

PARTIE I

Q1 Δ Nous supposons donc toute la suite que f_X est définie sur $\mathbb{R}$.

le lepte ne le dit pas mais l'utilise.

Ainsi f_X est définie et positive sur $\mathbb{R}$. f_X est continue sur $\mathbb{R}-0$ car 0 a une petite f_X de $\mathbb{R}$. Dans ces conditions :

1) f_X a une borne de densité B' sur $\mathbb{R}-0$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}-0, F'_X(x) = f_X(x).$$

a) $Y_1 = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_{Y_1}(x) = P(\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) = 1 - P(\inf(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)$$

$$F_{Y_1}(x) = 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)). \quad X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont indépendantes :}$$

$$F_{Y_1}(x) = 1 - P(X_1 > x) P(X_2 > x) \dots P(X_n > x) = 1 - (P(X > x))^n = 1 - (1 - F_X(x))^n.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_1}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n. \quad \underline{F_{Y_1} = 1 - (1 - F_X)^n}$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$. $1 - F_X$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$, puis pour $(1 - F_X)^n$ et enfin pour $1 - (1 - F_X)^n$. F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$.

F_X est de densité B' sur $\mathbb{R}-0$. $1 - F_X$ est de même pour $1 - F_X$, puis pour $(1 - F_X)^n$ et enfin pour $1 - (1 - F_X)^n$. F_{Y_1} est de densité B' sur $\mathbb{R}-0$ et est fini.

ce qui précède montre que Y_1 est une variable aléatoire à densité.

On peut également dire que $\forall x \in \mathbb{R}-0, F'_{Y_1}(x) = -n(-F'_X(x))(1 - F_X(x))^{n-1} =$

$$\forall x \in \mathbb{R}-0, F'_{Y_1}(x) = n f_X(x) (1 - F_X(x))^{n-1}$$

$$= n f_X(x) (1 - F_X(x))^{n-1}$$

Pour $\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y_1}(x) = n f_X(x) (1 - F_X(x))^{n-1}$. f_{Y_1} est une fonction positive sur $\mathbb{R}$

qui coïncide sur $\mathbb{R}-0$ avec sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points avec F'_{Y_1} .

Alors f_{Y_1} est une densité de Y_1 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_{Y_n}(x) = P(\sup\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \leq x) = P(\{K_1 \leq x\} \cap \{K_2 \leq x\} \cap \dots \cap \{K_n \leq x\})$.

Pour indépendance. $F_{Y_n}(x) = P(K_1 \leq x) P(K_2 \leq x) \dots P(K_n \leq x) = (P(K \leq x))^n = (F_X(x))^n$.

Donc $F_{Y_n} = F_X^n$.

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus D$. Alors F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est finie.

Donc Y_n est une variable aléatoire à densité.

de plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'_{Y_n}(x) = n F_X^{n-1}(x) f_X(x) = n f_X(x) F_X^{n-1}(x)$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_n}(x) = n f_X(x) F_X^{n-1}(x)$.

f_{Y_n} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_n} sur $\mathbb{R} \setminus D$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{Y_n} est une densité de Y_n .

b) Soit x dans $\mathbb{R}$. Pour $p_x = P(K \leq x)$. $\forall k \in \{1, n\}$, $P(K_k \leq x) = p_x$.

• Pour tout $k \in \{1, n\}$, $J_k(x)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_x .

• Noter que pour tout k dans $\{1, n\}$, $J_k(x)$ est l'indicatrice de l'événement $\{K_k \leq x\}$.

Les événements $\{K_1 \leq x\}, \{K_2 \leq x\}, \dots, \{K_n \leq x\}$ étant indépendants il en est de même des variables aléatoires $J_1(x), J_2(x), \dots, J_n(x)$.

des deux points précédents permettant de dire que $\sum_{k=1}^n J_k(x)$ suit la loi

binomiale de paramètres n et p_x .

$S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et $P(K \leq x) \dots$ ou n et $F_X(x)$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \{1, n\}$.

$\{K_k \leq x\}$ signifie ni et seulement si le $k^{\text{ième}}$ élément de la suite

des valeurs prises par $X_1, X_2, \dots, X_n$ rangées dans l'ordre croissant est inférieur ou égal à x .

Ainsi $\{Y_k \leq x\}$ équivaut à et seulement à au moins k des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prenant une valeur inférieure ou égale à x .

Noter que $S_n(x)$ compte le nombre de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prenant une valeur inférieure ou égale à x .

Alors $\{Y_k \leq x\} = \{S_n(x) \geq k\}$... et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout k dans $\{1, n\}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \{1, n\}$.

$$F_{Y_k}(x) = P(Y_k \leq x) = P(S_n(x) \geq k) = \sum_{j=k}^n P(S_n(x) = j) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p_x^j (1-p_x)^{n-j}.$$

avec $p_x = P(X \leq x) = F_X(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1, n\}, F_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F_X(x))^j (1-F_X(x))^{n-j}$

Soit $k \in \{1, n\}$.

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R} \setminus D$. Pour tout $j \in \{1, n\}$, F_X^j et $(1-F_X)^{n-j}$

sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R} \setminus D$. Alors pour tout $j \in \{1, n\}$,

$\binom{n}{j} F_X^j (1-F_X)^{n-j}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R} \setminus D$.

Ainsi F_{Y_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R} \setminus D$ car D est fini.

Ainsi Y_k est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus D, f'_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} j F_X(x)^{j-1} (1-F_X(x))^{n-j} + \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} F_X(x)^j (n-j) (-F_X'(x)) (1-F_X(x))^{n-j-1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus D, f'_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} j F_X(x)^{j-1} (1-F_X(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (n-j) F_X(x)^j (1-F_X(x))^{n-j-1}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}_{Y_k}(x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} j f_X(x) F_X(x)^{j-1} (1-F_X(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (n-j) f_X(x) F_X(x)^j (1-F_X(x))^{n-j-1}$

$\hat{f}_{Y_k}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec f'_{Y_k} sur $\mathbb{R} \setminus D$ donc sur $\mathbb{R}$ par le théorème de prolongement.

Ainsi de plus, Alors $\hat{f}_{Y_k}$ est une densité de Y_k . Nous allons maintenant définir $\hat{f}_k$ et

voir que l'application pour $k=1$ et n , $\hat{f}_{Y_1}$ et $\hat{f}_{Y_n}$ (l'écriture de qui a motivé $\hat{f}_k$!)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Faisons le changement d'indice $j \leftarrow j+1$ dans la première somme. On obtient alors :

$$\hat{f}_{Y_L}(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} f_X(u) (F_X(u))^j (1-F_X(u))^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (u-j) f_X(u) (F_X(u))^j (1-F_X(u))^{n-j-1}$$

$n-j=0$ si $j=n$!!

Cela donne, à une constante près ($k=n-1$) : $\hat{f}_{Y_L}(u) =$

$$\binom{n}{k} k f_X(u) (F_X(u))^{k-1} (1-F_X(u))^{n-k} + \sum_{j=k}^{n-1} [\binom{n}{j+1} (j+1) - \binom{n}{j} (u-j)] f_X(u) (F_X(u))^j (1-F_X(u))^{n-j-1}$$

Soit $j \in \llbracket k, n-1 \rrbracket$. $\binom{n}{j+1} (j+1) - \binom{n}{j} (u-j) = \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} (j+1) - \frac{n!}{j!(n-j)!} (u-j)$

donc $\binom{n}{j+1} (j+1) - \binom{n}{j} (u-j) = \frac{n!}{j!(n-j-1)!} - \frac{n!}{j!(n-j-1)!} = 0$!!

donc $\hat{f}_{Y_L}(u) = \binom{n}{k} k f_X(u) (F_X(u))^{k-1} (1-F_X(u))^{n-k}$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\hat{f}_{Y_1}(u) = n f_X(u) (1-F_X(u))^{n-1} = f_{Y_1}(u)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $\hat{f}_{Y_1} = f_{Y_1}$!

$\hat{f}_{Y_n}(u) = n f_X(u) (F_X(u))^{n-1} = f_{Y_n}(u)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. $\hat{f}_{Y_n} = f_{Y_n}$!

Pour conclure $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f_{Y_k} = \hat{f}_{Y_k}$! Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_{Y_k} = \hat{f}_{Y_k}$!!

19 $\forall k \in \mathbb{R}$, $f_{Y_k}(u) = \binom{n}{k} k f_X(u) (F_X(u))^{k-1} (1-F_X(u))^{n-k}$

20 f_{Y_k} est une densité de Y_k .

f) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. X possède un moment d'ordre r donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt$ est convergent. Rien n'empêche et évidemment convergente en $t \mapsto t^r f_X(t)$ garde un signe constant sur $[0, r_0] \subset \mathbb{R}$ et sur $]r_0, \infty[$.

Rappelons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0, 1]$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq (F_X(t))^{k-1} (1-F_X(t))^{n-k} \leq 1$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq |t^r p_{\frac{r}{2}}(t)| = \binom{n}{k} |t^r| p_k(t) (F_X(t))^{k-1} (1-F_X(t))^{n-k} \leq \binom{n}{k} |t^r| p_k(t) = \binom{n}{k} |t^r| p_k(t)$$

de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n}{k} |t^r| p_k(t) dt$ converge.

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{k} |t^r| p_k(t) \geq 0 \\ 0 \leq (F_X(t))^{k-1} (1-F_X(t))^{n-k} \leq 1 \end{array} \right.$$

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives doivent nous permettre (!!) que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r p_{\frac{r}{2}}(t)| dt$ converge.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r p_{\frac{r}{2}}(t) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Enfinement γ_k possède un moment d'ordre r pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$

... ceci lorsque X possède un moment d'ordre r .

(Q2) a) Notons que $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in [1, +\infty[\\ 0 & x \in]-\infty, 1] \end{cases}$. $x \mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Alors F_X est continue sur $] -\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
 $x \mapsto 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Donc F_X est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\forall x \in]-\infty, 1[, F'_X(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, F'_X(x) = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

F_X est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[, F'_X(x) > 0$. Alors F_X est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

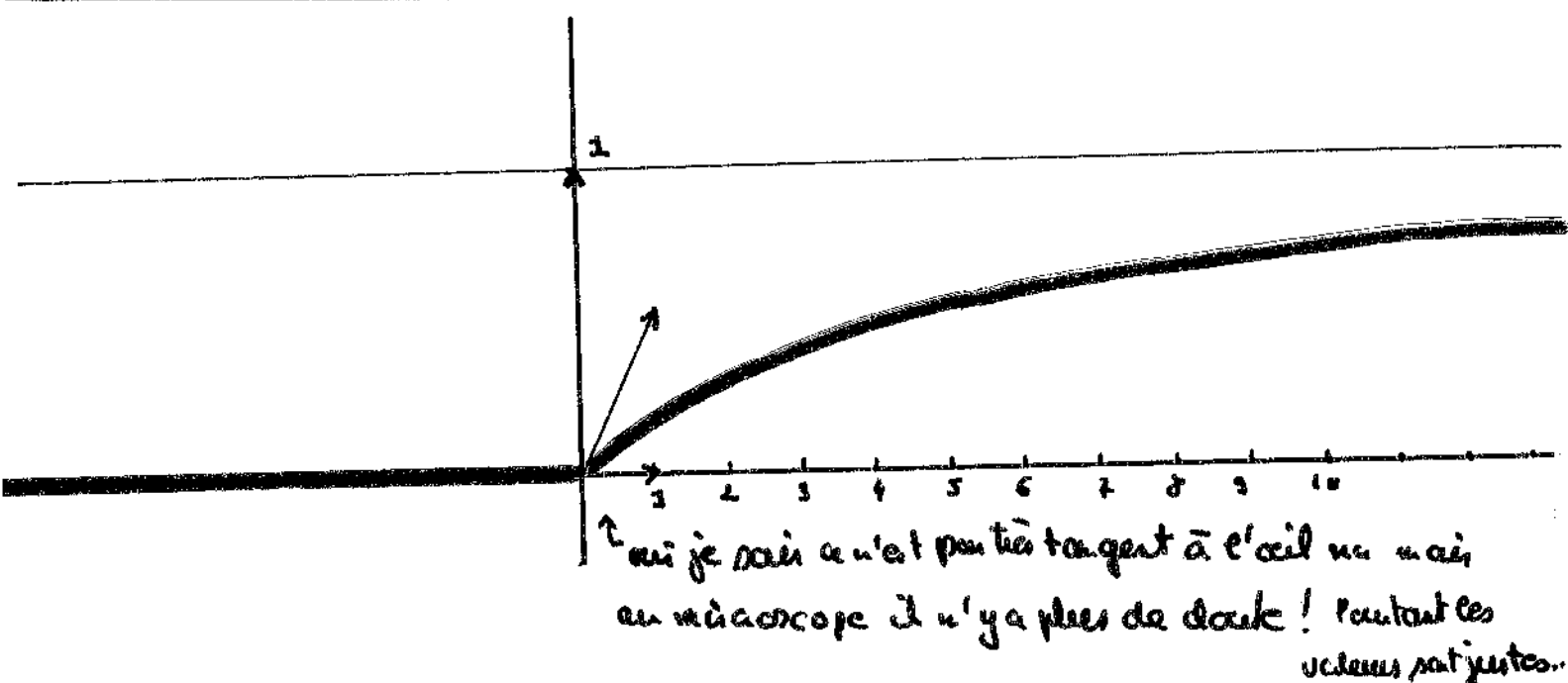
$$\text{Notons que } F'_X \text{ est dérivable sur }]1, +\infty[\text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, F''_X(x) = -\frac{3}{4} \frac{1}{x^{5/2}}.$$

F_X est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[, F''_X(x) \leq 0$.

Alors F_X est concave sur $[1, +\infty[$.

Notons encore que F_X est dérivable à droite en 1 et $(F_X)'_d(1) = \frac{1}{2}$.

(F_X est également dérivable à gauche en 1 et $(F_X)'_g(1) = 0$)



Notons aussi que f_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ceci suffit pour dire que X est une variable aléatoire à densité (... mais à décrire au détail que ...)

$$\forall x \in]-1, 1[, f'_X(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, f'_X(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^3}$$

$$\text{Pour } \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$$

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec f'_X sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_X est une densité de X .

b) X possède quand même un moment d'ordre 0 !

$$\forall x \in]1, +\infty[, \int_x f_X(t) dt = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \text{ diverge.}$$

$$\text{Mais } \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt \text{ diverge. } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt \text{ diverge également !}$$

Ainsi X ne possède pas de moment d'ordre 1.

Mais pour tout r donné, X ne possède pas de moment d'ordre r .

(si X possède un moment d'ordre r , X possède un moment d'ordre r' pour tout $r' \in [0, r] \cup \dots$)

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \in]-\infty, 1[$, $F_X(x) = 0 \neq \frac{1}{2}$.

Supposons que $x \in [1, +\infty[$. $F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ainsi: $\exists ! x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \frac{1}{2} \quad x = 4$.

d) Soit $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$. $\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y_l}(x) = \frac{h}{2} \binom{n}{l} f_X(x) (F_X(x))^{l-1} (1 - F_X(x))^{n-l}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in]-\infty, 1[$, $f_{Y_l}(x) = 0$. Supposons que $x \in [1, +\infty[$.

$$f_{Y_l}(x) = \frac{h}{2} \binom{n}{l} \frac{1}{2} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{l-1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^{n-l}$$

$$f_{Y_l}(x) = \frac{h}{2} \binom{n}{l} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-l} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{l-1}$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y_l}(x) = \begin{cases} \frac{h}{2} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-l+3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{l-1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{l-1} = 1 \text{ donc } f_{Y_l}(x) \sim \frac{h}{2} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-l+3} = \frac{h}{2} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-l+3}{2}}$$

Q3) a) Soit $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$.

$$1) \quad x f_{Y_l}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{h}{2} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-l+3}{2}-1} = \frac{h}{2} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-l+1}{2}}$$

2) $\forall x \in [1, +\infty[$, $x f_{Y_l}(x) \geq 0$.

Alors $\int_1^{+\infty} x f_{Y_l}(x) dx$ ad de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{h}{2} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-l+1}{2}} dx$ ou que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{n-l+1}{2}}} dx. \quad l \leq n-1 \text{ donc } n-l \geq 1; \quad n-l+1 \geq 2; \quad \frac{n-l+1}{2} \geq \frac{3}{2} > 1.$$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{n-k+1}{2}}}$ converge d'ac $\int_1^{+\infty} u p_{\gamma_k}(u) du$ converge.

Noter que $\int_{-\infty}^1 u p_{\gamma_k}(u) du$ existe et vaut 0.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} u p_{\gamma_k}(u) du$ converge.

γ_k possède une espérance qui vaut $\int_1^{+\infty} u p_{\gamma_k}(u) du$.

Soit $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$

b) Soit $A \in \Gamma_1, +\infty$. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et de dom $\mathcal{B}'$ sur $\Gamma_1, +\infty$. Calc partiel

et changeant de variable $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donne ce qui suit.

$$\int_1^A u p_{\gamma_k}(u) du = \frac{k}{2} \binom{n}{k} \int_1^A u \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)^{n-k+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u}} \right)^{k-1} du.$$

$$\int_1^A u p_{\gamma_k}(u) du = \frac{k}{2} \binom{n}{k} \int_1^{1/\sqrt{A}} \frac{1}{t^2} e^{n-k+1} (1-t)^{k-1} \left(-\frac{2}{t^3} \right) dt.$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{u}} \\ x = \frac{1}{t^2} \cdot du = -\frac{2}{t^3} dt. \end{cases}$$

$$\int_1^A u p_{\gamma_k}(u) du = k \binom{n}{k} \int_{1/\sqrt{A}}^1 t^{n-k-2} (1-t)^{k-1} dt. \quad (*)$$

$n-k-2 \in \mathbb{N}$ et $k-1 \in \mathbb{N}$. Alors $t \mapsto t^{n-k-2} (1-t)^{k-1}$ est continue sur $[0, 1]$

d'ac $\int_0^1 t^{n-k-2} (1-t)^{k-1} dt$ converge !

a $\int_1^{+\infty} u p_{\gamma_k}(u) du$ converge et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{A}} = 0$.

Dans ces conditions a fait la tâche nous tend, (*) donne :

$$\int_1^{+\infty} u p_{\gamma_k}(u) du = k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k-2} (1-t)^{k-1} dt.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, $E(\gamma_k) = k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k-2} (1-t)^{k-1} dt.$

cl) montrons par récurrence sur r que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{N}^*, I_{r,\lambda} = \frac{(r-1)!(\lambda-1)!}{(r+\lambda-1)!}$$

* Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{1,\lambda} = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} dt = \left[-\frac{(1-t)^\lambda}{\lambda} \right]_0^1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{0!(\lambda-1)!}{\lambda!} = \frac{(1-1)!(\lambda-1)!}{(1+\lambda-1)!}.$$

$\forall \lambda \in \mathbb{N}^*, I_{1,\lambda} = \frac{(1-1)!(\lambda-1)!}{(1+\lambda-1)!}$. la propriété est vraie pour $r=1$.

* Supposons la propriété vraie pour r dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $r+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que : $\forall \lambda \in \mathbb{N}^*, I_{r,\lambda} = \frac{(r-1)!(\lambda-1)!}{(r+\lambda-1)!}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{r+1,\lambda} = \int_0^1 t^r (1-t)^{\lambda-1} dt.$$

u = t et v = $\frac{(1-t)^\lambda}{\lambda}$ par la Co. 17.

$\forall t \in [0,1], u'(t) = r t^{r-1}$ et $v'(t) = (1-t)^{\lambda-1}$.

En intégrant par parties il vient alors :

$$I_{r+1,\lambda} = \int_0^1 t^r (1-t)^{\lambda-1} dt = \underbrace{\left[t^r \left(-\frac{(1-t)^\lambda}{\lambda} \right) \right]_0^1}_{=0 \text{ car } r \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda \in \mathbb{N}^*} - \int_0^1 t^r \left(-\frac{(1-t)^\lambda}{\lambda} \right) dt.$$

$$\text{Donc } I_{r+1,\lambda} = \frac{r}{\lambda} \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^\lambda dt = \frac{r}{\lambda} I_{r,\lambda+1}.$$

L'hypothèse de récurrence donne : $I_{r+1,\lambda} = \frac{r}{\lambda} I_{r,\lambda+1} = \frac{r}{\lambda} \frac{(r-1)!(\lambda+1-1)!}{(r+\lambda+1-1)!}$.

$$I_{r+1,\lambda} = \frac{r! \lambda!}{\lambda (r+\lambda)!} = \frac{r! (\lambda-1)!}{(r+\lambda)!} = \frac{(r+1-1)!(\lambda-1)!}{(r+1+\lambda-1)!}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{N}^*, I_{r+1,\lambda} = \frac{(r+1-1)!(\lambda-1)!}{(r+1+\lambda-1)!}$, la propriété est vraie pour $r+1$ et la récurrence s'achève.

$$\text{Alors } \forall r \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{N}^*, I_{r,\lambda} = \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{\lambda-1} dt = \frac{(r-1)!(\lambda-1)!}{(r+\lambda-1)!}.$$

d) Soit $l \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. $E(Y_l) = l \binom{n}{l} \int_0^1 t^{n-l-1} (1-t)^{l-1} dt = l \binom{n}{l} I_{n-l-1, l}$.

$$E(Y_l) = l \times \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{(n-l-1)!(l-1)!}{(n-l-1+l-1)!} = \frac{n!}{(n-l)!} \frac{(n-l-1)!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)}{(n-l)(n-l-1)}.$$

$$\forall l \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, E(Y_l) = \frac{n(n-1)}{(n-l)(n-l-1)}.$$

e) $n \geq 5$ et n est impair.

Alors $\exists l \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $n = 2l+1$, $l+1 \geq 3$.

$$n-l = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} \geq \frac{5+1}{2} = 3; \quad n-(l+1) \geq 2; \quad l+1 \leq n-2.$$

Ainsi $3 \leq l+1 \leq n-2$.

En particulier $l+1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. ce qui justifie la définition de la médiane

empirique Y_{l+1} .

$1 \leq l+1 \leq n-2$ donc $E(Y_{l+1})$ existe et vaut $\frac{n(n-1)}{(n-l-1)(n-l-2)} \stackrel{n=2l+1}{=} \frac{(2l+1)(2l)}{l(l-1)}$

$$E(Y_{l+1}) = \frac{4l+2}{l-1} = \frac{4(l-1)+6}{l-1} = 4 + \frac{6}{l-1}.$$

$$E(Y_{l+1}) = 4 + \frac{6}{l-1}, \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} E(Y_{l+1}) = 4.$$

Observer que si n tend vers $+\infty$ alors l tend vers $+\infty$ et $E(Y_{l+1})$ tend vers 4 qui est la médiane théorique de X .

$\lim_{l \rightarrow +\infty} E(Y_{l+1}) = 4$ et 4 est la médiane théorique de X , la suite

$(Y_{l+1})_{l \geq 2}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais de

la médiane empirique de X ... Bof ... e dépend de n !

Q4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x) = P(Z_n \leq x) = P(\frac{1}{n^2} Y_n \leq x) = P(Y_n \leq n^2 x) = F_{Y_n}(n^2 x)$.

$$F_{Y_n}(n^2 x) = (F_X(n^2 x))^n = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 x}}\right)^n & \text{si } n^2 x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n & \text{si } x \in [\frac{1}{n^2}, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$$

b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_2(x) = 0$ car φ_2 est nulle sur $]-\infty, 0]$.

• Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

1° Cas... $a < b \leq 0$. Alors $\varphi_2(a) = 0 \leq 0 = \varphi_2(b)$; $\varphi_2(a) \leq \varphi_2(b)$.

2° Cas... $a \leq 0 < b$. Alors $\varphi_2(a) = 0 \leq e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \varphi_2(b)$; $\varphi_2(a) \leq \varphi_2(b)$.

3° Cas... $0 < a < b$. Alors $\frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$; $-\frac{1}{\sqrt{a}} < -\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Ainsi $\varphi_2(a) = e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}} < e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \varphi_2(b)$, on a donc $\varphi_2(a) \leq \varphi_2(b)$,
ce qui prouve que φ_2 est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque... Noter que les deux points précédents montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_2(x) \in [0, 1].$$

• $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}$ car φ_2 et de classe $\mathcal{B}'$ sur $]-\infty, 0]$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition φ_2 est de classe $\mathcal{B}'$ sur $]0, +\infty[$

Alas 19 φ_2 est donc B' sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ provient d'un ensemble fini de points

29 φ_2 est continue en tout point de $\mathbb{R}^+$ et φ_2 est continue à gauche en 0.

$$\varphi_2(0) = 0. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0 = \varphi_2(0)$$

Alas φ_2 est continue à droite en 0.

Finalement φ_2 est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

ceci achève de montrer que φ_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité z !

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_{Z_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n & x \in \left[\frac{1}{n^2}, +\infty\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $x \in]-\infty, 0]$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = \varphi_2(x)$.

soit $x \in]0, +\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \geq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow nx \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Pour $n_0 = \lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \rfloor + 1$. $n_0 \in \mathbb{N}^*$. $n_0 > \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $x > \frac{1}{n_0^2}$; $x \geq \frac{1}{n_0^2}$.

$\forall n \in [n_0, +\infty[$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} \leq x$.

Alors $\forall n \in [n_0, +\infty[$, $x \in \left[\frac{1}{n^2}, +\infty\right)$. $n \ln\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)$

$\forall n \in [n_0, +\infty[$, $F_{Z_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n = e^{\uparrow \substack{1 - \frac{1}{n\sqrt{x}} > 1}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) = 0$; $n \ln\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \sim n \left(-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Par continuité de la fonction exponentielle: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)} = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = \varphi_2(x)$. (24/25) converge au loi vers Z .

PARTIE II Existence et unicite' d'un estimateur optimal

(Q5) • $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout $k \in \{1, n\}$, $X_k \in \mathcal{P}(\Theta, 1)$.

$$\text{Alors } X_1 + X_2 + \dots + X_n \in \mathcal{P}(n\Theta, (\sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2})^2)$$

$$\text{donc } X_1 + X_2 + \dots + X_n \in \mathcal{P}(n\Theta, n).$$

$$\bullet \text{ Alors } \bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \in \mathcal{P}\left(\frac{1}{n} n\Theta, \left(\sqrt{\frac{1}{n^2} n}\right)^2\right).$$

$$\underline{\bar{X}_n \in \mathcal{P}\left(\Theta, \frac{1}{n}\right) \text{ ou } \bar{X}_n \in \mathcal{P}\left(\Theta, \left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2\right).}$$

1° les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

2° elles possèdent la même espérance θ et la même variance 1.

la loi faible des grands nombres montre que la suite de moyennes généralisées

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante}$$

égale à θ .

de plus $E(\bar{X}_n) = \theta$. Alors $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais et converge

Δ voir a) à la fin de 9.6

du paramètre θ .

(Q6) b) $X \in \mathcal{P}(\Theta, 1)$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un n-échantillon i.i.d. de X .

le cours indique alors que $\left[\bar{X}_n - t_\alpha \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}\right]$ est un

intervalle de confiance de θ au risque α ou à la confiance $1-\alpha$,

t_α étant l'unique réel tel que $2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$ ou $\Phi(t_\alpha) = \frac{2-\alpha}{2}$.

Notons que le milieu de cet intervalle de confiance est $\bar{x}_n$.

$$\phi(t_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2} \text{ et } \frac{1-\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}, 1[. \text{ Alors } t_\alpha > 0.$$

$$\phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{\alpha}{2} = 1 - \phi(t_\alpha) = \phi(-t_\alpha); \quad \phi'(\frac{\alpha}{2}) = -t_\alpha; \quad t_\alpha = -\phi'(\frac{\alpha}{2}).$$

$$\left[\bar{x}_n - \left(\frac{-\phi'(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}} \right), \bar{x}_n + \left(\frac{-\phi'(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}} \right) \right] \text{ est un intervalle de confiance du}$$

paramètre θ au risque α dont le milieu est $\bar{x}_n$.

$$\text{Soit plus } f(\alpha) = -\frac{\phi'(\alpha/2)}{\sqrt{n}}.$$

Soit $\beta \in]0, 1[$ (au moins à supposer). Soit $f(\beta) = b f(\alpha)$ avec $0 < b < 1$.

$$-\frac{\phi'(\beta/2)}{\sqrt{n}} = -b \frac{\phi'(\alpha/2)}{\sqrt{n}}; \quad \phi'(\beta/2) = b \phi'(\alpha/2).$$

$$\text{Alors } \frac{\beta}{2} = \phi(\phi'(\beta/2)) = \phi(b \phi'(\alpha/2)); \quad \underline{\underline{\beta = 2\phi(b \phi'(\alpha/2))}}.$$

$$b < 1 \text{ mais } \boxed{\phi'(\alpha/2) < 0} \text{ car } \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } b \phi'(\alpha/2) > \phi'(\alpha/2).$$

Alors $\beta = 2\phi(b \phi'(\alpha/2)) > 2\phi(\phi'(\alpha/2)) = 2 \times \frac{\alpha}{2} = \alpha$ car ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\underline{\underline{\beta > \alpha}}$

⊙ Réciproquement supposons que $\beta > \alpha$. Comme ϕ' est strictement croissante

$$\text{sur }]0, 1[, \quad \phi'(\beta/2) > \phi'(\alpha/2). \text{ Alors } -\frac{\phi'(\beta/2)}{\sqrt{n}} < -\frac{\phi'(\alpha/2)}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Donc } f(\beta) < f(\alpha). \text{ Or pour } 0 < f(\beta) < f(\alpha).$$

$$\text{Alors } 0 < \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} < 1. \text{ Posons } b = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}. \quad \underline{\underline{b \in]0, 1[\text{ et } f(\beta) = b f(\alpha).}}$$

En déduisant les fonctions suivantes sont équivalentes.

$$i) f(\beta) < f(\alpha)$$

$$ii) \exists b \in]0, 1[, f(\beta) = b f(\alpha)$$

$$iii) \beta > \alpha$$

Noter que f est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

Neutrité n'a eut "réduire" l'intervalle de confiance "il faut"
augmenter le risque ou diminuer la confiance...

Retour sur a)

a) Nous savons que ϕ ad de classe B' sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$

Alors ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 1$. Alors ϕ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Notons que ϕ^{-1} est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$ (elle est
même de classe B' sur $]0, 1[$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) \neq 0$).

$\phi(0) = \frac{1}{2}$. Alors $\phi^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[, \phi^{-1}(x) < 0$ et

$\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[, \phi^{-1}(x) > 0$.

(Q7) a) Nous avons déjà vu que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais
de θ .

$\bar{X}_n \in UP(\theta, \frac{1}{n})$ donc $\bar{X}_n$ possède une variance.

Alors $\bar{X}_n$ appartient à $\mathcal{E}_\theta$ et ainsi $\mathcal{E}_\theta$ n'est pas vide.

b) Soit U_n appartenant à $\mathcal{E}_0$.

Noter que $V(\bar{X}_n) \leq V(U_n)$.

$\text{cov}(\bar{X}_n, U_n - \bar{X}_n) = 0$; $\text{cov}(\bar{X}_n, U_n) = \text{cov}(\bar{X}_n, \bar{X}_n)$ (les deux covariances existent car $\bar{X}_n$ et U_n possèdent un moment d'ordre 2).

Alors $V(\bar{X}_n) = \text{cov}(\bar{X}_n, U_n)$, $(V(\bar{X}_n))^2 = (\text{cov}(\bar{X}_n, U_n))^2$.

$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \neq 0$. Supposons $V(U_n) \neq 0$. $\int \bar{X}_n, U_n$ existe et $|\int \bar{X}_n, U_n| \leq 1$

d'après Cauchy.

$$\text{Donc } 1 \geq \frac{(\text{cov}(\bar{X}_n, U_n))^2}{V(\bar{X}_n)V(U_n)} = \frac{(V(\bar{X}_n))^2}{V(\bar{X}_n)V(U_n)} = \frac{V(\bar{X}_n)}{V(U_n)}.$$

$V(U_n) \geq 0$. Alors: $V(\bar{X}_n) \leq V(U_n)$.

Supposons maintenant $V(U_n) = 0$. Alors U_n est presque sûrement constante et on a $\text{cov}(\bar{X}_n, U_n) = 0$. Cela donne alors $0 = V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} !!$

Finalement si U_n appartient à $\mathcal{E}_0$ alors $V(\bar{X}_n) \leq V(U_n)$.

$\bar{X}_n$ est optimal dans $\mathcal{E}_0$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $A_n(\lambda) = (1-\lambda)Z_n + \lambda U_n$.

Z_n et U_n possèdent une variance alors $A_n(\lambda)$ possède une variance et également une espérance.

$$E(A_n(\lambda)) = (1-\lambda)E(Z_n) + \lambda E(U_n) = (1-\lambda)\theta + \lambda\theta = \theta. \quad \underline{E(A_n(\lambda)) = \theta.}$$

Ainsi $A_n(\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}_0$.

$A_n(\lambda) = Z_n + \lambda(U_n - Z_n)$. $A_n(\lambda)$, Z_n et $U_n - Z_n$ possèdent une variance.

$$\text{Alors } V(A_n(\lambda)) = V(Z_n) + V(\lambda(U_n - Z_n)) + 2\text{cov}(Z_n, \lambda(U_n - Z_n)).$$

$$V(A_n(u)) - V(Z_n) = 2\lambda \text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda^2 V(U_n - Z_n).$$

Or $V(A_n(u)) - V(Z_n) \geq 0$ car Z_n est optimal.

Donc $\lambda [2\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda V(U_n - Z_n)] \geq 0$ et ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

Alors 1° $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $2\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda V(U_n - Z_n) \geq 0$

et 2° $\forall \lambda \in]-\infty, 0[$, $2\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) + \lambda V(U_n - Z_n) \leq 0$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures),

dans 1° (resp. 2°) il vient : $2\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) \geq 0$ (resp. ≤ 0).

$$\text{Ainsi } 2\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0. \quad \underline{\underline{\text{cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0.}}$$

⊥ D'après ce qui précède $\text{cov}(Z_n, \bar{X}_n - Z_n) = 0$ car $\bar{X}_n$ appartient à $\mathcal{E}_0$ et Z_n est optimal (S).

$$\text{On a également : } \text{cov}(\bar{X}_n, Z_n - \bar{X}_n) = 0.$$

$$\text{En ajoutant il vient } 0 = \text{cov}(Z_n, \bar{X}_n - Z_n) + \text{cov}(\bar{X}_n, Z_n - \bar{X}_n).$$

$$\text{On a donc } 0 = -\text{cov}(Z_n, \bar{X}_n - Z_n) - \text{cov}(\bar{X}_n, Z_n - \bar{X}_n).$$

$$\text{Alors } 0 = \text{cov}(-Z_n, \bar{X}_n - Z_n) + \text{cov}(\bar{X}_n, \bar{X}_n - Z_n).$$

$$\text{Alors } 0 = \text{cov}(\bar{X}_n - Z_n, \bar{X}_n - Z_n).$$

$$\text{Donc } V(\bar{X}_n - Z_n) = 0. \text{ Ainsi } \bar{X}_n - Z_n \text{ est presque sûrement}$$

$$\text{constante. } \exists \alpha \in \mathbb{R}, P(\bar{X}_n - Z_n = \alpha) = 1.$$

$$\text{Dans ces conditions } E(\bar{X}_n - Z_n) = \alpha. \quad \alpha = E(\bar{X}_n) - E(Z_n) = 0 - 0 = 0.$$

$$\text{Alors } P(\bar{X}_n - Z_n = 0) = 1. \quad \underline{\underline{P(\bar{X}_n = Z_n) = 1.}} \quad \underline{\underline{Z_n = \bar{X}_n \text{ presque sûrement}}}$$

Ainsi || 1° $\bar{X}_n$ appartient à $\mathcal{E}_0$ et est optimal dans $\mathcal{E}_0$

|| 2° si Z_n appartient à $\mathcal{E}_0$ et est optimal dans $\mathcal{E}_0$, $Z_n = \bar{X}_n$ presque sûrement.

Q8 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{D}(0, 1)$ donc $x - 0 \in \mathcal{D}(0, 1)$. $\downarrow$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X \leq x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(X - 0 \leq x - 0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \phi(x - 0) = \phi(0)$$

comme ϕ est injective.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

X possède une médiane théorique π et une seule. $\pi = 0$.

b) Calculer $f_X(\pi)$ t'as dit !! Mais cela dépend de f_X !!

Nous supposons que ici $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2}}$.

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{f_X(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}}$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, F_X(2\pi - x) = P(X \leq 2\pi - x) = P(X \leq 0 - x) = P(X - 0 \leq 0 - x) = \phi(0 - x).$$

$$1 - F_X(x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P(X - 0 \leq x - 0) = 1 - \phi(x - 0) = \phi(0 - x).$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, F_X(2\pi - x) = 1 - F_X(x)}}.$$

La densité f_X que nous avons choisi at continue sur $\mathbb{R}$. Alors F_X est de

classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (de toute manière $F_X : x \mapsto \phi(x - 0) \dots$) et $\forall x \in \mathbb{R}, F_X'(x) = f_X(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(2\pi - x) = 1 - F_X(x).$$

$$\text{En dérivant on obtient : } \forall x \in \mathbb{R}, -f_X(2\pi - x) = -f_X(x).$$

$$\text{Alors } \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f_X(2\pi - x) = f_X(x)}}.$$

c) X possède une espérance donc un moment d'ordre 1. Mais d'après Q 3 f

pour tout $k \in \mathbb{N}$, Y_k possède un moment d'ordre 1 donc une espérance.

Ainsi pour tout k dans $\mathbb{N}$, Y_k possède une espérance.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_{Y_k}(2n-x) = k \binom{n}{k} f_X(x) (F_X(x))^{k-1} (1-F_X(x))^{n-k}$$

$$f_{Y_k}(2n-u) = k \binom{n}{k} f_X(x) (1-F_X(u))^{k-1} (1-(1-F_X(u)))^{n-k}$$

$$f_{Y_k}(2n-u) = k \binom{n}{k} f_X(u) (F_X(u))^{n-k+1-1} (1-F_X(u))^{n-(n-k+1)}$$

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-k+1) \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = (n-k+1) \binom{n}{n-k+1}$$

$$f_{Y_k}(2n-u) = (n-k+1) \binom{n}{n-k+1} f_X(u) (F_X(u))^{(n-k+1)-1} (1-F_X(u))^{n-(n-k+1)} = f_{Y_{n-k+1}}(u)$$

$\uparrow$ $n-k+1 \in \mathbb{N}$!

$\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y_k}(2n-x) = f_{Y_{n-k+1}}(x) \dots = Y_k + 2n$ a même loi que Y_{n-k+1} car $-x+2n$ est x at $n-k+1$ loi!

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_k}(t) dt$ converge et vaut $E(Y_k)$. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. $t \mapsto 2n-t$ est de classe $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u = 2n-t$ donc ce qui suit.

$$\int_A^B t f_{Y_k}(t) dt = \int_{2n-A}^{2n-B} (2n-u) f_{Y_k}(2n-u) (-du) = \int_{2n-B}^{2n-A} (2n-u) f_{Y_{n-k+1}}(u) du$$

$$\int_A^B t f_{Y_k}(t) dt = 2n \int_{2n-B}^{2n-A} f_{Y_{n-k+1}}(u) du - \int_{2n-B}^{2n-A} u f_{Y_{n-k+1}}(u) du \quad (\Delta)$$

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} (2n-A) = +\infty, \lim_{B \rightarrow +\infty} (2n-B) = -\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_k}(t) dt \text{ converge et vaut } E(Y_k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_{n-k+1}}(u) du \text{ converge et vaut } 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{Y_{n-k+1}}(u) du \text{ converge et vaut } E(Y_{n-k+1}).$$

En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ dans (Δ) il vient:

$$E(Y_k) = 2n - E(Y_{n-k+1}). \text{ Alors } E(Y_k - n) = E(Y_k) - n = n - E(Y_{n-k+1}) = E(n - Y_{n-k+1}).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(Y_k - n) = E(n - Y_{n-k+1}).$$

d) $n = 2e + 1$ avec $e \in \mathbb{N}$. Alors $1 \leq e + 1 \leq n$.

$$\text{Donc } E(Y_{e+1} - \pi) = E(\pi - Y_{n-(e+1)+1}).$$

$$E(Y_{e+1}) - \pi = \pi - E(Y_{2e+1-(e+1)+1}) = \pi - E(Y_{e+1})$$

$$\text{Alors } 2E(Y_{e+1}) = 2\pi. \quad \underline{\underline{E(Y_{e+1}) = \pi.}}$$

X possède un moment d'ordre 2 car $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, 1)$.

Alors pour tout $k \in \overline{1, n}$, Y_k possède un moment d'ordre 2 et donc une variance. Ainsi $E(Y_{e+1}) = \pi$ et Y_{e+1} possède une variance.

Donc Y_{e+1} est un élément de $\mathcal{E}_0$. Donc $V(Y_{e+1}) \geq V(\bar{X}_n)$.

$$\text{Donc } \underline{\underline{V(Y_{e+1}) \geq \frac{1}{n}}.}$$

Ici " (Y_{e+1}) " est un estimateur sans biais de la médiane théorique de X .

Partie III. Résultats asymptotiques.

Q9^{a)} Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $e^{\lambda T}$ est une variable aléatoire finie.

Alors $E(e^{\lambda T})$ existe et vaut, d'après la formule de transfert : $e^{\lambda \times 0} P(T=0) + e^{\lambda \times 1} P(T=1)$.

$$\underline{E(e^{\lambda T}) = 1 - p + p e^{\lambda} \text{ et ceci pour tout } \lambda \text{ dans } \mathbb{R}. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, L_T(\lambda) = 1 - p + p e^{\lambda}.$$

b) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ et $h(t) = e^{\lambda t}$ où λ est fixé dans $\mathbb{R}$.

c) T est une variable aléatoire à densité de densité p .

T prend ses valeurs dans $]-\infty, +\infty[$.

h est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

Alors $E(h \circ T)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)p(t)dt$ est absolument convergent.

Notons que $\lambda \times p$ est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi $h \circ T$ possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)p(t)dt$ converge.

Notons aussi que dans ce cas d'existence $E(h \circ T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)p(t)dt$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t)p(t) = e^{\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t^2 - 2\lambda t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t)p(t) = e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 1} e^{-\frac{(t-\lambda)^2}{2 \times 1^2}}.$$

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 1} e^{-\frac{(t-\lambda)^2}{2 \times 1^2}}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale

de paramètres λ et 1. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 1} e^{-\frac{(t-\lambda)^2}{2 \times 1^2}} dt$ existe et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)p(t)dt$ converge et vaut $e^{\lambda^2/2}$.

Ainsi $E(e^{\lambda T})$ existe et vaut $e^{\lambda^2/2}$.

Pour tout réel λ , $L_T(\lambda)$ existe et vaut $e^{\lambda^2/2}$.

Soit $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$e^{\lambda(\sigma T + \theta)} = e^{\lambda\theta} \times e^{(\lambda\sigma)T} \quad E(e^{(\lambda\sigma)T}) \text{ existe et vaut } e^{-\frac{(\lambda\sigma)^2}{2}}$$

Alors $E(e^{\lambda(\sigma T + \theta)})$ existe et vaut $e^{\lambda\theta} e^{-\frac{(\lambda\sigma)^2}{2}}$.

Donc $L_{\sigma T + \theta}(\lambda)$ existe et vaut $e^{\sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \lambda\theta}$.

$L_{\sigma T + \theta}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, L_{\sigma T + \theta}(\lambda) = e^{\sigma^2 \frac{\lambda^2}{2} + \lambda\theta}$.

Remarque. $\sigma T + \theta \hookrightarrow \mathcal{D}(\theta, \sigma^2)$.

(Q10) a) $\forall n \in \mathbb{N}^p, k(n-1) \leq \frac{n}{2} < k(n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^p, 0 < k(n) - \frac{n}{2} \leq 1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^p, 0 < \frac{k(n) - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ on obtient par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k(n) - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} = 0$.

Alors $k(n) - \frac{n}{2} = o(\sqrt{n})$ donc $k(n) = \frac{n}{2} + o(\sqrt{n})$.

b) Soit ϕ la fonction de répartition de T . $\varphi: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}$ et

une (la !) densité de T calculée sur $\mathbb{R}$.

Alors ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \phi'(t) = \varphi(t)$. Ce n'est pas un scoop !

comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \hookrightarrow \mathcal{D}(\theta, 1)$ donc $X - \theta \hookrightarrow \mathcal{D}(0, 1)$.

Pour $\hat{x} \in \mathbb{R}, F_X(\hat{x}) = P(X \leq \hat{x}) = P(X - \theta \leq \hat{x} - \theta) = \phi(\hat{x} - \theta)$. Alors :

F_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}, F_X'(\hat{x}) = \phi'(\hat{x} - \theta)$ et $F_X''(\hat{x}) = \phi''(\hat{x} - \theta)$.

La formule de Taylor-Young appliquée à F_X à l'ordre 2 en θ donne :

$$F_X(\hat{x}) = F_X(\theta) + (\hat{x} - \theta) F'_X(\theta) + \frac{1}{2} (\hat{x} - \theta)^2 F''_X(\theta) + o((\hat{x} - \theta)^2)$$

$\hat{x} \rightarrow \theta$

$$F_X(\theta) = \phi(\theta - \theta) = \phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad F'_X(\theta) = \phi'(\theta - \theta) = \phi'(0) = \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F''_X(\theta) = \phi''(\theta - \theta) = \phi''(0) = \psi'(0) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x) e^{-x^2/2}).$$

$$\text{Avec } F_X(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{x} - \theta) + o((\hat{x} - \theta)^2).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\theta + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) = \theta.$$

$$\text{Avec } F_X(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\theta + \frac{x}{\sqrt{n}} - \theta \right) + o\left(\left(\theta + \frac{x}{\sqrt{n}} - \theta\right)^2\right).$$

$$q_n = F_X(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{x^2}{n}\right) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Ainsi } q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{!!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

qui peut le plus peut le moins...

$$\square \quad \sqrt{n} q_n = \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + o(1) \text{ d'après ce qui précède.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ell(n) = \frac{\sqrt{n}}{2} + o(1) \text{ d'après } p10 a)$$

$$\text{Alors } u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (\ell(n) - n q_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \ell(n) - \sqrt{n} q_n = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} + o(1).$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}. \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et sa limite } u \text{ vaut } -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}.$$

(Q11) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. W_n est une variable aléatoire finie donc $e^{x W_n}$ est également une variable aléatoire finie. Ainsi $E(e^{x W_n})$ existe ; $L_{W_n}(s)$ aussi.

$$L_{W_n}(s) = E(e^{s W_n}) = E\left(e^{s \frac{1}{\sqrt{n}} (S_n(y_1) - n q_1)}\right) = E\left(e^{-s \sqrt{n} q_1} \times e^{\frac{s}{\sqrt{n}} S_n(y_1)}\right).$$

$$L_{W_n}(s) = e^{-s \sqrt{n} q_1} E\left(e^{\frac{s}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n J_2(y_1)}\right) = e^{-s \sqrt{n} q_1} E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{s}{\sqrt{n}} J_2(y_1)}\right).$$

$J_1(y_1), J_2(y_2), \dots, J_n(y_n)$ sont indépendantes.

donc $e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}} J_1(y_1)}, e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}} J_2(y_2)}, \dots, e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}} J_n(y_n)}$ sont indépendantes.

Pour tout $k \in \{1, n\}$, $J_k(y_k)$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $P(X \leq y_k)$ ou $F_X(y_k)$ ou q_n . $q_n \in]0, 1[$ car F_X prend

ses valeurs dans $]0, 1[$ car $X \sim \mathcal{P}(0, 1)$.

donc d'après Q9 on a $E(e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}} J_k(y_k)})$ égale à $1 - q_n + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}}$ et ceci pour tout k dans $\{1, n\}$. Alors:

$$L_{W_n}(\lambda) = e^{-\lambda \sqrt{n} q_n} E\left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}} J_k(y_k)}\right) = e^{-\lambda \sqrt{n} q_n} \prod_{k=1}^n E\left(e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}} J_k(y_k)}\right).$$

$$L_{W_n}(\lambda) = e^{-\lambda \sqrt{n} q_n} \prod_{k=1}^n (1 - q_n + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}}) = e^{-\lambda \sqrt{n} q_n} (1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n)^n.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, L_{W_n}(\lambda) = e^{-\lambda \sqrt{n} q_n} (1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n)^n.$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n$ est strictement positif car c'est l'espérance de variables aléatoires prenant des valeurs strictement positives (voir plus haut). Ainsi $L_{W_n}(\lambda) > 0$ et $\ln L_{W_n}(\lambda) = -\lambda \sqrt{n} q_n + n \ln(1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n)$.

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ donc } -\lambda \sqrt{n} q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda \sqrt{n}}{2} - \frac{\lambda x}{\sqrt{2\pi}} + o(1).$$

$$e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\Delta}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } q_n = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

on produit et après truncature il vient :

$$q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{n} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{x\Delta}{\sqrt{2\pi} n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{d'ac } 1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{n} + \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi n}} + \frac{\kappa^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\Delta}{2\sqrt{n}} + \frac{\Delta^2}{4n} + \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Rappelons que $\ln(1+\hat{x}) \underset{\hat{x} \rightarrow 0}{=} \hat{x} - \frac{\hat{x}^2}{2} + o(\hat{x}^2)$. Alors par composition et après linéarisation :

$$\text{vient : } \ln(1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{n}} + \frac{\Delta^2}{4n} + \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi n}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{n}} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\ln(1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\Delta}{2\sqrt{n}} + \frac{\Delta^2}{8n} + \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{d'ac } n \ln(1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\Delta \sqrt{n}}{2} + \frac{\Delta^2}{8} + \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi}} + o(1). \text{ Alors :}$$

$$\ln L_{W_n}(\Delta) = -\Delta \sqrt{n} q_n + n \ln(1 + q_n e^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} - q_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\Delta \sqrt{n}}{2} - \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\Delta \sqrt{n}}{2} + \frac{\Delta^2}{8} + \frac{\Delta \kappa}{\sqrt{2\pi}} + o(1).$$

$$\ln L_{W_n}(\Delta) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\Delta^2}{8} + o(1). \quad \text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln L_{W_n}(\Delta) = \frac{\Delta^2}{8}.$$

Par continuité de la fonction exponentielle à $\frac{\Delta^2}{8}$ on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_{W_n}(\Delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln L_{W_n}(\Delta)} = e^{\Delta^2/8}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{W_n}(\Delta) = e^{\Delta^2/8}.$$

$$\text{D'après } \mathcal{Q}9 \subseteq \forall \Delta \in \mathbb{R}, L_{\frac{1}{2}T}(\Delta) = L_{\frac{1}{2}T+0}(\Delta) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\Delta^2}{2} + 0 \cdot \Delta} = e^{\Delta^2/8}.$$

$$\text{Ainsi } \forall \Delta \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} L_{W_n}(\Delta) = L_{\frac{1}{2}T}(\Delta).$$

On admet alors que $(W_n)_{n \geq 1}$ converge à loi vers $\frac{T}{2}$.

Q12) Supposons que $x=0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \pi = 0$, $q_n = F_X(0) = \frac{1}{2}$ et

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (S_n(0) - \frac{n}{2}). \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(0) \sim \mathcal{O}(n, \frac{1}{2}). \quad E(S_n(0)) = \frac{n}{2} \text{ et } V(S_n(0)) = \frac{n}{4}.$$

Notons que 1... $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(0) = J_1(0) + J_2(0) + \dots + J_n(0)$.

2... $(J_n(0))_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant

même loi (loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$), ayant une espérance égale à

$\frac{1}{2}$ et une variance égale à $\frac{1}{4}$ (d'habitude).

le théorème de la limite centrale nous dit que la suite de lois g.c. de

$$S_n^*(0) = \frac{S_n(0) - E(S_n(0))}{\sqrt{V(S_n)}} \text{ converge en loi vers } T \text{ car } T \text{ suit la loi}$$

normale centrée réduite.

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^*(0) \leq \hat{x}) = P(T \leq \hat{x}).$$

$$\text{A } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n^*(0) = \frac{S_n(0) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{S_n(0) - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} S_n^*(0)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = \frac{1}{2} S_n^*(0).$$

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\frac{1}{2} S_n^*(0) \leq \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^*(0) \leq 2\hat{x}) = \Phi(2\hat{x}).$$

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq \hat{x}) = \Phi(2\hat{x}) = P(T \leq 2\hat{x}) = P(\frac{T}{2} \leq \hat{x}).$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq \hat{x}) = \Phi(\frac{T}{2}) = P(\frac{T}{2} \leq \hat{x}).$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq \hat{x}) = \Phi(\frac{T}{2}) = P(\frac{T}{2} \leq \hat{x})$.

Q13 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

d'après I Q1 c) $\{Y_{L(n)} \leq y_n\} = \{S_n(y_n) \geq L(n)\}$ car

$L(n) = L(n/2) + 1 \in \mathbb{Z}$ et $y_n \in \mathbb{R}$.

$$\{Y_{L(n)} \leq y_n\} = \{Y_{L(n)} \leq 0 + \frac{x}{\sqrt{n}}\} = \{\sqrt{n}(Y_{L(n)} - 0) \leq x\}$$

Donc $\{\sqrt{n}(Y_{L(n)} - 0) \leq x\} = \{S_n(y_n) \geq L(n)\}$.

$$\{S_n(y_n) \geq L(n)\} = \{S_n(y_n) - n y_n \geq L(n) - n y_n\} = \left\{ \frac{S_n(y_n) - n y_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{L(n) - n y_n}{\sqrt{n}} \right\} \text{ car } \sqrt{n} > 0$$

Ainsi $\{S_n(y_n) \geq L(n)\} = \{W_n \geq u_n\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \{\sqrt{n}(Y_{L(n)} - 0) \leq x\} = \{S_n(y_n) \geq L(n)\} = \{W_n \geq u_n\}$ et ceci pour tout réel x

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Rappelons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$ et $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\frac{T}{2}$.

On a donc fonctionnellement envie de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \geq u_n) = P(\frac{T}{2} \geq -\frac{x}{\sqrt{2\pi}})$!

$$\text{Or } P(\frac{T}{2} \geq -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}) = P(T \geq \frac{-2x}{\sqrt{2\pi}}) = 1 - P(T < \frac{-2x}{\sqrt{2\pi}}) = 1 - P(T \leq \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}) = P(T \leq \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}).$$

$\uparrow$
 $T \sim \mathcal{N}(0,1)$

Donc $P(\frac{T}{2} \geq -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}) = P(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} T \leq x) = P(\frac{\sqrt{\pi}}{2} T \leq x) = P(\frac{T}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}}) = F_{\frac{T}{2}}(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}).$

ce qui donne "bien" le résultat mais voyons... nous n'avons
rien fait. On va retourner ces mandes. Pour faciliter les écritures

on pose $z = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$ et $t = -z = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$. nous allons mettre le résultat
en utilisant la définition de la
fonction de répartition.

Pour $L = F_{\frac{T}{2}}(t)$.

Attention c'est du boulot. Eloignez les enfants !

montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow |P(W_n \geq u_n) - L| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Notons que $F_{\frac{T}{2}}$ est continue en $t = \frac{x}{\sqrt{2n}}$.

Alors $\exists h \in \mathbb{R}_+^*, \forall t' \in \mathbb{R}, |t' - t| < h \Rightarrow |F_{\frac{T}{2}}(t') - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $\alpha = \frac{h}{2}$, $|(t+\alpha) - t| = |\alpha| = \alpha = \frac{h}{2} < h$ et $|(t-\alpha) - t| = |-\alpha| = \alpha = \frac{h}{2} < h$.

Ainsi $|F_{\frac{T}{2}}(t+\alpha) - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|F_{\frac{T}{2}}(t-\alpha) - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{ce qui donne : } \begin{cases} F_{\frac{T}{2}}(t) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{\frac{T}{2}}(t+\alpha) < F_{\frac{T}{2}}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{et} \\ F_{\frac{T}{2}}(t) - \frac{\varepsilon}{2} < F_{\frac{T}{2}}(t-\alpha) < F_{\frac{T}{2}}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad | \quad \textcircled{A}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{x}{\sqrt{2n}} = z = -t$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - z| < \alpha \Rightarrow z - \alpha < u_n < z + \alpha$.

Soit $n \in [n_1, +\infty[$.

$\{W_n > z + \alpha\} \subset \{W_n \geq u_n\} \subset \{W_n > z - \alpha\}$. Alors

$$P(W_n > z + \alpha) \leq P(W_n \geq u_n) \leq P(W_n > z - \alpha).$$

donc $1 - F_{W_n}(z + \alpha) \leq P(W_n \geq u_n) \leq 1 - F_{W_n}(z - \alpha)$ et ceci pour tout n dans $[n_1, +\infty[$. | $\textcircled{B}$

et dans $[n_1, +\infty[$.

$(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\frac{T}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{W_n}(z + \alpha) = F_{\frac{T}{2}}(z + \alpha)$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{W_n}(z - \alpha) = F_{\frac{T}{2}}(z - \alpha).$$

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow |F_{W_n}(j+d) - F_{\frac{T}{2}}(j+d)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_3 \Rightarrow |F_{W_n}(j-d) - F_{\frac{T}{2}}(j-d)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notons que $\forall n \in [n_2, +\infty[$, $\frac{F_{\frac{T}{2}}(j+d) - \frac{\varepsilon}{2}}{2} < \underline{F_{W_n}(j+d)} < \frac{F_{\frac{T}{2}}(j+d) + \frac{\varepsilon}{2}}{2}$ et

$\forall n \in [n_3, +\infty[$, $\frac{F_{\frac{T}{2}}(j-d) - \frac{\varepsilon}{2}}{2} < \underline{F_{W_n}(j-d)} < \frac{F_{\frac{T}{2}}(j-d) + \frac{\varepsilon}{2}}{2}$

Prenons $n_0 = \max(n_2, n_3)$. Soit $n \in [n_0, +\infty[$. En utilisant (A) et (C) on obtient:

$P(W_n \geq u_n) \geq 1 - F_{W_n}(j+d) > 1 - F_{\frac{T}{2}}(j+d) - \frac{\varepsilon}{2}$ et

$P(W_n \geq u_n) \leq 1 - F_{W_n}(j-d) < 1 - \left(F_{\frac{T}{2}}(j-d) - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 1 - F_{\frac{T}{2}}(j-d) + \frac{\varepsilon}{2}$.

$T \in \mathcal{M}(0,1)$

Remarque .. Soit $u \in \mathbb{R}$. $1 - F_{\frac{T}{2}}(u) = 1 - P\left(\frac{T}{2} \leq u\right) = 1 - P(T \leq 2u) \stackrel{\downarrow}{=} P(T \leq -2u)$

donc $1 - F_{\frac{T}{2}}(u) = P\left(\frac{T}{2} \leq -u\right) = F_{\frac{T}{2}}(-u)$. $1 - F_{\frac{T}{2}}(u) = F_{\frac{T}{2}}(-u)$.

Ainsi $P(W_n \geq u_n) > F_{\frac{T}{2}}(-j-d) - \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t-d) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Et $P(W_n \leq u_n) < F_{\frac{T}{2}}(-j+d) + \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t+d) + \frac{\varepsilon}{2}$.

En utilisant (A) on obtient alors:

$P(W_n \geq u_n) > F_{\frac{T}{2}}(t-d) - \frac{\varepsilon}{2} > F_{\frac{T}{2}}(t) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t) - \varepsilon$ et

$P(W_n \leq u_n) < F_{\frac{T}{2}}(t+d) + \frac{\varepsilon}{2} < F_{\frac{T}{2}}(t) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = F_{\frac{T}{2}}(t) + \varepsilon$.

donc $F_{\frac{T}{2}}(t) - \varepsilon < P(W_n \geq u_n) < F_{\frac{T}{2}}(t) + \varepsilon$ ou:

$|P(W_n \geq u_n) - L| = |P(W_n \geq u_n) - F_{\frac{T}{2}}(t)| < \varepsilon$. Nous avons donc montré que:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |P(W_n \geq u_n) - L| < \varepsilon$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \geq u_n) = L$.

Soit encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \geq u_n) = F_T(t) = F_T\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = P\left(\frac{T}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{2n}}\right)$. Donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \geq u_n) = P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} T \leq x\right)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

c) Soit x dans $\mathbb{R}$.

$P(\sqrt{n}(Y_{k(n)} - \pi) \leq x) = P(W_n \geq u_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sqrt{n}(Y_{k(n)} - \pi) \leq x) = P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} T \leq x\right)$. Ce qui donne :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{n}(Y_{k(n)} - \pi)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} x\right) = P(T \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{n}(Y_{k(n)} - \pi)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} x\right) = P(T \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} x)$.

Comme $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{n}(Y_{k(n)} - \pi)) \leq x\right) = P(T \leq x)$.

Alors $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{n}(Y_{k(n)} - \pi))\right)_{n \geq 1}$ converge à loi vers T donc vers une variable

aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(Q14) a) $k(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2\ell}{2} \rfloor + 1 = \ell + 1$. $k(n) = \ell + 1$.

b) d'après Q8 a) $E(Y_{k(n)}) = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_{k(n)}) = 0$.

Il est sans doute préférable d'écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_{k(2n+1)}) = 0$.

c) X possède un moment d'ordre 2. Alors par conséquent il existe dans $\mathcal{B}_2$ un Y qui possède un moment d'ordre 2 et une variance.

En particulier $Y_{k(n)}$ possède une variance.

$$V(Y_{k(n)}) = E((Y_{k(n)} - E(Y_{k(n)}))^2) = E((Y_{k(n)} - \theta)^2) = E((Y_{k(n)} - \pi)^2).$$

Alors $E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}} (Y_{k(n)} - \pi)\right)^2\right)$ existe et vaut $\frac{2n}{\pi} V(Y_{k(n)})$.

Not admis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}} (Y_{k(n)} - \pi)\right)^2\right) = E(T^2) = 1$

$T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ donc
 $V(T) = 1$ et $E(T) = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{\pi} V(Y_{k(n)})\right) = 1$.

Donc $V(Y_{k(n)}) \sim \frac{\pi}{2n}$ ou $V(Y_{k(2r+1)}) \sim \frac{\pi}{2(2r+1)} \sim \frac{\pi}{4r}$.

d) • $E(Y_{k(n)}) = \theta$ et $Y_{k(n)}$ possède une variance donc $Y_{k(n)} \in \mathcal{E}_\theta$

• $Y_{k(n)} \in \mathcal{E}_\theta$ donc $\text{cov}(\bar{X}_n, Y_{k(n)} - \bar{X}_n) = 0$.

Alors $\text{cov}(\bar{X}_n, Y_{k(n)}) = \text{cov}(\bar{X}_n, \bar{X}_n) = V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}$.

Alors $S_n^{(*)} = \frac{\text{cov}(\bar{X}_n, Y_{k(n)})}{\sqrt{V(\bar{X}_n)} \sqrt{V(Y_{k(n)})}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{V(Y_{k(n)})}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{V(Y_{k(n)})}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

Alors $S_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ou $\lim_{r \rightarrow +\infty} S_{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(*) S_n existe car $\bar{X}_n$ et $Y_{k(n)}$ possèdent des variances non nulles ($V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}$ et $V(Y_{k(n)}) \geq \frac{1}{n}$ car $Y_{k(n)} \in \mathcal{E}_\theta$).