CORRECTION HEC/ESCP 2
Année 2022/2023

Exercice 1 :
Loi arcsinus, trigonométrie, densités, marche aléatoire, discrètes, suites, séries, python.

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, par définition de la partie entière, on sait que :

$$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx \Longrightarrow x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = 0.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, toujours par définition de la partie entière, on sait que :

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} \Longrightarrow n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq n - \frac{n}{2}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n - \frac{n}{2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$. On peut conclure, par théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = +\infty.}$$

3) **a)** Soit $x \in [-1, 1]$, on sait que $x = \sin(\arcsin(x))$. La relation fondamentale de la trigonométrie nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} &= \sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2} \\ &= \sqrt{\cos(\arcsin(x))^2} \\ &= |\cos(\arcsin(x))| \end{aligned}$$

De plus, comme $x \in [-1, 1]$ on sait que $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ et donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$:

$$|\cos(\arcsin(x))| = \cos(\arcsin(x)).$$

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.}$$

b) La fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$ comme réciproque d'une fonction continue à valeurs dans $[-1,1]$.
Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) = \cos(x) = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{-\pi}{2}$. Ainsi, arcsin est dérivable sur $[-1,1]$ privé de $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -1$.
Soit alors $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

La question 3.(a) nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\text{arcsin est continue sur } [-1,1], \text{ dérivable sur }]-1,1[\text{ avec } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

4) **a)** G est bien définie sur $[0,1]$ comme composition de fonction bien définie car pour $x \in [0,1]$: $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \in [-1,1]$. On en déduit aussi que G est une fonction continue sur $[0,1]$ par composition bien définie de fonctions continues.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,1]$ mais comme $\sqrt{1} = 1$ et que arcsin n'est pas dérivable en 1, on en déduit par composition de fonctions dérivables que G est dérivable sur $]0,1[$. Soit alors $x \in]0,1[$, on a en utilisant la question précédente :

$$g(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$\boxed{G \text{ est continue sur } [0,1], \text{ dérivable sur }]0,1[\text{ avec } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.}$$

b) Soit $x \in]0,1[$, comme $x(1-x) > 0$, on en déduit que g est dérivable sur $]0,1[$ par composition.

$$g'(x) = \frac{-1}{2} \times (1-2x) \times (x(1-x))^{-3/2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-1}{(x(1-x))^{3/2}}.$$

$g'(x)$ est donc du signe de $2x-1$. Comme $2x-1 \geq 0$ si et seulement si, $x \geq \dfrac{1}{2}$ on en déduit que g est décroissante sur $]0,1/2[$, puis croissante sur $[1/2,1[$.
Les données suivantes permettent de tracer son graphe sans le moindre problème :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty,\ g(1/2) = 2 \text{ et } \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty.$$

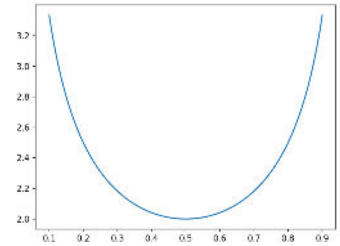

Figure 1: *Courbe représentative de g sur* $]0,1[$.

5) **a)** D'après la question précédente il est clair que f est une fonction continue et positive sur $]0,1[$. Il en est de même sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ car f est la fonction nulle. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1 et f est positive sur $\mathbb{R}$.
Considérons $0<\varepsilon<A<1$,

$$\int_\varepsilon^A f(t)dt = \frac{1}{\pi}(G(A)-G(\varepsilon)) \text{ par la question 4.}(a).$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon) = G(0) = 2\arcsin(0) = 0$ et $\lim_{A\to 1} G(A) = G(1) = 2\arcsin(1) = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$ on en déduit que :

$$\lim_{A\to 1}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A f(t)dt = 1\right).$$

La limite étant finie, on en déduit que $\int_0^1 f(t)dt$ converge et vaut 1. De plus, en dehors de $[0,1]$ f est la fonction nulle, donc par la relation de Chasles on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

Remarque
Les valeurs de arcsin ne sont pas au programme mais elles se trouvent facilement à l'aide de la relation :

$$\arcsin(\sin(x)) = x.$$

b) X admet une espérance si et seulement si $\int_0^1 xf(x)dx$ converge car f est nulle en dehors de $[0,1]$ et $xf(x)\geq 0$ pour $x\in]0,1[$.
Comme $x\mapsto xf(x)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0, on en déduit que $\int_0^1 xf(x)dx$ est impropre en 1. Soit alors $0<A<1$, et posons le changement de variable affine $u=1-x$ pour obtenir :

$$\int_0^A xf(x)dx = -\int_1^{1-A}(1-u)f(1-u)du = \int_{1-A}^1 (1-u)f(u)du \text{ car } f(1-u)=f(u).$$

Donc, par linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\int_0^A xf(x)dx + \int_{1-A}^1 uf(u)du = \int_{1-A}^1 f(u)du.$$

De plus, $X(\Omega)=[0,1]$, donc l'intégrale à droite de l'égalité précédente tend vers 1 quand A tend vers 1. On obtient alors en faisant tendre A vers 1 :

$$\lim_{A\to 1} 2\int_0^A xf(x)dx = 1.$$

La limite étant finie, on en déduit que :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance qui vaut } \frac{1}{2}.}$$

Remarque

Une intégration par parties faisait aussi l'affaire et serait peut-être mieux niveau rédaction...

6) **a)** Comme $U(\Omega) = [0,1]$, $\dfrac{\pi}{2}U(\Omega) = [0,\pi/2]$ donc $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}U\right)(\Omega) = [0,1]$.

Si $x < 0$: $F_V(x) = 0$

Si $x > 1$: $F_V(x) = 1$.

Si $x \in [0,1]$:

$$F_V(x) = \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \sqrt{x}\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x})\right)$$

où on utilise la croissance de la fonction arcsin sur $[-1,1]$ (qui découle de celle de sin sur $[-\pi/2,\pi/2]$). De plus, comme U suit la loi uniforme on a :

$$\mathbb{P}\left(U \leq \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x})\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{1}{\pi}G(x).$$

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\pi}G(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Comme F_V est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1 (à détailler un minimum sur la copie) on sait alors que V est une variable aléatoire à densité, et une densité de V est donnée par F_V' là où elle est dérivable et en attribuant la valeur arbitraire 0 ailleurs (en 0 et 1) :

$$f_V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}g(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On remarque alors que V et X ont des densités qui coïncident sur $\mathbb{R}$, comme la densité caractérise la loi d'une variable aléatoire :

$$\boxed{V \text{ suit la loi arcsinus.}}$$

b) Voici un programme qui convient :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
def arcsinus() :
    U = rd.random()
    V = np.sin((np.pi/2)*U)**2
    return V
```

7) Soient $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq \dfrac{n}{2}$, remarquons :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)dt.$$

De plus, par la question 4.(b) la fonction g est décroissante sur $]0,1/2]$ et comme $k \leq \frac{n}{2}-1$ on en déduit que $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq \frac{1}{2}$, ainsi par décroissance de g sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ et par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le sens croissant on a :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. On en déduit alors :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Un argument similaire convient pour prouver la deuxième inégalité que demande l'énoncé. Finalement,

$$\boxed{G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).}$$

Les deux inégalités sont inversées si $\frac{n}{2}+1 \leq k \leq n-1$ car dans ce cas on utilisera la croissance de la fonction g.

8) $a_n = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ convient.

Sommons dans la double inégalité de la question précédente :

$$\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

Or, par téléscopage : $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) = G\left(\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \\ \displaystyle\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) = G\left(\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n-1}{n}\right) \end{cases}$

On obtient alors la double inégalité suivante :

$$G\left(\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n-1}{n}\right).$$

De plus, par le préliminaire et la continuité de G sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} G\left(\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}\right) = G(x) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} G\left(\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right) = G(x).$$

Les propriétés de la suite $(a_n)_n$ et la continuité de G sur $[0,1]$ nous donnent :

$$\lim_{n\to+\infty} G\left(\frac{a_n}{n}\right) = G(0) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} G\left(\frac{a_n-1}{n}\right) = G(0) = 0.$$

En mettant ensemble les résultats précédents, on en déduit par un théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).}$$

9) Soit $i \in \mathbb{N}^*$, comme $X_i(\Omega) = \{-1, 1\}$: $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \theta$.

$$\boxed{Y_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \theta.}$$

$\dfrac{1}{2}(S_n + n) = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. De plus, $X_1, ..., X_n$ étant indépendantes on en déduit par le lemme des coalitions que $Y_1, ..., Y_n$ sont indépendantes. La stabilité de la loi binomiale nous permet alors d'en déduire :

$$\boxed{\frac{1}{2}(S_n + n) \text{ suit la loi binomiale de paramètre } n \text{ et } \theta.}$$

10)

$$\begin{cases} \mathbb{P}((S_1 = -1) \cap (S_2 = 1)) = \mathbb{P}((X_1 = -1) \cap (X_2 = 2)) = 0 \text{ car } X_2(\Omega) = \{-1, 1\} \\ \mathbb{P}(S_1 = -1)\mathbb{P}(S_2 = 1) \neq 0 \text{ car } -1 \text{ et } 1 \text{ sont dans le support de } S_1 \text{ et } S_2. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } S_n \text{ ne sont pas indépendantes mutuellement.}}$$

11) Comme $\theta \in]0, 1[$ une étude de fonction classique (ou une identité remarquable) montre que :

$$\sqrt{\theta(1-\theta)} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme la suite de variable aléatoire $(X_i)_i$ est une suite de variables aléatoires iid qui ont un moment d'ordre 2 non nul (elles prennent un nombre fini de valeurs), le théorème central limite nous donne :

$$\overline{S_n}^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \text{ suit la loi normale centrée réduite.}$$

On sait alors en revenant à la définition de la convergence en loi et en considérant n suffisamment grand :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(-x \leq \overline{S_n}^* \leq x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Or, $\overline{S_n}^* = \dfrac{\overline{S_n} - \mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{S_n})}} = \dfrac{\overline{S_n} - 2\theta + 1}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}}\sqrt{n}.$ $\qquad (*)$

On en déduit alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(-x \leq \overline{S_n}^* \leq x\right) = 2\Phi(x) - 1 \\
\Longrightarrow &\mathbb{P}\left(-x \leq \frac{\overline{S_n} - 2\theta + 1}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}}\sqrt{n} \leq x\right) = 2\Phi(x) - 1 \\
\Longrightarrow &\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\left(1 - 2\sqrt{\theta(1-\theta)}\frac{x}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + 2\sqrt{\theta(1-\theta)}\frac{x}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right) = 2\Phi(x) - 1 \\
\Longrightarrow &\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right) \geq 2\Phi(x) - 1 \qquad (**)
\end{aligned}$$

Or, pour $x = t_\alpha$ on a $2\Phi(x) - 1 = 1 - \alpha$. L'inégalité précédente devient alors :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right) \geq 1 - \alpha$$

La définition d'un intervalle de confiance de niveau de confiance $1-\alpha$ nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}+\overline{S_n}\right), \frac{1}{2}\left(1+\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}+\overline{S_n}\right)\right] \text{ est un ICA de } \theta \text{ de niveau de confiance } 1-\alpha.}$$

Remarque

Pour détailler $(*)$: on utilise la linéarité de l'espérance et l'indépendance des variables aléatoires X_i pour calculer l'espérance et la variance de $\overline{S_n}$. Une fois que l'on fait apparaitre X_1 on peut encore gagner du temps en l'écrivant comme combinaison linéaire de Y_1 dont on connait la loi.

Pour détailler $(**)$: On utilise le majorant de $\sqrt{\theta(1-\theta)}$ ce qui nous permet de créer un intervalle de longueur plus grande que celui qu'on avait avant l'inégalité, d'où le "$\geq$" qui apparait.

12) **a)** Partant de 0 il est impossible de revenir en 0 en $2k+1$ déplacement de longueur 1 sur $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2k+1}=0)=0.}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$, procédons par dénombrement :

• Considérons l'éventualitée $\omega = (X_1 = 1) \cap ... \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = -1) \cap ... \cap (X_{2k} = -1)$. L'indépendance des X_i et la loi des X_i nous donnent :

$$\mathbb{P}(\{w\}) = \theta^k (1-\theta)^k.$$

De plus, pour compter le nombre d'éventualitées qui réalise $(S_{2k}=0)$ il faut d'abord choisir parmis les $2k$ déplacements $(X_1, ..., X_{2k})$ ceux qui valent 1, il y a donc $\binom{2k}{k}$ choix. Une fois ce choix fait, il reste à choisir ceux qui valent -1, il reste donc $\binom{2k-k}{k} = 1$ choix à faire. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2k}=0) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k.}$$

Remarque

Un événement A se décrit à l'aide des éventualitées qui le réalise, donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \text{card}(A)\mathbb{P}(\{w\}).$$

13) Détaillons proprement l'égalité d'événement $(L_n = n) = (S_{2n} = 0)$:

• Supposons que $(L_n = n)$ est réalisé, il existe alors $\omega \in \Omega$ tel que $L_n(\omega) = n$. Par définition de la variable aléatoire L_n on a alors :

$$\max\{k \in [\![0,n]\!], S_{2k}(\omega) = 0\} = n$$

Donc $S_{2n}(\omega) = 0$ et alors l'événement $(S_{2n} = 0)$ est réalisé.

• Réciproquement, si l'on suppose que l'événement $(S_{2n} = 0)$ est réalisé alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $S_{2n}(\omega) = 0$. Comme k varie dans $[\![0, n]\!]$, on a donc : $L_n(\omega) = n$.

Ainsi, par double inclusion on a bien l'égalité d'événement. On en déduit alors :
$\mathbb{P}(L_n = n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\theta^n(1-\theta)^n$ par la question précédente.

$$\boxed{\mathbb{P}(L_n = n) = \binom{2n}{n}\theta^n(1-\theta)^n.}$$

14) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$,

a) • Supposons que $(L_n = k)$ est réalisé, il existe alors $\omega \in \Omega$ tel que $L_n(\omega) = k$. Par définition de la variable aléatoire L_n on a alors :

$$\max\{i \in [\![0, n]\!], S_{2i}(\omega) = 0\} = k$$

Donc le plus grand indice i de $[\![0, n]\!]$ pour lequel $S_{2i}(\omega) = 0$ est k, ce qui implique nécessairement (car pour les indices impairs on sait que la variable aléatoire S_{2i+1} est toujours non nulle):

$$S_{2k}(\omega) = 0, S_{2k+1}(\omega) \neq 0, ..., S_{2n}(\omega) \neq 0$$

Et alors l'événement $(S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) ... \cap (S_{2n} \neq 0)$ est réalisé.
• Réciproquement, si l'on suppose que l'événement $(S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) ... \cap (S_{2n} \neq 0)$ est réalisé alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $S_{2k}(\omega) = 0$, $S_{2k+1}(\omega) \neq 0$ ... $S_{2n}(\omega) \neq 0$. Ainsi, le dernier indice i de $[\![0, n]\!]$ pour lequel on a $S_{2i}(\omega) = 0$ est k, donc : $L_n(\omega) = k$.
Ainsi, par double inclusion on a bien :

$$\boxed{(L_n = k) = (S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) ... \cap (S_{2n} \neq 0).}$$

b) Supposons que l'événement $(S_{2k} = 0)$ est réalisé c'est-à-dire qu'à l'instant $2k$ le marcheur aléatoire est en 0.
On veut que l'événement $(S_{2k+1} \neq 0) ... \cap (S_{2n} \neq 0)$ se réalise, c'est-à-dire que le marcheur ne revient pas en 0 pour les prochaines marches (la $2k+1-$ème, ..., la $2n-$ème).
Comme on sait que le marcheur est en 0 à l'instant $2k$ on peut considérer que la marche est réinitialisé à l'instant $2k$, qui devient donc l'instant 0, ainsi l'instant $2k+1$ devient l'instant $2k+1-2k$, ..., l'instant $2n$ devient l'instant $2n-2k$. On obtient bien :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(S_{2k}=0)}((S_{2k+1} \neq 0) ... \cap (S_{2n} \neq 0)) = \mathbb{P}((S_1 \neq 0) ... \cap (S_{2(n-k)} \neq 0)).}$$

Remarque

Pour davantage de rigueur : Comme $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}_{(S_{2k}=0)}((S_{2k+1} \neq 0) \cap ... \cap (S_{2n} \neq 0)) = \frac{\mathbb{P}((S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) \cap ... \cap (S_{2n} \neq 0))}{\mathbb{P}(S_{2k} = 0)}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n-2k]\!]$, $S_{2k+i} = S_{2k} + X_{2k+1} + ... + X_{2k+i}$. Donc en tenant compte de $S_{2k} = 0$, on obtient en notant $P_{k,n} = \mathbb{P}_{(S_{2k}=0)}((S_{2k+1} \neq 0) \cap ... \cap (S_{2n} \neq 0))$:

$$P_{k,n} = \frac{\mathbb{P}((S_{2k} = 0) \cap (X_{2k+1} \neq 0) \cap ... \cap (X_{2k+1} + ... + X_{2n} \neq 0))}{\mathbb{P}(S_{2k} = 0)}$$

Mais $X_{2k+1}, ..., X_{2k+1} + ... + X_{2n}$ sont des variables aléatoires indépendantes de S_{2k}

par le lemme des coalitions car S_{2k} ne dépend que de $X_1, ..., X_{2k}$, ainsi :

$$P_{k,n} = \frac{\mathbb{P}((S_{2k} = 0))\mathbb{P}((X_{2k+1} \neq 0) \cap ... \cap (X_{2k+1} + ... + X_{2n} \neq 0))}{\mathbb{P}(S_{2k} = 0)}.$$

Comme les X_i suivent toutes la même loi, on a :

$$(X_{2k+1} \neq 0) = (S_1 \neq 0), ..., (X_{2k+1} + ... + X_{2n} \neq 0) = (S_{2(n-k)} \neq 0)$$

et on retrouve bien le résultat.

15) • Si $k = n$: $p_{n-n} = p_0 = 1$ donc la question 13. nous donne le bon résultat directement.

• Si $k \in [\![0, n-1]\!]$: Les questions 14.(a) et 12.(b) nous donnent (car $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) \neq 0$) :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}_{(S_{2k}=0)}((S_{2k+1} \neq 0) \cap ... \cap (S_{2n} \neq 0)) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k p_{n-k}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}(L_n = k) = \binom{2k}{k}\theta^k(1-\theta)^k p_{n-k}.}$$

16) **a)** Il est clair que $S_1(\omega), ..., S_r(\omega)$ sont tous des entiers. De plus, on sait que pour tout $i \in llbracket 1, r-1]\!]$, $S_{i+1}(\omega)$ vaut $S_i(\omega)+1$ ou $S_i(\omega)-1$ on remarque donc que dans l'ensemble $\{S_1(\omega), ..., S_r(\omega)\}$ chaque couple d'entiers $(S_i(\omega), S_{i+1}(\omega))$ est un couple d'entiers successifs. En balayant alors l'ensemble de la gauche vers la droite on se rend compte qu'il n'y a que des entiers qui se suivent par rapport à la relation $\leq$, finalement :

$$\boxed{\{S_1(\omega), ..., S_r(\omega)\} \text{ est un intervalle d'entiers.}}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{D}_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{2n}(S_k \neq 0)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{2n}(S_k > 0) \cup (S_k < 0)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n} S_k > 0\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{2n} S_k < 0\right)\right) && (*) \\
&= \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) + \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^-) && \textit{(par incompatibilité)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{D}_n) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) + \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^-).}$$

Remarque

Pour justifier proprement $(*)$: Si tous les S_k sont strictement "positifs ou négatifs" alors ils sont tous soit "strictement positifs" soit "strictement négatifs" car si ce n'était pas le cas on aurait par exemple un $S_i > 0$ et un $S_j < 0$ mais comme les S_k ne prennent que des valeurs entières alors il existerait $S_{i_0} = 0$ ce qui est absurde lorsque l'on décrit $\mathcal{D}_n$.

Comme la réciproque est évidente, on a bien l'égalité $(*)$.

17) $(S_{2n} > 0) = \left(S_{2n} = 1 \cup \bigcup_{r=1}^{n} S_{2n} = 2r\right) = \left(\bigcup_{r=1}^{n} S_{2n} = 2r\right)$ (car à un instant pair le marcheur ne peut pas être en position impaire). Notons cette relation (A). De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} a_{n,r} &= \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n,r}) \\
&= \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} S_k > 0\right) \cap (S_{2n} = 2r)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} S_k > 0\right) \cap (S_{2n} = 2r)\right)\right) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} S_k > 0\right) \cap \left(\bigcup_{r=1}^{n} S_{2n} = 2r\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{2n} S_k > 0\right) && \textit{(par la relation } (A)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) = \sum_{r=1}^{n} a_{n,r}.}$$

18) **a)** $\star$ Considérons dans un premier temps $r \geq 2$:

- Si $q = r - 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(A_{n-1,r-1})}(A_{n,r}) &= \mathbb{P}_{(A_{n-1,r-1})}(S_{2n-2} > 0 \cap S_{2n-1} > 0 \cap S_{2n} = 2r) \\
&= \mathbb{P}_{(A_{n-1,r-1})}(2r - 2 > 0 \cap S_{2n-1} = 2r - 1 \cap S_{2n} = 2r) \\
&= \mathbb{P}_{(A_{n-1,r-1})}(\Omega \cap X_{2n-1} = 1 \cap X_{2n} = 1) && \textit{(car } r \geq 2\textit{)} \\
&= \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{2n} = 1) && \textit{(par indépendance des } X_i\textit{)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(A_{n-1,r-1} \cap A_{n,r}) = \mathbb{P}_{(A_{n-1,r-1})}(A_{n,r})a_{n-1,r-1}$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A_{n-1,r-1} \cap A_{n,r}) = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1}.$$

- Si $q = r + 1$: l'argument est exactement le même que le précédent.

$\star$ Si $r = 1$: $A_{n-1,r-1}$ est vide donc l'égalité pour les deux cas précédents reste vraie aussi.

- Si $q = r$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(A_{n-1,r})}(A_{n,r}) &= \mathbb{P}_{(A_{n-1,r})}(S_{2n-2} > 0 \cap S_{2n-1} > 0 \cap S_{2n} = 2r) \\
&= \mathbb{P}_{(A_{n-1,r})}(2r > 0 \cap (X_{2n-1} = 1) \cap (X_{2n} = -1)) \cup (X_{2n-1} = -1) \cap (X_{2n} = 1))) \\
&= \mathbb{P}_{(A_{n-1,r-1})}(\Omega \cap (X_{2n-1} = 1) \cap (X_{2n} = -1)) \cup (X_{2n-1} = -1) \cap (X_{2n} = 1))) \\
&= \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{2n} = -1) + \mathbb{P}(X_{2n-1} = -1)\mathbb{P}(X_{2n} = 1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit alors : $\mathbb{P}(A_{n-1,r} \cap A_{n,r}) = \dfrac{1}{2}a_{n-1,r}$.

• Dans les autres cas la valeur que prend S_{2n-2} sera à une distance strictement supérieur à deux par rapport à celle que prendra S_{2n}, mais il est impossible en faisant seulement deux nouvelles marches de $+1$ ou -1 d'atteindre la valeur de S_{2n}. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4}a_{n-1,q} & \text{si } q = r-1 \text{ ou } q = r+1 \\ \frac{1}{2}a_{n-1,q} & \text{si } q = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

b) Considérons le système complet d'événement $(A_{n-1,q})_{1 \leq q}$, par la formule des probabilités totales on a alors :

$$\mathbb{P}(A_{n,r}) = \sum_{q=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{n-1,r-1} \cap A_{n,r}).$$

Donc en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient bien :

$$\boxed{a_{n,r} = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}a_{n-1,r} + \frac{1}{4}a_{n-1,r+1}.}$$

19) • Pour $n = 1$: Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $a_{1,r} = \mathbb{P}(A_{1,r}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) & \text{si } r > 1 \\ \mathbb{P}(A_{1,1}) & \text{si } r = 1 \end{cases}$

Or, $\mathbb{P}(A_{1,1}) = \mathbb{P}((S_1 > 0) \cap (S_2 = 2)) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \dfrac{1}{4}$. Donc :

$$a_{1,r} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

De plus, $\dfrac{1}{4^1}\left(\binom{2\times 1-1}{1+r-1} - \binom{2\times 1-1}{1+r}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 1 \\ \frac{1}{4}\left(\binom{1}{1} - \binom{1}{2}\right) & \text{si } r = 1 \end{cases}$

Donc, on obtient bien :

$$\forall r \geq 1,\ a_{1,r} = \frac{1}{4^1}\left(\binom{2\times 1-1}{1+r-1} - \binom{2\times 1-1}{1+r}\right).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que pour tout $r \geq 1$, $a_{n,r} = \dfrac{1}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right)$ et montrons que :

$$\forall r \geq 1,\ a_{n+1,r} = \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2(n+1)-1}{n+1+r-1} - \binom{2(n+1)-1}{n+1+r}\right).$$

Par la question 18.(b) on a pour $r \geq 2$:

$$a_{n+1,r} = \frac{1}{4}a_{n,r-1} + \frac{1}{2}a_{n,r} + \frac{1}{4}a_{n,r+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n-1}{n+r-2} - \binom{2n-1}{n+r-1} + \binom{2n-1}{n+r} - \binom{2n-1}{n+r+1} + 2\binom{2n-1}{n+r-1} - 2\binom{2n-1}{n+r}\right)\\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} + \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} - \binom{2n-1}{n+r+1}\right)\\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n}{n+r-1} - \binom{2n}{n+r+1}\right)\\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n+1}{n+r} - \binom{2n}{n+r} - \left(\binom{2n+1}{n+r+1} - \binom{2n}{n+r}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\binom{2n+1}{n+r} - \binom{2n+1}{n+r+1}\right)
\end{aligned}
$$

où les deux avant dernières égalités se justifient à l'aide de la formule du triangle de Pascal.

Comme le cas $r = 1$ est évident, on obtient bien le résultat voulu. Le principe de récurrence nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall r \in \mathbb{N}^*,\ a_{n,r} = \frac{1}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right).}$$

20) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après les notations de l'énoncé et la question 16.(b), on a :

$$p_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2n} S_i \neq 0\right) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_n) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) + \mathbb{P}(\mathcal{D}_n^-).$$

Or, $\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^+) = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} a_{n,r} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{4^n}\left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r}\right) = \frac{1}{4^n}\binom{2n-1}{n}$ par téléscopage.

Par symétrie de la marche aléatoire (car on suppose désormais $\theta = 1/2$) : $\mathbb{P}(\mathcal{D}_n^-) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n-1}{n}$.

On en déduit alors :

$$p_n = \frac{2}{4^n}\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{4^n}\,\frac{2 \times (2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{4^n}\,\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

• Si $n = 0$, par convention $p_0 = 1$ et $\dfrac{1}{4^0}\dbinom{2 \times 0}{0} = 1$. On obtient bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.}$$

21) **a)** Voici le programme :

```
import numpy.random as rd
def DernierPassage(n) :
    L = 0
    S = 0
    for i in range(1, 2*n+1) :
        S = S + 2*rd.binomial(1,1/2)-1
        if S == 0 :
            L = i/2
    return L
```

b) La figure nous permet d'interpréter avec quelle fréquence apparait chacune des valeurs que peut prendre la variable aléatoire L_{100} lors de 10000 réalisations. On remarque la répartition de ces valeurs est proche du graphe de la fonction g de la partie 1. on peut alors conjecturer :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \frac{L_{100}}{100} \text{ semble converger en loi vers une loi arcsinus.}}$$

Remarque

Un point remarquable que nous donne la figure est le suivant :

Le dernier retour en 0 semble se produire plus souvent au début de la marche aléatoire ou alors à la fin de la marche aléatoire. Contre-intuitif non?

22) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln(C_{n+1}) - \ln(C_n) \\
&= \ln\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}\frac{4^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{\binom{2n}{n}}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{4}\frac{2(2n+1)}{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{4}\frac{4n(1+\frac{1}{2n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{16n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} -\frac{5}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} -\frac{5}{n^3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $|u_{n+1} - u_n| \sim \frac{5}{n^3}$, comme la série de terme général $\frac{5}{n^3}$ est convergente (combinaison linéaire d'une série de Riemann convergente), on peut conclure par critère d'équivalence des séries à termes positifs que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge absolument. Finalement,

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_{n+1} - u_n \text{ converge.}}$$

b) soit $n \geq 2$, par téléscopage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_1$, donc :

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k.$$

Par la question précédente on sait que la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, notons ℓ sa limite. Ainsi, :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell + u_1.$$

De plus, $C_n = e^{u_n}$ et comme on vient de montrer que (u_n) converge vers $\ell + u_1$, la continuité de l'exponentielle en $\ell + u_1$ nous montre que $\lim_{n\to+\infty} C_n = e^{\ell+u_1}$. La limite étant finie, on peut conclure :

$$\boxed{(C_n)_n \text{ converge.}}$$

23) Soit $x \in]0,1[$.

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(L_n \leq nx\right) \\
&= \mathbb{P}(L_n \leq \lfloor nx \rfloor) && \textit{(car } L_n(\Omega) = [\![0,n]\!]\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(L_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} p_{n-k} && \textit{(par 15.)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} \frac{1}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k} && \textit{(par 20.)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.}$$

b) Soient n suffisamment grand et $k \in [\![a_n, \lfloor nx \rfloor]\!]$. Par définition, on a :

$$C_k C_{n-k} = \frac{\sqrt{k}}{4^k} \binom{2k}{k} \frac{\sqrt{n-k}}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \sqrt{k(n-k)}.$$

On en déduit que : $\displaystyle \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{4^n}{\sqrt{k(n-k)}} C_k C_{n-k}$.

Comme pour tout k dans $[\![a_n, \lfloor nx \rfloor]\!]$: $m_n \leq C_k C_{n-k} \leq M_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& m_n \frac{4^n}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{4^n}{\sqrt{k(n-k)}} C_k C_{n-k} \leq \frac{4^n}{\sqrt{k(n-k)}} M_n \\
\Longrightarrow\ & m_n \frac{4^n}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq \frac{4^n}{\sqrt{k(n-k)}} M_n \\
\Longrightarrow\ & m_n \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} M_n \\
\Longrightarrow\ & \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} m_n \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} M_n
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{m_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k_n \in [\![\alpha_n, \beta_n]\!]$ tel que : $\min\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k = C_{k_n}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\min_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k\right)_n = \left(C_{k_n}\right)_n.$$

Or, pour tout n entier naturel non nul, $\alpha_n \leq k_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ on en déduit par théorème de comparaison que la limite de k_n quand n tend vers $+\infty$ est aussi $+\infty$. Ainsi, par la question 22.(b) on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\min_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k\right) = \lim_{n\to+\infty} C_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Un argument similaire au précédent nous donne le même résultat pour la suite des max. On a alors :

$$\boxed{\text{Les deux suites } \left(\min_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k\right)_n \text{ et } \left(\max_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k\right)_n \text{ convergent vers } \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$$

d) Remarquons : $(*)$ $\qquad m_n \geq \min\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k \times \min\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_{n-k}$ et $M_n \leq \max\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k \times \max\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_{n-k}$.

L'encadrement de la question 23.(b) donne alors :

$$m_{1,n}m_{2,n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_{1,n}M_{2,n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

où on note $m_{1,n}m_{2,n} = \min\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k \times \min\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_{n-k}$ et $M_{1,n}M_{2,n} = \max\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_k \times \max\limits_{k\in[\![\alpha_n,\beta_n]\!]} C_{n-k}$.

La question précédente nous montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{1,n}m_{2,n} = \lim\limits_{n\to+\infty} M_{1,n}M_{2,n} = \dfrac{1}{\pi}$. De plus, par la question 8. on sait que :

$$G(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi}.}$$

Remarque

Justifions proprement $(*)$:

Considérons deux suites de réels positifs $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ où I est un intervalle d'entiers. Comme I contient un nombre fini d'entiers, il existe $n_0 \in I$ et $n_1 \in I$ tels que :

$$\forall n \in I,\ u_n \geq u_{n_0} \text{ et } v_n \geq v_{n_1}.$$

Comme u_{n_0} et v_{n_1} sont positifs, on en déduit par produit :

$$\forall n \in I,\ u_n v_n \geq u_{n_0} v_{n_1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in I$, c'est en particulier vrai pour l'entier $n_2 \in I$ qui réalise le minimum de la suite $(u_n v_n)_{n\in I}$. On obtient donc :

$$\min_{n\in I}(u_n v_n) \geq \min_{n\in I}(u_n)\min_{n\in I}(v_n).$$

Un argument similaire pour le max fonctionne aussi.

24) **a)** Il sufiit de prendre :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \lfloor n^{1/3} \rfloor \text{ par exemple.}}$$

b) Notons : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \binom{2k}{k}$ et $v_k = \binom{2(n-k)}{n-k}$. Soit alors $k \geq 0$, comme $u_k > 0$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2(2k+1)}{k+1} \text{ (Cf question 22.)}$$

Ainsi, $(u_k)_k$ est croissante si et seulement si, $2(2k+1) \geq k+1$ si et seulement si, $k \geq 0$. On en déduit que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. De même, on peut montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Dès lors, on obtient :

$$\forall k \in [\![0, a_n - 1]\!],\ 0 \leq u_k v_k \leq u_{a_n - 1} v_0$$

où $u_{a_n-1} = \binom{2(a_n-1)}{a_n-1}$ et $v_0 = \binom{2n}{n}$.

En sommant alors pour les valeurs de k dans $[\![0, a_n - 1]\!]$, on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{a_n-1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \leq \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{a_n-1}\binom{2(a_n-1)}{a_n-1}\binom{2n}{n}.$$

Or, $\displaystyle\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{a_n-1}\binom{2(a_n-1)}{a_n-1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n}\binom{2(a_n-1)}{a_n-1}\binom{2n}{n}a_n = \frac{(2a_n-1)(2a_n)}{4^n a_n a_n} \times a_n\binom{2n}{n}$ car le terme général ne dépend pas de k.

De plus, par la question 22. on sait que $C_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ donc $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$ on obtient donc :

$$\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{a_n-1}\binom{2(a_n-1)}{a_n-1}\binom{2n}{n} \sim \frac{4a_n^2}{a_n^2} \times \frac{a_n}{\sqrt{n\pi}} \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \frac{a_n}{\sqrt{n}}.$$

Comme la suite (a_n) vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2(a_n-1)}{a_n-1}\binom{2n}{n} = 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement on a finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 0.}$$

25) Considérons n suffisamment grand et notons H_n la fonction de répartition de $\dfrac{L_n}{n}$, on sait que $\dfrac{L_n}{n}(\Omega) = [0,1]$. Distinguons alors plusieurs cas :

• Si $x < 0$: $H_n(x) = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = 0.$$

• Si $x = 0$: $H_n(x) = \mathbb{P}\left(L_n \leq 0\right) = \mathbb{P}(L_n = 0) = p_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ par la question 20. Or, par la question 22.(b) on sait que $p_n \sim \dfrac{C_n}{\sqrt{n}}$ et comme C_n tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = 0.$$

• Si $0 < x < 1$: Considérons une suite (a_n) qui vérifie les hypothèses de la question 24. (alors elle vérifie aussi celles de la question 23.), on a :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} && \textit{(par 23.(a))} \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} + \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \end{aligned}$$

Donc par les questions 23.(d) et 24.(b) on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \frac{1}{\pi} G(x).$$

• Si $x \geq 1$: Comme $\dfrac{L_n}{n}$ prend ses valeurs dans $[0,1]$, on a directement :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = 1.$$

On obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\pi} G(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Or, d'après la question 5 en notant X une variable aléatoire qui suit la loi arcsinus on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^x g(t)dt & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\pi}G(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On peut alors remarquer : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to +\infty} H_n(x) = F_X(x)$. Ceci nous permet de conclure :

$$\boxed{\frac{L_n}{n} \text{ converge en loi vers la loi arcsinus.}}$$