X}, \mathcal{H}, P)$

On suppose que :

1° $\hat{U}$ et $\hat{U}'$ ont même loi.

2° $\hat{V}$ et $\hat{V}'$ ont même loi.

3° $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont indépendantes.

4° $\hat{U}$ et $\hat{V}'$ sont indépendantes.

Alors $\hat{U} + \hat{V}$ et $\hat{U}' + \hat{V}'$ ont même loi. Résultat que l'on peut généraliser à des sommes finies

soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{X_t}{X_t + S_n}$ et $X_t + S_n$ sont indépendantes car X_t et S_n sont

indépendantes et $X_t \hookrightarrow \mathcal{R}(t)$ et $S_n \hookrightarrow \mathcal{O}(n)$.

Alors $h_t \frac{X_t}{X_t + S_n}$ et $h_t (X_t + S_n)$ sont indépendantes.

Notons alors qu'avec la seconde option de l'indépendance proposée :

$\frac{X_t}{X_t + S_n}$ et $X_t + n$ sont indépendantes. Soit $h_t \frac{X_t}{X_t + S_n}$ et $h_t X_t + n$.

sont également indépendantes.

De plus $h \frac{\lambda_t}{\lambda_t + S_n}$ a même loi que $h \frac{\lambda_t}{\lambda_t + S_n}$ (!!) et $h(\lambda_t + S_n)$ et

$h \lambda_{t+n}$ ont même loi puisque λ_{t+n} et $\lambda_t + S_n$ ont même loi ($\lambda_{t+n} \sim P(t+n)$ et $\lambda_t + S_n \sim O(t+n)$ car $\lambda_t \sim P(t)$, $S_n \sim O(n)$ et λ_t et S_n sont indépendantes).

Le rappel permet de dire que $h \frac{\lambda_t}{\lambda_t + S_n} + h(\lambda_t + S_n)$ a même loi que

$$h \frac{\lambda_t}{\lambda_t + S_n} + h \lambda_{t+n}.$$

Nous avons alors que
$$h \frac{\lambda_t}{\lambda_t + S_n} = h \left(\prod_{k=1}^n \frac{\lambda_t + S_{k-1}}{\lambda_t + S_k} \right) = \sum_{k=1}^n h \frac{\lambda_t + S_{k-1}}{\lambda_t + S_k} = \sum_{k=1}^n h R_{t,k}$$

De plus $h \frac{\lambda_t}{\lambda_t + S_n} + h(\lambda_t + S_n) = h \lambda_t.$

Alors $h \lambda_t$ et $\sum_{k=1}^n h R_{t,k} + h \lambda_{t+n}$ ont même loi.

(Q9) Q] Posons $V = -\ln U$. Notons F_U et F_V les fonctions de répartition de U et V .

Rappelons que $U \in \mathcal{U}(]0, 1])$. V prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$.

$\forall k \in]-\infty, 0[, F_U(k) = 0$ et $\forall k \in [0, +\infty[, F_V(k) = P(-\ln U \leq k) = P(U \geq e^{-k})$.

$\forall k \in [0, +\infty[, F_V(k) = 1 - P(U < e^{-k}) = 1 - P(U \leq e^{-k}) = 1 - F_U(e^{-k}).$
 $\uparrow$ Valeur usuelle

Rappelons que $\forall y \in [0, 1], F_U(y) = y$.

Alors $\forall k \in [0, +\infty[, F_V(k) = 1 - e^{-k}$. $\forall k \in \mathbb{R}, F_V(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-k} & \text{si } k \in [0, +\infty[\end{cases}$

Donc $V \in \mathcal{E}(1)$.

- $h U$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^0$. $R_{t,k} = \frac{\lambda_t + S_{k-1}}{\lambda_t + S_k} = \frac{\lambda_t + S_{k-1}}{(\lambda_t + S_{k-1}) + Y_k}$.

1° $\lambda_t + S_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{O}(t+k-1)$ (y compris lorsque $k=1$)

2° $Y_k \hookrightarrow \mathcal{O}(1)$

3° $\lambda_t + S_{k-1}$ et Y_k sont indépendantes.

Nous pouvons alors utiliser I 9 5 e) pour dire que $R_{t,k}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{J_{t+k-1,1}}$.

$\forall z \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, \int_{J_{t+k-1,1}} |f| = 0.$

$\forall z \in]0, 1[, \int_{J_{t+k-1,1}} |f| = \frac{1}{B(t+k-1, 1)} z^{t+k-2}.$

Or $B(t+k-1, 1) = \frac{\Gamma(t+k-1) \Gamma(1)}{\Gamma((t+k-1)+1)} = \frac{\Gamma(t+k-1) \times 1}{(t+k-1) \Gamma(t+k-1)} = \frac{1}{t+k-1}.$

Donc $\forall z \in \mathbb{R}, \int_{J_{t+k-1,1}} |f| = \begin{cases} (t+k-1) z^{t+k-2} & \text{si } z \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

c) Posons $H = U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$. Notons F_H la fonction de répartition de H .

H prend ses valeurs dans $]0, 1]$. $\forall z \in]-\infty, 0], F_H(z) = 0$ et $\forall z \in [1, +\infty[, F_H(z) = 1.$

Soit $z \in]0, 1[. F_H(z) = P(U_k^{\frac{1}{t+k-1}} \leq z) = P(U_k \leq z^{t+k-1}) = \int_0^{z^{t+k-1}} f_{J_{t+k-1,1}}.$

$\forall z \in \mathbb{R}, F_H(z) = \begin{cases} z^{t+k-1} & \text{si } z \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}.$ $z^{t+k-1} \in]0, 1[$

F_H est donc de classe $\mathcal{B}^1$ sur $]0, 1[,]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$. En particulier F_H est

de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, continue à gauche en 0 et à droite en 1.

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} F_H(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} z^{t+l-1} = 0 = F_H(0); \quad F_H \text{ est continue à droite à } 0.$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} F_H(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} z^{t+l-1} = 1 = F_H(1); \quad F_H \text{ est continue à gauche à } 1.$$

Finalement F_H est continue sur $\mathbb{R}$ et de donc B' sur $\mathbb{R} =]0,1[$ d'ac sur $\mathbb{R}$ prové d'un ensemble fini de points. Est une variable aléatoire à densité.

$$\forall z \in]0,1[, F'_H(z) = (t+l-1) z^{t+l-2} \text{ et } \forall z \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, F'_H(z) = 0.$$

Alors $\int_{t+l-1,1}^1$ est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_H sur $\mathbb{R} =]0,1[$ d'ac sur $\mathbb{R}$ prové d'un ensemble fini de points.

Alors $\int_{t+l-1,1}^1$ est une densité de $H = U_k^{\frac{1}{t+l-1}} \dots$ et de $R_{t,l}$.

Donc $R_{t,l}$ et $U_k^{\frac{1}{t+l-1}}$ ont même loi.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{Y_{k+1}}{t+k} \right) + l \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \delta$ et simplifions.

$$T_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{t+k}}_{A_n} - \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{t+k-1} + l(X_{t+n}) - l(t+1) + \delta + l(t+n) - l_n \tilde{Y}_n^{\delta} = \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{t+k-1} + l(X_{t+n})$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{Y_k}{t+k-1} \right) + l(X_{t+n}).$$

. Soit $k \in \mathbb{I}_{1,n} \mathbb{I}$. Y_k a même loi que $-l U_k$ d'après a.

Alors $-Y_k$ a même loi que $l U_k$ et $-\frac{Y_k}{t+k-1}$ a même loi que $\frac{l}{t+k-1} U_k$.

Pour tout $k \in \mathbb{I}_{1,n} \mathbb{I}$, $-\frac{Y_k}{t+k-1}$ a même loi que $l U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$.

Et pour tout $k \in \mathbb{I}_{1,n} \mathbb{I}$, $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ a même loi que $R_{t,k}$ d'ac $l U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ a même loi que $l R_{t,k}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{I}_{1,n} \mathbb{I}$, $-\frac{Y_k}{t+k-1}$ a même loi que $l R_{t,k}$.

De plus $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes donc $-\frac{Y_1}{t}, -\frac{Y_2}{t+1}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}$ sont indépendantes.

et $R_{t,1}, R_{t,2}, \dots, R_{t,n}$ sont indépendantes donc $R_{t,1}, R_{t,2}, \dots, R_{t,n}$ sont indépendantes.

Le rappel permet de dire alors que $\sum_{k=1}^n -\frac{Y_k}{t+k-1}$ et $\sum_{k=1}^n R_{t,k}$ ont même loi.

De plus $\sum_{k=1}^n (-\frac{Y_k}{t+k-1})$ et X_{t+n} sont indépendantes ; $\sum_{k=1}^n (-\frac{Y_k}{t+k-1})$ et $h X_{t+n}$ aussi.

Nous avons également vu que $\sum_{k=1}^n h R_{t,k} = h \frac{X_t}{X_t + S_n}$ et $h X_{t+n}$ sont

indépendantes (fin de la page 15).

Alors $\sum_{k=1}^n (-\frac{Y_k}{t+k-1}) + h X_{t+n}$ et $\sum_{k=1}^n h R_{t,k} + h X_{t+n}$ ont même loi.

et la loi de $\sum_{k=1}^n h R_{t,k} + h X_{t+n}$ est la même que celle de $h X_t$.

Ainsi $T_n = \sum_{k=1}^n (-\frac{Y_k}{t+k-1}) + h X_{t+n}$ a même loi que $h X_t$.

Finalement $h X_t$ a même loi que $\sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{t+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k}) + h (\frac{X_{t+n}}{t+n}) + d_{n,t} - \delta$.

Q10) Notons que : 1° $E(h X_t)$ existe et vaut $\psi(t)$.

2° $E(Y_{k+1})$ existe et vaut 1 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3° d'après Q3 c) $E(h (\frac{X_{t+n}}{t+n}))$ existe et

$$-\frac{1}{t+n-1} \leq E(h (\frac{X_{t+n}}{t+n})) \leq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ ce qui donne par}$$

$$\text{en encadrant } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(h (\frac{X_{t+n}}{t+n})) = 0.$$

et la suite $(d_{n,t})_{n \geq 1}$ converge vers 0 d'après 1.c

d'après 99 $E(X_t)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{k+2} \right) + E\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \delta$ a la

même loi que même espérance. ce qui prouve de la linéarité de l'espérance

d'où : $E\left(\frac{X_t}{t}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{E(Y_{k+1})}{k+2} \right) + E\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \delta$.

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = E\left(\frac{X_t}{t}\right) - E\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) - d_{n,t} + \delta$ (car $E(Y_{k+1}) = 1$).

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = E(X_t) - 0 - 0 + \delta$.

La série de terme général $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = E(X_t) + \delta$.

Ainsi $E(X_t) = \psi(t) = -\delta + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$.

1° $V(X_t)$ existe et vaut $\psi'(t)$.

2° $V(Y_{k+1})$ existe et vaut 1 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3° $V\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$ existe pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}_{+} \cup \mathbb{Z}$.

On a $E\left(\frac{X_{t+n}^2}{(t+n)^2}\right) \leq \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} = 0$ il

vient par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\frac{X_{t+n}^2}{(t+n)^2}\right) = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[E\left(\frac{X_{t+n}^2}{(t+n)^2}\right) - \left(E\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)^2 \right] = 0 - 0^2 = 0$.

4° Les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ et $\frac{X_{t+n}}{t+n}$ sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc pour $-\frac{Y_1}{t}, -\frac{Y_2}{t+1}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}$ et $\frac{X_{t+n}}{t+n}$.

5° X_t a même loi que $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{k+2} \right) + \frac{X_{t+n}}{t+n} + d_{n,t} - \delta$.

Ce qui précède donne alors :

$$\psi'(t) = V(h, X_t) = V\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{Y_{t+k}}{t+k}\right) + h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \delta\right).$$

$$\psi'(t) = V(h, X_t) = V\left(-\frac{Y_t}{t} - \frac{Y_{t+1}}{t+1} - \dots - \frac{Y_{t+n-1}}{t+n-1} + h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k} + d_{n,t} - \delta\right)$$

$$\psi'(t) = V(h, X_t) = V\left(-\frac{Y_t}{t}\right) + V\left(-\frac{Y_{t+1}}{t+1}\right) - \dots - V\left(\frac{Y_{t+n-1}}{t+n-1}\right) + V\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$$

$$\psi'(t) = V(h, X_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{V(Y_{t+k})}{(t+k)^2} + V\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2} + V\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right).$$

$$\text{Avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(V(h, X_t) - V\left(h\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) \right) = V(h, X_t).$$

Alors la série de terme général $\frac{1}{(t+k)^2}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2} = V(h, X_t) = \psi'(t)$

$$\text{Donc } \underline{\underline{V(h, X_t) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}}}$$

$$\textcircled{Q11} \quad \forall t \in]1, +\infty[, \quad -\frac{1}{t-1} \leq E\left(h\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) = E(h, X_t - h, t) \leq 0.$$

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad -\frac{1}{t-1} \leq E(h, X_t) - h, t \leq 0.$$

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad -\frac{1}{t-1} \leq \psi(t) - h, t \leq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t-1}\right) = 0$$

Par conséquent on a bien : $\underline{\underline{\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - h, t) = 0}}}$

- $\textcircled{Q12}$ • Soit une famille de p-échantillon $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ i.i.d. de la loi de $W = U^{1/p}$ alors G_p est une statistique $-p\left(\sum_{i=1}^p h(W_i)\right)$.
Ainsi, d'après le programme, $\underline{\underline{G_p \text{ est un estimateur des paramètres } p}}$.

Soit $1 \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. W_i a même loi que W d'ac $\ln W_i$ a même loi que $\ln W = \frac{1}{p} \ln U$.

Alors $-\frac{1}{p} \ln W_i$ a même loi que $-\ln U$ d'ac $-\frac{1}{p} \ln W_i \hookrightarrow \mathcal{O}(1)$.

Alors $\sum_{i=1}^p (-\frac{1}{p} \ln W_i) \hookrightarrow \Gamma(p)$ car $-\frac{1}{p} \ln W_1, -\frac{1}{p} \ln W_2, \dots, -\frac{1}{p} \ln W_p$ sont indépendantes.

D'ac $\sum_{i=1}^p (-\frac{1}{p} \ln W_i)$ suit la même loi que X_p .

D'ac $\frac{1}{\sum_{i=1}^p (-\frac{1}{p} \ln W_i)}$ suit la même loi que $\frac{1}{X_p}$. A $\frac{1}{X_p}$ possède une espérance

qui vaut $\frac{1}{p-1}$ ($\forall p > 1$) car $p > 1$!)

D'ac $\frac{1}{\sum_{i=1}^p (-\frac{1}{p} \ln W_i)}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p-1}$.

D'ac $\frac{p}{\sum_{i=1}^p (-\ln W_i)}$ possède une espérance qui vaut $\frac{p}{p-1}$. A $\frac{p}{\sum_{i=1}^p (-\ln W_i)} = G_p$.

D'ac $E(G_p) = \frac{p}{p-1} p$.

G_p est par conséquent sans biais de p . G_p est biaisé.

Mais lim $E(G_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\frac{p}{p-1} p) = p$; G_p est un estimateur asymptotiquement

sans biais de p . Montrons que G_p converge en probabilité vers p .

$p > 3$ d'ac $\left(\frac{1}{X_p}\right)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$ comme nous

l'avons vu p 5 (ici $p > 3$).

Alors $\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^p (-\frac{1}{p} \ln W_i)}\right)^2$ possède une espérance qui vaut également $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$.

Alors $E(G_p^2)$ existe et vaut $\frac{(p-1)^2}{(p-1)(p-1)}$.

$(G_p - j)^2 = G_p^2 - 2j G_p + j^2$. A G_p^2 et G_p possèdent une espérance.

Ainsi $E((G_p - j)^2)$ existe et vaut $E(G_p^2) - 2j E(G_p) + j^2$.

$$E((G_p - j)^2) = \frac{(p-1)^2}{(p-1)(p-1)} - 2j \frac{p}{p-1} j + j^2 = \frac{p^2}{(p-1)(p-1)} [p^2 - 2p(p-1) + (p-1)(p-1)].$$

$$E((G_p - j)^2) = \frac{(p+1)j^2}{(p-1)(p-1)}. \text{ Notons que } \lim_{p \rightarrow +\infty} E((G_p - j)^2) = 0.$$

d'après Markov:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq P(|G_p - j| \geq \varepsilon) = P((G_p - j)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((G_p - j)^2)}{\varepsilon^2} \text{ car } (G_p - j)^2$$

prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possède une espérance.

Donc, par encadrement, on a: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{p \rightarrow +\infty} P(|G_p - j| \geq \varepsilon) = 0$.

G_p est un estimateur convergent de j .

Q13) a) random fournit un nombre au hasard de l'intervalle $[0, 1]$

j-random fournit un nombre au hasard de l'intervalle $]0, 1]$

j-random simule alors une loi uniforme sur un intervalle (1) d'estimées 0 et 1...

Alors - h (j+random) / lambda simule une loi exponentielle de paramètre 1

d'après Q9a et - h (j-random) / lambda simule une loi exponentielle de paramètre 1 (rappel: si $x \in P(b, r)$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $x \in P(xb, r)$).

cette fonction simule une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

```
function X(lambda:real):real;
begin
X:=-ln(1-random)/lambda;
end;
```

```
function g(n:integer):real;
var k:integer;s:real;
begin
s:=0;
for k:=1 to n do s:=s+X(1);
g:=s;
end;
```

← une fonction utilisant X

```
function g2(n:integer):real;
var k:integer;s:real;
begin
s:=0;
for k:=1 to n do s:=s-ln(1-random);
g2:=s;
end;
```

← une fonction g qui n'utilise pas X.

```
function m(p:integer):real;
var k:integer;s:real;
begin
s:=0;
for k:=1 to p do s:=s-ln(1-random);
m:=p/s;
end;
```

← une fonction m qui n'utilise ni X ni g.

```
var k:integer;
```

```
begin
randomize;
```

```
for k:=1 to 100 do
writeln(m(10*k));
readln;
```

```
end.
```

← on appelle m pour des valeurs de p de plus en plus grandes
 car comme $\left(\frac{p}{X_p}\right)_{p \geq 1}$ converge en probabilité vers 0 on doit
 constater que l'ordité des valeurs qui s'approchent de 0. Ce n'est
 pas évident lorsque l'on exécute le programme ...



Dans la suite nous supposons que si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels strictement
 positifs deux à deux distincts, l'ensemble des variables aléatoires
 appartenant aux suites $(X_{a_n})_{n \geq 1}$ et $(Y_{a_n})_{n \geq 1}$ sont indépendantes.

PARTIE III Quelques propriétés de la fonction Γ .

(Q15) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ ↑ indices pairs! ↓ indices impairs!

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{Q_{k+1}}{t+k} \right) = 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{Q_{2k+1}}{t+2k} \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{Q_{2k+2}}{t+2k+1} \right) \right)$$

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Q_{k+1}}{t+k} \right) = 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_{2k+1}}{t+2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_{2k+2}}{t+2k+1} \right)$$

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Q_{k+1}}{t+k} \right) = 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2k+2} - \frac{Q_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2k+2} - \frac{Q_{2k+2}}{\frac{t}{2}+k+1} \right) \right)$$

$$\text{d'où } 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Q_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Q_{k+1}}{\frac{t}{2}+k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Q_{k+1}}{\frac{t}{2}+k+1} \right) + 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \right)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Or $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$; $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = h_{2n} - \frac{1}{2} h_n$

d'où $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = h_{2n} - \frac{1}{2} h_n - \frac{1}{2} h_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = h_{2n} - h_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $w_n = h_{2n} - h_n = (h_n + \delta_n) - h_n = \delta_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \delta - \delta + h \delta$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = h \delta$

c) d'après ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{\frac{t}{2}+k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{\frac{t}{2}+k+1} \right) + 2 w_n$$

d'après Q3 d) $2L X_t$ a même loi que $2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{k+2} \right) + 2L_n \left(\frac{X_t + L_n}{t + L_n} \right) + 2d_{n,t} - 2\delta$

donc $2L X_t$ a même loi que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{\frac{k}{2} + 1} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{\frac{k}{2} + 1} \right) + 2L_n + 2L_n \left(\frac{X_t + L_n}{t + L_n} \right) + 2d_{n,t} - 2\delta.$$

Notons aussi que $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{\frac{k}{2} + 1} \right) + L_n \left(\frac{X_{\frac{t}{2}} + n}{\frac{t}{2} + n} \right) + d_{n, \frac{t}{2}} - \delta$ a même loi que $L_n X_{\frac{t}{2}}$.
 ok pour γ_{k+1} !!

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_{k+1}}{\frac{k}{2} + 1} \right) + L_n \left(\frac{X_{\frac{t}{2}} + n}{\frac{t}{2} + n} \right) + d_{n, \frac{t}{2}} - \delta$ a même loi que $L_n X_{\frac{t}{2}}$.
 ok pour γ_{k+1} !!

Alors $2L X_t$ a même loi que :

$$L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} = \underbrace{L_n \left(\frac{X_{\frac{t}{2}} + n}{\frac{t}{2} + n} \right)}_{A_n} + \underbrace{L_n \left(\frac{X_{\frac{t+1}{2}} + n}{\frac{t+1}{2} + n} \right)}_{B_n} + \underbrace{2L_n \left(\frac{X_t + L_n}{t + L_n} \right)}_{C_n} + \underbrace{2d_{n,t} - d_{n, \frac{t}{2}} - d_{n, \frac{t+1}{2}} + 2L_n}_{U_n}$$

$$D_n = A_n + B_n + C_n$$

$2L X_t$ a même loi que $L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + D_n + U_n$.

d'après Q3 d) les suites $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$, et $(C_n)_{n \geq 1}$ convergent en probabilité vers 0
 donc la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ converge également en probabilité vers 0 d'après Q4 a)

Notons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \times 0 - 0 - 0 + 2L_n L = 2L^2$.

$$L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + 2L^2 + \underbrace{D_n + U_n - 2L^2}_{V_n} = L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + D_n + U_n.$$

Alors d'après Q4 b) $(L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + D_n + U_n)$ converge en probabilité vers

$L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + 2L^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + D_n + U_n$

a même loi que $2L X_t$. Alors les variables aléatoires $2L X_t$ et

$L_n X_{\frac{t}{2}} + L_n X_{\frac{t+1}{2}} + 2L^2$ ont même loi.

Ainsi 2 la X_t est de même loi que la variable aléatoire

$$\underline{\ln X_{\frac{t}{2}} + \ln \frac{X_{t+1}}{2} + 2 \ln 2.}$$

d) d'après ce qui précède: $\ln X_0 + \ln X_{0+\frac{1}{2}} + 2 \ln 2$ a même loi que $\ln X_{20}$.

donc $r \ln X_0 + r \ln X_{0+\frac{1}{2}} + 2r \ln 2$ a même loi que $2r \ln X_{20}$.

Alors $\ln(2^{2r} X_0^r X_{0+\frac{1}{2}}^r)$ a même loi que $\ln X_{20}^{2r}$.

donc X_{20}^{2r} et $2^{2r} X_0^r X_{0+\frac{1}{2}}^r$ est même loi.

e) En posant $\alpha = 1/2$ on peut dire que $X_{\frac{1}{2}}^{2r}$ et $2^{2r} X_{1/2}^r X_{\frac{1}{2}}^r$ est même loi.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Notons que $E(X_t^n)$ existe. Il suffit de montrer que :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$\int_0^{+\infty} x^n \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} dx$ est absolument convergente ou simplement convergente car

$x \mapsto x^n \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)}$ est positive sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[. \quad x^n \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)} \frac{e^{-x} x^{t+n-1}}{\Gamma(t+n)}. \quad \text{On } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{t+n-1}}{\Gamma(t+n)} dx$$

existe et vaut 1. Ainsi $\int_0^{+\infty} x^n \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} dx$ existe et vaut $\frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$.

donc $E(X_t^n)$ existe et vaut $\frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$.

Ainsi $E(X_{\frac{1}{2}}^{2r})$ existe et vaut $\frac{\Gamma(1+2r)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+2r) = 2r \Gamma(2r)$.

$E(X_{1/2}^r)$ existe et vaut: $\frac{\Gamma(1/2+r)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(r + \frac{1}{2})$.

$$E(X_1^r) \text{ existe et vaut } \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+r) = r \Gamma(r).$$

En supposant $X_{1/2}$ et X_1 indépendantes on a $X_{1/2}^r$ et X_1^r indépendantes.

$$\text{Ainsi } E(X_2^{2r}) = E(2^{2r} X_{1/2}^r X_1^r) = 2^{2r} E(X_{1/2}^r) E(X_1^r).$$

$$\text{Donc } 2r \Gamma(2r) = 2^{2r} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(r + \frac{1}{2}) r \Gamma(r).$$

$$\text{Alors : } \sqrt{\pi} \Gamma(2r) = \frac{2^{2r} r}{2r} \Gamma(r) \Gamma(r + \frac{1}{2}).$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{2^{2r-1} \Gamma(r) \Gamma(r + \frac{1}{2}) = \Gamma(2r) \sqrt{\pi}}}$$

Q15 Deuxième application : la formule de Stirling.

a) Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} = \frac{1}{u^2(u+1)^2} [a(u+1)^2 + bu^2 + cu(u+1)^2 + d(u+1)u^2]$

$\frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} = \frac{1}{u^2(u+1)^2} [(c+d)u^3 + (a+b+2c+d)u^2 + (2a+c)u + a]$

Il suffit de c d'avoir $\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ 2a+c=0 \\ a=1 \end{cases}$ pour avoir $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1}$.

$\begin{cases} c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ 2a+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-2 \\ d=2 \\ b=1 \end{cases}$

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u} + \frac{2}{u+1}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}$ d'après p 30. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(t+k+1)^2} + 2 \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{t+k+1} - \frac{1}{t+k} \right) \right)$

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(t+k)^2} + 2 \left(\frac{1}{t+n+1} - \frac{1}{t} \right)$

Les séries de termes généraux $\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$ et $\frac{1}{(t+k)^2}$ étant convergentes, en

passant le n vers $+\infty$ il vient :

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \psi'(t) + \psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 2\psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}$.

Ainsi $\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(t+\frac{1}{4})^3} - \frac{1}{(t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^3} \right) \leq \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^4 (t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(t+\frac{1}{4})^3} - \frac{1}{(t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^3} \right)$$

En sommant de $k=0$ à n et par "télescopage" il vient :

$$\frac{1}{3} \left[\frac{1}{(t+\frac{1}{4})^3} - \frac{1}{(t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^3} \right] \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^4 (t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^2} \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^3} \right]$$

En faisant k aller à l'infini on obtient : $\frac{1}{3(t+\frac{1}{4})^3} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^4 (t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})^2} \leq \frac{1}{3t^3}$.

En divisant par 2 et en ajoutant $\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$ il vient :

$$\frac{1}{6} \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \leq \psi'(t) \leq \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}.$$

Avec $\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t+\frac{1}{4})^3} \leq \psi'(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}$ et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}_+^n$.

Pour $\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi_1(t) = \psi(t) - \ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{32(t+\frac{1}{4})^2}$ et

$$\varphi_2(t) = \psi(t) - \ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{32t^2}.$$

φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$\forall t \in]0, +\infty[, \varphi_1'(t) = \psi'(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6(t+\frac{1}{4})^3} \geq 0.$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \varphi_2'(t) = \psi'(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6t^3} \leq 0.$$

φ_1 est croissante sur $]0, +\infty[$ et φ_2 est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Rappelons que $\lim_{t \rightarrow 0} (\psi(t) - \ln t) = 0$. Alors $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_2(t) = 0$.

Avec ces conditions $\forall t \in]0, +\infty[, \varphi_1(t) \leq 0$ et $\varphi_2(t) \geq 0$.

$$\text{Alors } \forall t \in]0, +\infty[, \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{32t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t \leq -\frac{1}{2t} - \frac{1}{32(t+\frac{1}{4})^2}.$$

V1 soit $t \in]1, +\infty[$. $h > 0$. Alors:

$$1 - \frac{1}{2t+2t} - \frac{1}{2t+2t} \leq \frac{\psi(t)}{2t} \leq 1 - \frac{1}{2t+2t} - \frac{1}{2(t+\frac{1}{4})^2 2t}$$

$$\text{On passe } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2t+2t} - \frac{1}{2t+2t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2t+2t} - \frac{1}{2(t+\frac{1}{4})^2 2t} \right) = 1.$$

Par encadrement il vient: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{2t} = 1$. $\psi(t) \sim 2t$.

V2 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - 2t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t} = 0$.

Par produit $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\psi(t)}{2t} - 1 \right) = 0$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{2t} = 1$. $\psi(t) \sim 2t$.

$$\forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t+\frac{1}{4})^3} + \frac{1}{t} \leq \psi'(t) \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{t}.$$

En multipliant par t il vient: $\forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{2t} + \frac{t}{6(t+\frac{1}{4})^3} + 1 \leq t\psi'(t) \leq \frac{1}{2t} + \frac{1}{6t^2} + 1$.

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2t} + \frac{t}{6(t+\frac{1}{4})^3} + 1 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{6t^2} + 1 \right) = 1.$$

Par encadrement il vient $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t\psi'(t)) = 1$. $\psi'(t) \sim \frac{1}{t}$.

Finalement: $E(h, X_t) \sim 2t$ et $V(h, X_t) \sim \frac{1}{t}$.

c) soit y un réel tel que $y > t > 0$.

$$\int_t^y (\psi(x) - hx + \frac{1}{2x}) dx = \left[h |r(x)| - (xhx - x) + \frac{1}{2} h x \right]_t^y$$

$\uparrow$
 $\psi = \frac{r'}{r}$

$$\int_t^y (\psi(x) - hx + \frac{1}{2x}) dx = h r(y) - xy h y + y + \frac{1}{2} h y - h r(t) + th t - t - \frac{1}{2} h t.$$

soit $y \in]t, +\infty[$, ce que prècède donne :

$$\ln |r(y)| - \ln y^2 = \ln c^2 + \ln y''' = \int_t^y (\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}) du + \ln P(t) - t \ln t + t + \frac{1}{2} \ln t$$

$$\text{d'où } \ln \frac{|r(y)| e^y y'''}{y^2} = \int_t^y (\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}) du + \ln P(t) - t \ln t + t + \frac{1}{2} \ln t$$

$$\text{ou } \ln \left(\frac{|r(y)|}{y^{2-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) = \int_t^y (\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}) du + \ln P(t) - t \ln t + t + \frac{1}{2} \ln t.$$

Pour montrer que $y \mapsto \ln \left(\frac{|r(y)|}{y^{2-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right)$ admet une limite finie en $+\infty$ il suffit d'ac-

croire que $\int_t^{+\infty} (\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}) du$ converge.

$$\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{12x^2} \leq \psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \leq -\frac{1}{12(x+\frac{1}{4})^2}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{12} \leq x^2 (\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}) \leq -\frac{x^2}{12(x+\frac{1}{4})^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{12(x+\frac{1}{4})^2} = -\frac{1}{12}.$$

$$\text{Par conséquent il vient } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 (\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x})) = -\frac{1}{12}.$$

$$\text{Alors } \psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \sim -\frac{1}{12x^2}.$$

$$-(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}) \sim \frac{1}{12x^2} \quad / \quad \int_t^{+\infty} \frac{du}{12u^2} \text{ converge et } \forall t \in]t, +\infty[, \frac{1}{12u^2} \geq 0$$

les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives
montrant que $\int_t^{+\infty} (\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}) du$ converge ; $\int_t^{+\infty} (\psi(u) - \ln u + \frac{1}{2u}) du$ converge.

Ainsi $y \mapsto \ln \left(\frac{|r(y)|}{y^{2-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right)$ admet une limite finie en $+\infty$... notée θ

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $(x + \frac{1}{2})^x (1 + \frac{1}{2x})^{-x} = \left(\frac{2x+1}{2}\right)^x \left(\frac{2}{2x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = x^x. \quad (\blacktriangle)$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{p(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) = 0. \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{p(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) = e^0 \text{ et } e^0 \neq 0.$$

Alors $\frac{p(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} e^0. \quad \underline{\underline{p(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} e^0 y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}}$

soit e) $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, 2^{2y-1} p(y) p(y+\frac{1}{2}) = p(2y) \sqrt{\pi}.$

Alors $2^{2y-1} e^0 y^{y-1/2} e^{-y} e^0 (y+\frac{1}{2})^y e^{-(y+\frac{1}{2})} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} e^0 (2y)^{2y-1/2} e^{-2y} \sqrt{\pi}$

En multipliant il vient

$$e^0 y^{y-\frac{1}{2}} (y+\frac{1}{2})^y e^{-1/2} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y^{2y-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{y}} y^{2y}. \quad \text{En multipliant par } \sqrt{y}$$

il vient $e^0 y^y (y+\frac{1}{2})^y e^{-1/2} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} y^{2y}$ ou encore:

$$e^0 \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} e^{1/2} y^y (y+\frac{1}{2})^{-y} = \sqrt{2\pi} e^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2y}\right)^{-y} \quad (\blacktriangle)$$

Alors $e^0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2\pi} e^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2y}\right)^{-y} \right).$

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \left(1 + \frac{1}{2y}\right)^{-y} = e^{-y \ln \left(1 + \frac{1}{2y}\right)}. \quad -y \ln \left(1 + \frac{1}{2y}\right) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} -y \left(\frac{1}{2y}\right) = -\frac{1}{2}.$

soit $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-y \ln \left(1 + \frac{1}{2y}\right) \right) = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2y}\right)^{-y} = e^{-1/2}.$

Alors $e^0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2\pi} e^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2y}\right)^{-y} \right) = \sqrt{2\pi} e^{1/2} e^{-1/2} = \sqrt{2\pi}. \quad \underline{\underline{e^0 = \sqrt{2\pi}}}$

$$p(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} e^0 y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} = \sqrt{2\pi} y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} =$$

$$\underline{\underline{p(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}}}$$

Exercice: "Retroover"

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$