Q1 $K = [0,1[\cup [3,4[$, $a=0$ et $m=10$. Ainsi $\underline{u_0=0 \text{ et } v_0=10}$.

$\frac{u_0+v_0}{2} = 5$ majore K donc $u_1=u_0=0$ et $v_1=\frac{u_0+v_0}{2}=5$. $\underline{\underline{u_1=0 \text{ et } v_1=5}}$.

$\frac{u_1+v_1}{2} = \frac{5}{2}$ ne majore pas K donc $u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{5}{2}$ et $v_2=v_1=5$. $\underline{\underline{u_2=\frac{5}{2} \text{ et } v_2=5}}$.

$\frac{u_2+v_2}{2} = \frac{5/2+5}{2} = \frac{15}{4}$ ne majore pas K donc $u_3=\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{15}{4}$ et $v_3=v_2=5$. $\underline{\underline{u_3=\frac{15}{4} \text{ et } v_3=5}}$.

$\frac{u_3+v_3}{2} = \frac{15/4+5}{2} = \frac{35}{8}$ majore K donc $u_4=u_3=\frac{15}{4}$ et $v_4=\frac{u_3+v_3}{2}=\frac{35}{8}$. $\underline{\underline{u_4=\frac{15}{4} \text{ et } v_4=\frac{35}{8}}}$.

Et par le même procédé : $u_5=\frac{15}{4}$, $v_5=\frac{65}{16}$; $u_6=\frac{125}{32}$, $v_6=\frac{65}{16}$; $u_7=\frac{255}{64}$, $v_7=\frac{65}{16}$;

$u_8=\frac{255}{64}$, $v_8=\frac{515}{128}$; $u_9=\frac{255}{64}$, $v_9=\frac{1025}{256}$; $u_{10}=\frac{2045}{512}$, $v_{10}=\frac{1025}{256}$; ...

Notons que $u_{10} \simeq 3.994$ et $v_{10} \simeq 4{,}004$ ... $u_{20} \simeq 3{,}99996$ et $v_{20} \simeq 4{,}000006$

Q2 $\underline{a)}$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $\underline{b)}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons que $\frac{u_n+v_n}{2}$ ne majore pas K. Alors $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=v_n$.

Ainsi $u_{n+1}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}$, $v_{n+1}-v_n=0$ et $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n-v_n}{2}$.

- Supposons que $\frac{u_n+v_n}{2}$ majore K. Alors $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

Ainsi $u_{n+1}-u_n=0$, $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}$ et $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n-v_n}{2}$.

Dans tous les cas : $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n-v_n}{2}$. De plus $u_{n+1}-u_n \in \{0, \frac{v_n-u_n}{2}\}$ et

$v_{n+1}-v_n \in \{0, \frac{u_n-v_n}{2}\}$.

$(u_n-v_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0-v_0=a-m$. $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n-v_n=\frac{a-m}{2^n}}$.

$a \in K$ et M majore K donc $a - M \leq 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \in \{0, \frac{v_n - u_n}{2}\} \subset [0, +\infty[$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \in \{0, \frac{u_n - v_n}{2}\} \subset]-\infty, 0]$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

$(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a - M}{2^n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Ainsi $((u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0})$ est un couple de suites adjacentes.

Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites convergentes qui ont la même limite b.

c) et d) Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$ et v_n majore K.

→ C'est vrai pour $n = 0$ (il suffit de poser $x_0 = u_0 = a$).

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

* 1er cas.. $\frac{u_n + v_n}{2}$ ne majore pas K. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ n'est pas un majorant de K ; $\exists x_{n+1} \in K$, $u_{n+1} < x_{n+1}$; $u_{n+1} \leq x_{n+1}$!

De plus $v_{n+1} = v_n$ majore K d'après l'hypothèse de récurrence.

* 2ème cas.. $\frac{u_n + v_n}{2}$ majore K. Alors $u_{n+1} = u_n$. $\exists x_n \in K$, $u_n \leq x_n$.

Posons $x_{n+1} = x_n$. $x_{n+1} \in K$ et $u_{n+1} \leq x_{n+1}$. De plus $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ est un majorant de K.

Ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, v_n est un majorant de K.

Soit k un élément de K. $\forall n\in\mathbb{N}$, $k\leq v_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $k\leq b$.
$\forall k\in K$, $k\leq b$. <u>b majore K.</u>

Nous avons vu que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in K$, $u_n\leq x_n$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq x_n\leq v_n$ (v_n majore K). Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=b$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers b.
<u>Il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.</u>

<u>e)</u> Soit b' un majorant de K. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq b'$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $b\leq b'$.
<u>Si b' est un majorant de K, $b'\geq b$.</u>

<u>Remarque</u>.. b est le plus petit majorant de K. $b=\operatorname{Sup} K$ (b est la borne supérieure de K)
Soient $\hat{a}$ un élément de K et $\hat{n}$ un majorant de K.
Considérons les suites $(\hat{u}_n)_{n\geq 0}$ et $(\hat{v}_n)_{n\geq 0}$ définies par :
$$\hat{u}_0=\hat{a},\ \hat{v}_0=\hat{n} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ (\hat{u}_{n+1},\hat{v}_{n+1})=\begin{cases}\left(\frac{\hat{u}_n+\hat{v}_n}{2},\hat{v}_n\right) \text{ si } \frac{\hat{u}_n+\hat{v}_n}{2} \text{ ne majore pas } K.\\ \left(\hat{u}_n,\frac{\hat{u}_n+\hat{v}_n}{2}\right) \text{ sinon}\end{cases}$$
Alors ces deux suites ont même limite $\hat{b}$.
$\hat{b}$ majore K et si $\hat{b}'$ est un majorant de K alors $\hat{b}'\geq\hat{b}$
Ainsi $\hat{b}\geq b$ car $\hat{b}$ majore K et $b\geq\hat{b}$ car b majore K. $b=\hat{b}$.
<u>b est indépendant de l'élément a de K et du majorant n de K choisis.</u>

PARTIE II Etude d'un exemple

Q1 <u>a)</u> $\varphi: (x,y)\to ax+by+c$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme.
Soit $(x_0,y_0)\in\mathcal{R}_+$. $\varphi(x_0,y_0)>0$.
φ étant continue en (x_0,y_0) :
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta\Rightarrow|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$. $\varepsilon > 0$.

$\exists \eta \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow |\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| < \varepsilon = \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta$.

$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| < \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$; $-\frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0) < \varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0) < \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)$.

En particulier : $\varphi(x,y) > -\frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0)+\varphi(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0,y_0) > 0$; $(x,y) \in \mathcal{R}_+$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{R}_+$

donc la boule ouverte de centre (x_0,y_0) et de rayon η est contenue dans $\mathcal{R}_+$.

Ainsi pour tout élément (x_0,y_0) de $\mathcal{R}_+$ il existe une boule ouverte de centre (x_0,y_0) contenue dans $\mathcal{R}_+$. <u>$\mathcal{R}_+$ est un ouvert.</u>

<u>Remarques</u> 1.. En changeant a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$ on obtient que $\mathcal{R}_-$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

2.. $\mathcal{R}_+ = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ ... et $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

3.. Plus généralement si φ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ par φ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.

D] Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathcal{R}_+$ et λ un élément de $[0,1]$.

$a(\lambda x+(1-\lambda)x')+b(\lambda y+(1-\lambda)y')+c = \lambda(ax+by+c)+(1-\lambda)(ax'+by'+c)$

Si $\lambda > 0$: $\lambda(ax+by+c) > 0$ et $(1-\lambda)(ax'+by'+c) \geqslant 0$ ($(x,y) \in \mathcal{R}_+$, $(x',y') \in \mathcal{R}_+$ et $1-\lambda \geqslant 0$) donc $\lambda(ax+by+c)+(1-\lambda)(ax'+by'+c) > 0$

Si $\lambda = 0$ $\lambda(ax+by+c)+(1-\lambda)(ax'+by'+c) = ax'+by'+c > 0$.

Dans les deux cas $a(\lambda x+(1-\lambda)x')+b(\lambda y+(1-\lambda)y')+c > 0$.

Ainsi $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y') \in \mathcal{R}_+$

<u>$\forall (x,y) \in \mathcal{R}_+$, $\forall (x',y') \in \mathcal{R}_+$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y') \in \mathcal{R}_+$.</u>

Remarque. $\forall (x,y)\in \mathcal{R}_+, \forall (x',y')\in \mathcal{R}_+, \forall \lambda\in[0,1],\ \lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')\in\mathcal{R}_+$;

$\mathcal{R}_+$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

c) Posons $\forall \lambda\in[0,1],\ \hat\varphi(\lambda)=a(\lambda x+(1-\lambda)x')+b(\lambda y+(1-\lambda)y')+c$.

$\hat\varphi$ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et, $\hat\varphi(0)=ax'+by'+c<0$ et $\hat\varphi(1)=ax+by+c>0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors qu'il existe un élément λ de $[0,1]$ (et même de $]0,1[$) tel que $\hat\varphi(\lambda)=0$.

Alors $(\lambda x+(1-\lambda)x',\lambda y+(1-\lambda)y')\in\mathcal{D}$.

$\forall(x,y)\in\mathcal{R}_+, \forall(x',y')\in\mathcal{R}_-, \exists\lambda\in[0,1],\ (\lambda x+(1-\lambda)x',\lambda y+(1-\lambda)y')\in\mathcal{D}$.

(Q2) Dans cette question si $c\in\mathbb{R}^2$ et si $r\in\mathbb{R}_+^*$ nous noterons $B(c,r)$ la boule ouverte de centre c et de rayon r. $B(c,r)=\{\hat c\in\mathbb{R}^2 \mid \|\hat c-c\|<r\}$.

a) Soit $c\in A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k$.

Soit $i\in[\![1,k]\!]$. A_i est ouvert et $c\in A_i$ donc $\exists r_i\in\mathbb{R}_+^*,\ B(c,r_i)\subset A_i$.

Posons $r=\min(r_1,r_2,\dots,r_k)$. $\forall i\in[\![1,k]\!],\ B(c,r)\subset B(c,r_i)\subset A_i$.

Ainsi $B(c,r)\subset A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k$.

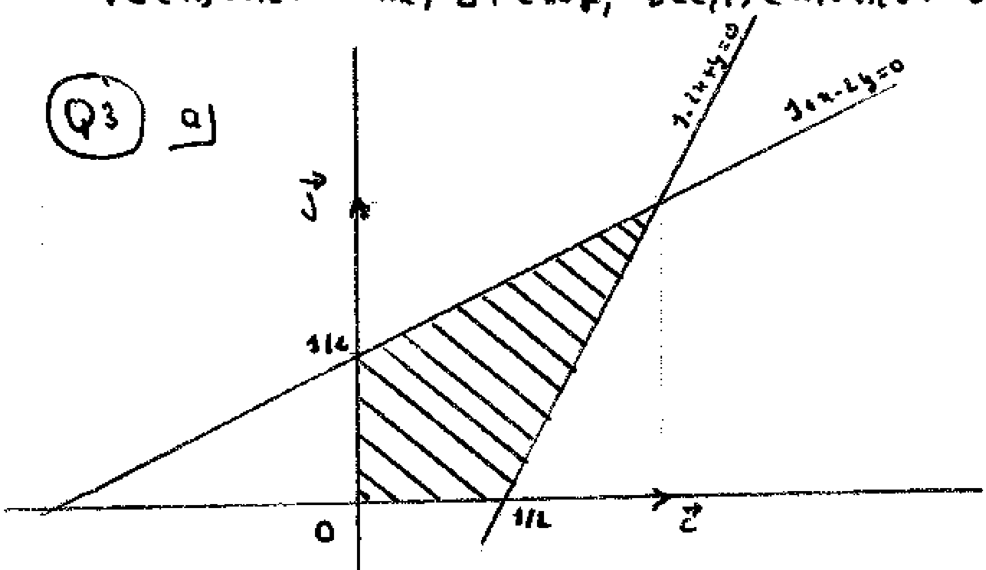
$\forall c\in A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k, \exists r\in\mathbb{R}_+^*,\ B(c,r)\subset A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k$. $A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k$ est un ouvert.

b) Soit $c\in A_1\cup\dots\cup A_k$. $\exists i\in[\![1,k]\!],\ c\in A_i$.

A_i est ouvert donc $\exists r\in\mathbb{R}_+^*,\ B(c,r)\subset A_i\subset A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k$.

$\forall c\in A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k, \exists r\in\mathbb{R}_+^*,\ B(c,r)\subset A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k$. $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k$ est un ouvert.

(Q3) a)



Δ \\\

b) Posons $A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$, $A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<0\}$, $A_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-2x+y<0\}$ et $A_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1+x-2y<0\}$. $\Delta = \overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4} = \overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre ouverts de $\mathbb{R}^2$ d'après φ1.

$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ est alors un ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'après φ2.

Donc $\Delta = \overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y)\in\Delta$. $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $1-2x+y\geqslant 0$ et $1+x-2y\geqslant 0$.

$0\leqslant 2(1-2x+y)+1+x-2y = 3-3x$; $3x\leqslant 3$; $x\leqslant 1$;

$0\leqslant 1-2x+y+2(1+x-2y) = 3-3y$; $3y\leqslant 3$; $y\leqslant 1$.

Alors $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$; $x^2+y^2\leqslant 2$; $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{2}$ $\|(x,y)\|\leqslant\sqrt{2}$.

$\forall (x,y)\in\Delta$, $\|(x,y)\|\leqslant\sqrt{2}$. Δ est borné

Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

c) g est continue sur Δ (fonction polynômiale) et Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Le cours montre que g possède un maximum sur Δ.

d) Notons que Δ' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection des quatre ouverts de $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-2x+y>0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1+x-2y>0\}$ (φ1 + φ2).

Notons également que g est de classe C^1 sur Δ' (fonction polynômiale).

Supposons que le maximum de g soit atteint en un point $C=(\alpha,\beta)$ de Δ'.

Alors 1° Δ' est ouvert ;

2° g est de classe C^1 sur Δ' ;

3° g atteint en C un maximum local.

$\frac{\partial g}{\partial x}(C) = \frac{\partial g}{\partial y}(C) = 0$. Or $\frac{\partial g}{\partial x}(C) = \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha,\beta) = 3$!

Ainsi le maximum de g n'est pas atteint en un point de Δ'.

e) On a donc $\max\limits_{(x,y)\in\Delta} g(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\Delta\setminus\Delta'} g(x,y)$.

Or $\Delta\setminus\Delta' = \Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4$ où $\Delta_1 = \{(x,y)\in\Delta \mid x=0\}$, $\Delta_2 = \{(x,y)\in\Delta \mid y=0\}$,

$\Delta_3 = \{(x,y)\in\Delta \mid 1-2x+y=0\}$ et $\Delta_4 = \{(x,y)\in\Delta \mid 1+x-2y=0\}$

Etudions alors les restrictions de g à $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4.

- $\Delta_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y\geq 0, 1+y\geq 0 \text{ et } 1-2y\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ et } y\in[0,\frac{1}{2}]\}$.

  $\forall (x,y)\in\Delta_1,\ g(x,y) = -y+4$

  Alors $\underline{\underline{\max\limits_{(x,y)\in\Delta_1} g(x,y) = \max\limits_{y\in[0,\frac{1}{2}]} (-y+4) = 4}}$.

  Notons que : $\forall (x,y)\in\Delta_1,\ g(x,y)=4 \iff x=0 \text{ et } y=0$.

- $\Delta_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y=0, 1-2x\geq 0, 1+x\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0 \text{ et } x\in[0,\frac{1}{2}]\}$

  $\forall (x,y)\in\Delta_2,\ g(x,y) = 3x+4$.

  Alors $\underline{\underline{\max\limits_{(x,y)\in\Delta_2} g(x,y) = \max\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} (3x+4) = \frac{11}{2}}}$.

  De plus : $\forall (x,y)\in\Delta_2,\ g(x,y)=\frac{11}{2} \iff x=\frac{1}{2} \text{ et } y=0$.

- $\Delta_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, y=2x-1, 1+x-2(2x-1)\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x-1, x\geq 0, x\geq\frac{1}{2} \text{ et } 3-3x\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x-1 \text{ et } x\in[\frac{1}{2},1]\}$.

  $\forall (x,y)\in\Delta_3,\ g(x,y) = 3y-(2x-1)+4 = x+5$.

  $\underline{\underline{\max\limits_{(x,y)\in\Delta_3} g(x,y) = \max\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]} (x+5) = 6}}$ et $\forall (x,y)\in\Delta_3,\ g(x,y)=6 \iff x=1 \text{ et } y=2\times 1-1=1$.

- $\Delta_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, 1-2x+y\geq 0, y=\frac{x+1}{2}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, x+1\geq 0, 1-2x+\frac{x+1}{2}\geq 0, y=\frac{x+1}{2}\}$

  $\Delta_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, 3-3x\geq 0, y=\frac{x+1}{2}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1] \text{ et } y=\frac{x+1}{2}\}$.

  $\forall (x,y)\in\Delta_4,\ g(x,y) = 3x-\frac{x+1}{2}+4 = \frac{1}{2}(5x+7)$

  $\underline{\underline{\max\limits_{(x,y)\in\Delta_4} g(x,y) = \max\limits_{x\in[0,1]} \frac{1}{2}(5x+7) = 6}}$ et $\forall (x,y)\in\Delta_4,\ g(x,y)=6 \iff x=1 \text{ et } y=1$.

Ce qui précède montre alors que :

$$\rightarrow \max_{(x,y)\in\Delta} g(x,y) = \max_{(x,y)\in\Delta\setminus\Delta'} g(x,y) = \max_{(x,y)\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4} g(x,y)$$

$$\rightarrow \max_{(x,y)\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4} g(x,y) = \max\left(4, \tfrac{11}{2}, 6, 6\right) = 6$$

$$\rightarrow \forall (x,y)\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4,\ g(x,y)=6 \Leftrightarrow x=y=1.$$

Ainsi le maximum de g sur Δ est 6 et il est atteint uniquement en $(1,1)$.

Q4 a) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$!

$$X\in E \Leftrightarrow x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0 \quad \begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0\\ 2x_1-x_2+x_3=1\\ -x_1+2x_2+x_4=1\end{cases}$$

$$X\in E \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1-2x_1+x_2\\ x_4 = 1+x_1-2x_2\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ 1-2x_1+x_2\geq 0,\ 1+x_1-2x_2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1-2x_1+x_2\\ x_4 = 1+x_1-2x_2\\ (x_1,x_2)\in\Delta\end{cases}$$

$$\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4,\quad X\in E \Leftrightarrow x_3 = 1-2x_1+x_2,\ x_4=1+x_1-2x_2,\ (x_1,x_2)\in\Delta.$$

b) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in E$.

$$f(X)=\langle X,W\rangle = {}^tXW = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix} = 2x_1+4x_2+x_3+3x_4 \overset{X\in E}{=} 2x_1+4x_2+1-2x_1+x_2+3(1+x_1-2x_2)$$

$$f(X) = 3x_1-x_2+4 = g(x_1,x_2).$$

$$\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in E,\ f(X)=g(x_1,x_2).$$

Ainsi $\max_{X\in E} f(X) = \max_{(x_1,x_2)\in\Delta} g(x_1,x_2) = 6$. Réciproquement. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in E$.

$$f(X)=6 \Leftrightarrow g(x_1,x_2)=6 \Leftrightarrow x_1=x_2=1 \overset{X\in E}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1=1\\ x_2=1\\ x_3=1-2+1=0\\ x_4=1+1-2=0\end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Le maximum de f sur E est 6 et il est atteint uniquement en $X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

PARTIE III Sommets et maximum

(Q1) <u>Remarque</u>. Il est aisé de voir que $\mathcal{C}$ est convexe c'est à dire que :

$$\forall X \in \mathcal{C}, \forall X' \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in [0,1], \lambda X + (1-\lambda)X' \in \mathcal{C}.$$

Supposons que $0_{\mathbb{R}^p} \in \mathcal{C}$.

Soient $(Z', Z'') \in \mathcal{C}^2$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que : $0_{\mathbb{R}^p} = \lambda Z' + (1-\lambda) Z''$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda Z'_i + (1-\lambda) Z''_i = 0$. Or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Z'_i \geq 0$, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Z''_i \geq 0$, $\lambda > 0$ et $1-\lambda > 0$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda Z'_i = (1-\lambda) Z''_i = 0$.

Comme λ et $1-\lambda$ ne sont pas nuls : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $Z'_i = Z''_i = 0$; $Z' = Z''$.

$\forall (Z', Z'') \in \mathcal{C}^2$, $\forall \lambda \in]0,1[$, $(0_{\mathbb{R}^p} = \lambda Z' + (1-\lambda) Z'') \Rightarrow (Z' = Z'')$; $0_{\mathbb{R}^p}$ est un sommet de $\mathcal{C}$.

<u>Si $0_{\mathbb{R}^p}$ est un élément de $\mathcal{C}$, $0_{\mathbb{R}^p}$ est un sommet de $\mathcal{C}$.</u>

(Q2) <u>a)</u> $m_0 = f(U) = \langle U, W \rangle = \langle \lambda U' + (1-\lambda) U'', W \rangle = \lambda \langle U', W \rangle + (1-\lambda) \langle U'', W \rangle$

Donc $m_0 = f(U) = \lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'')$. Notons aussi que $f(U') \leq m_0$ et $f(U'') \leq m_0$.

Supposons $f(U') \neq m_0$. Alors $f(U') < m_0$; $\lambda f(U') < \lambda m_0$ car $\lambda > 0$.

$$\lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'') < \lambda m_0 + (1-\lambda) f(U'') \underset{1-\lambda \geq 0}{\leq} \lambda m_0 + (1-\lambda) m_0 = m_0.$$

Ainsi $m_0 = \lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'') < m_0$!!

Par conséquent $f(U') = m_0 = f(U)$. Alors $m_0 = \lambda f(U') + (1-\lambda) f(U'') = \lambda m_0 + (1-\lambda) f(U'')$.

Donc $(1-\lambda) f(U'') = m_0 - \lambda m_0 = (1-\lambda) m_0$; comme $1-\lambda$ n'est pas nul : $f(U'') = m_0 = f(U)$.

Ainsi <u>$f(U') = f(U'') = f(U)$</u>. $0 = f(U'') - f(U') = \langle U'', W \rangle - \langle U', W \rangle = \langle U'' - U', W \rangle = \langle V, W \rangle$; ainsi <u>$V = U'' - U'$ est orthogonal à W.</u>

<u>b)</u> • Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Supposons que $i \in \Delta(U')$.

Alors $U'_i \neq 0$; $U_i = \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i \underset{\substack{\lambda > 0,\ U'_i \geq 0 \text{ et } U'_i \neq 0 \\ 1-\lambda > 0,\ U''_i \geq 0}}{>} 0$; $U_i \neq 0$; $i \in \Delta(U)$.

Ainsi <u>$\Delta(U') \subset \Delta(U)$</u>. De même <u>$\Delta(U'') \subset \Delta(U)$.</u>

vi) Soit $i \in \Delta(V)$. $V_i = U''_i - U'_i \neq 0$

$U_i = \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i = U''_i - \lambda(U''_i - U'_i) = U''_i - \lambda V_i$

Supposons $U_i = 0$; $U''_i = \lambda V_i$ or $\lambda \neq 0$ et $V_i \neq 0$ donc $U''_i \neq 0$; ainsi $i \in \Delta(U'')$.

Mais alors $i \in \Delta(U)$ et donc $U_i \neq 0$!!

Par conséquent si $i \in \Delta(V)$, $U_i \neq 0$. $\underline{\underline{\Delta(V) \subset \Delta(U)}}$.

vii) Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $U_i = 0 \Rightarrow \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i = 0 \underset{\substack{\lambda > 0,\, U'_i \geqslant 0 \\ 1-\lambda > 0,\, U''_i \geqslant 0}}{\Rightarrow} U'_i = U''_i = 0 \Rightarrow V_i = 0$; $U_i = 0 \Rightarrow V_i = 0$

Ainsi $V_i \neq 0 \Rightarrow U_i \neq 0$!

- Soit μ un réel. $AU = AU' = AU'' = B$ car U, U' et U'' sont des éléments de $\mathcal{C}$.
  $A(U + \mu V) = AU + \mu AV = B + \mu(A(U'' - U')) = B + \mu AU'' - \mu AU' = B + \mu B - \mu B = B$.
  $\underline{\underline{A(U + \mu V) = B}}$.

- Soit $i \in \Delta(U + \mu V)$. $U_i + \mu V_i \neq 0$.
  Supposons que : $U_i = 0$. Alors $0 = U_i = \lambda U'_i + (1-\lambda) U''_i$.
  Comme : $\lambda > 0$, $U'_i \geqslant 0$, $1-\lambda > 0$, $U''_i \geqslant 0$ on obtient $\lambda U'_i = (1-\lambda) U''_i = 0$, puis $U'_i = U''_i = 0$
  Alors $U_i + \mu V_i = \mu V_i = \mu(U''_i - U'_i) = 0$! Ainsi U_i n'est pas nul et $i \in \Delta(U)$.
  $\underline{\underline{\Delta(U + \mu V) \subset \Delta(U)}}$.

c) $AV = A(U'' - U') = AU'' - AU' = B - B = 0$. $\quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij} V_j = 0$.

ceci s'écrit encore : $V_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + V_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + V_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}$; ou encore :

$V_1 C^1 + V_2 C^2 + \cdots + V_p C^p = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i C^i = 0_{\mathbb{R}^n}$; $\displaystyle\sum_{i \in \Delta(U)} V_i C^i = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $i \notin \Delta(U) \overset{\Delta(V) \subset \Delta(U)}{\Rightarrow} i \notin \Delta(V) \Rightarrow V_i = 0$.

Or $\exists i_0 \in [\![1,p]\!]$, $V_{i_0} \neq 0$; $i_0 \in \Delta(V)$ donc $i_0 \in \Delta(U)$.

. Finalement : $\sum_{i \in \Delta(U)} V_i C^i = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\exists i_0 \in \Delta(U)$, $V_{i_0} \neq 0$.

Alors <u>la famille $(C^i)_{i \in \Delta(U)}$ est liée.</u>

<u>d)</u> • - $U = U + 0\,V \in K$ donc K n'est pas vide.

- Par hypothèse il existe $i_1 \in [\![1, p]\!]$, $V_{i_1} < 0$. Soit $\mu \in K$. $U + \mu V \in \mathcal{E}$ donc, en particulier $U_{i_1} + \mu V_{i_1} \geq 0$; $\mu V_{i_1} \geq -U_{i_1}$; $\mu \leq -\frac{U_{i_1}}{V_{i_1}}$ $(V_{i_1} < 0)$

Ainsi $\forall \mu \in K$, $\mu \leq -\frac{U_{i_1}}{V_{i_1}}$; K est est majoré.

<u>K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.</u>

• D'après I Q 2 d) il existe une suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de K qui converge vers d.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U + \mu_n V \in \mathcal{E}$; $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_i + \mu_n V_i \geq 0$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $U_i + \alpha_K V_i \geq 0$; $U + \alpha_K V \geq 0$.

De plus : $A(U + \alpha_K V) = B$ (b)). Ainsi $U + \alpha_K V \geq 0$ et $A(U + \alpha_K V) = D$.

Par conséquent : <u>$U + \alpha_K V \in \mathcal{E}$</u>

Remarque.. $\alpha_K \in K$ ... et $\alpha_K = \operatorname{Sup} K$ donc α_K est le plus grand élément de K.

• $f(U + \alpha_K V) = \langle U + \alpha_K V, W \rangle = \langle U, W \rangle + \alpha_K \underbrace{\langle V, W \rangle}_{=0} = \langle U, W \rangle = f(U) = \pi_0$.

<u>$f(U + \alpha_K V) = \pi_0$.</u>

<u>e)</u> Supposons donc que : $\forall i \in \Delta(U)$, $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i \neq 0$.

Soit $i \in \Delta(U)$. $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i \neq 0$; mieux $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i > 0$ car $\gamma_i = U_i + \alpha_K V_i$ est non nul et positif $(U + \alpha_K V \in \mathcal{E})$.

$\lim_{\mu \to 0^+} (U_i + (\alpha_K + \mu) V_i) = U_i + \alpha_K V_i = \gamma_i > 0$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \delta_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \mu < \delta_i \Rightarrow |U_i + (\alpha_K + \mu) V_i - \gamma_i| < \varepsilon$

Pour $\varepsilon = \gamma_i / 2$; $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \mu < \delta_i \Rightarrow |U_i + (\alpha_K + \mu) V_i - \gamma_i| < \varepsilon = \frac{\gamma_i}{2}$.

$\forall \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \mu < \delta_i \Rightarrow -\frac{\gamma_i}{2} < U_i + (\alpha_K + \mu) V_i - \gamma_i < \frac{\gamma_i}{2} \Rightarrow U_i + (\alpha_K + \mu) V_i > \gamma_i - \frac{\gamma_i}{2} = \frac{\gamma_i}{2} > 0$

$\forall \mu \in \mathbb{R}$, $0 < \mu < \delta_i \Rightarrow U_i + (\alpha_K + \mu) V_i > 0$.

Posons $\ell = \inf_{i \in \Delta(U)} \left(\frac{\delta_i}{2}\right)$. $\forall i \in \Delta(U)$, $0 < \eta < \delta_i$; $\forall i \in \Delta(U)$, $U_i + (\alpha_\ell + \eta)V_i > 0$.

Rappelons que $\Delta(U + (\alpha_K + \eta)V) \subset \Delta(U)$; ainsi si $i \in [\![1,p]\!] - \{\Delta(U)\}$, $U_i + (\alpha_K + \eta)V_i = 0$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $U_i + (\alpha_K + \eta)V_i \geq 0$; $U + (\alpha_K + \eta)V \geqslant 0$.

De plus $A(U + (\alpha_K + \eta)V) = B$ (h)) donc $U + (\alpha_K + \eta)V \in \mathcal{E}$.

Alors $\alpha_K + \eta \in K$. Ceci est impossible car α_K est le plus grand élément de K et $\alpha_K + \eta > \alpha_K$.

Par conséquent $\exists i_2 \in \Delta(U)$, $U_{i_2} + \alpha_K V_{i_2} = 0$; $i_2 \in \Delta(U)$ et $i_2 \notin \Delta(U + \alpha_K V)$

Or $\Delta(U + \alpha_K V) \subset \Delta(U)$, donc $\Delta(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $\Delta(U)$.

f) $U^{(1)} \in \mathcal{E}$, $f(U^{(1)}) = M_0$. Et $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{E}$

$U^{(1)}$ a donc les mêmes qualités que U. On peut donc trouver $U^{(2)}$ dans $\mathcal{E}$ tel que : $f(U^{(2)}) = M_0$ et $\Delta(U^{(2)}) \subsetneq \Delta(U^{(1)})$

Dans ces conditions on peut construire un élément $U^{(2)}$ de $\mathcal{E}$ tel que : $\begin{cases} f(U^{(2)}) = M_0 \\ \text{et} \\ \Delta(U^{(2)}) \subsetneq \Delta(U^{(1)}) \end{cases}$

g) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe pas de sommet de $\mathcal{E}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{E}$ (▲).

Montrons par récurrence que, pour tout élément k de $\mathbb{N}$, il existe une suite $(U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(k)})$ d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que :

$$\left.\begin{array}{l} \to \forall i \in [\![0,k]\!],\ f(U^{(i)}) = M \\ \to \forall i \in [\![0,k-1]\!],\ \Delta(U^{(i+1)}) \subsetneq \Delta(U^{(i)}) \\ \to \forall i \in [\![0,k]\!],\ U^{(i)} \text{ n'est pas un sommet de } \mathcal{E} \end{array}\right\} \quad (P_k)$$

→ C'est clair pour $k = 0$; il suffit de prendre $U^{(0)} \in \mathcal{E}$ tel que $f(U^{(0)}) = M_0$; l'hypothèse (▲) montre que $U^{(0)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{E}$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Il existe une suite $(U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(k)})$ d'éléments de $\mathcal{E}$ vérifiant (P_k).

$U^{(\ell)} \in \mathcal{C}$, $f(U^{(\ell)}) = M_0$ et $U^{(\ell)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$. $U^{(\ell)}$ a les mêmes qualité que U donc il existe un élément $U^{(\ell+1)}$ de $\mathcal{C}$ tel que :
$\Delta(U^{(\ell+1)}) \subsetneq \Delta(U^{(\ell)})$ et $f(U^{(\ell+1)}) = M_0$.
L'hypothèse ▲ indique que $U^{(\ell+1)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$.
Alors $(U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(\ell)}, U^{(\ell+1)})$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant $P_{\ell+1}$.
Ainsi s'achève la récurrence.
On peut donc trouver une suite $(U^{(0)}, U^{(1)}, \dots, U^{(p+1)})$ d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifiant P_{p+1}.
Posons pour tout $i \in [\![0, p+1]\!]$, $n_i = \operatorname{card} \Delta(U^{(i)})$.
$\forall i \in [\![0, p]\!]$, $n_{i+1} < n_i$ car $\Delta(U^{(i+1)}) \subsetneq \Delta(U^{(i)})$
donc $n_{p+1} < n_p < \dots < n_1 < n_0$. Or $\forall i \in [\![0, p+1]\!]$, $n_i \in [\![0, p]\!]$.
Alors $n_0, n_1, \dots, n_{p+1}$ sont $p+2$ éléments de l'ensemble $[\![0, p]\!]$ qui a $p+1$ éléments !
Ainsi l'hypothèse (▲) conduit à une contradiction.

<u>Il existe un sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.</u>

Remarque.. Notons que ce beau résultat suppose que f admette un maximum sur $\mathcal{C}$...

PARTIE IV Existence du maximum de la fonction f

(Q1) $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = {}^t(AX)Y = ({}^tX\,{}^tA)Y = {}^tX({}^tAY) = \langle X, {}^tAY\rangle$.
Posons $A' = {}^tA$. $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A'Y\rangle$.

<u>$\exists A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A'Y\rangle$.</u>

(Q2) a) Soient Y, $\hat{Y}$ deux éléments de E et α un réel.

$$\Theta(\alpha Y + \hat{Y}) = \begin{pmatrix} \langle \alpha Y + \hat{Y}, C^1\rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha Y + \hat{Y}, C^r\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\langle Y, C^1\rangle + \langle \hat{Y}, C^1\rangle \\ \vdots \\ \alpha\langle Y, C^r\rangle + \langle \hat{Y}, C^r\rangle \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \langle Y, C^1\rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \hat{Y}, C^1\rangle \\ \vdots \\ \langle \hat{Y}, C^r\rangle \end{pmatrix} = \alpha\Theta(Y) + \Theta(\hat{Y})$$

<u>Θ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^r$.</u>

Soit $Y \in \mathrm{Ker}\,\theta$. $\begin{pmatrix} \langle Y, c^1\rangle \\ \vdots \\ \langle Y, c^r\rangle \end{pmatrix} = 0$; $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\langle Y, c^i\rangle = 0$; $Y \in (\mathrm{Vect}(c^1, \dots, c^r))^\perp$

donc $\mathrm{Ker}\,\theta \subset [\mathrm{Vect}(c^1, \dots, c^r)]^\perp = E^\perp = \{0_E\}$; $\mathrm{Ker}\,\theta = \{0_E\}$; θ est injective.

θ est une application linéaire injective de E dans $\mathbb{R}^r$ et $\dim E = \dim \mathbb{R}^r = r < +\infty$.

ainsi <u>θ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^r$.</u>

<u>b)</u> Soit Y un élément de E.

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\langle Y, c^i\rangle = w_i \iff \begin{pmatrix} \langle Y, c^1\rangle \\ \vdots \\ \langle Y, c^r\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} \iff \theta(Y) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} \iff Y = \theta^{-1}\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}\right)$.

<u>Ainsi il existe un unique élément Z de E tel que : $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\langle Z, c^i\rangle = w_i$; $Z = \theta^{-1}\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}\right)$.</u>

<u>c)</u> Soit $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\langle Z, c^i\rangle = \langle Z, A E_i\rangle = \langle A E_i, Z\rangle = \langle E_i, A' Z\rangle = \langle E_i, \sum_{\ell=1}^{p} (A'Z)_\ell E_\ell\rangle$

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\langle Z, c^i\rangle = \sum_{\ell=1}^{p} (A'Z)_\ell \langle E_i, E_\ell\rangle = (A'Z)_i$

<u>les coordonnées de $A'Z$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ sont : $(\langle Z, c^1\rangle, \langle Z, c^2\rangle, \dots, \langle Z, c^p\rangle)$.</u>

<u>d)</u> • Soit X un élément de $\mathcal{C}$. $X \geqslant 0$ et $AX = B$.

$\langle Z, B\rangle = \langle Z, AX\rangle = \langle A'Z, X\rangle = \sum_{i=1}^{p} (A'Z)_i X_i = \sum_{i=1}^{p} \langle Z, c^i\rangle X_i$

$\langle Z, B\rangle = \sum_{i=1}^{r} w_i X_i + \sum_{i=r+1}^{p} \langle Z, c^i\rangle X_i = \sum_{i=1}^{p} X_i w_i + \sum_{i=r+1}^{p} (\langle Z, c^i\rangle - w_i) X_i$

$\forall i \in [\![r+1, p]\!]$, $X_i \geqslant 0$ et $\langle Z, c^i\rangle - w_i \geqslant 0$; $\forall i \in [\![r+1, p]\!]$, $(\langle Z, c^i\rangle - w_i) X_i \geqslant 0$.

Ainsi $\langle Z, B\rangle = \sum_{i=1}^{p} X_i w_i + \sum_{i=r+1}^{p} (\langle Z, c^i\rangle - w_i) X_i \geqslant \sum_{i=1}^{p} X_i w_i = \langle X, W\rangle$.

<u>$\forall X \in \mathcal{C}$, $\langle Z, B\rangle \geqslant \langle X, W\rangle$.</u>

• Soit U un élément de $\mathcal{C}$ tel que $\Delta(U) = \{1, \dots, r\}$.

$$\langle Z, B\rangle = \sum_{i=1}^{p} U_i W_i + \sum_{i=r+1}^{p} (\langle Z, c^i\rangle - W_i) U_i \underset{\underset{\Delta(U)=\{1,\dots,r\}}{\uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{p} U_i W_i = \langle U, W\rangle = f(U)$$

Alors $\forall X \in \mathcal{C}$, $f(U) = \langle Z, B\rangle \geq \langle X, W\rangle = f(X)$.

$U \in \mathcal{C}$ et $\forall X \in \mathcal{C}$, $f(U) \geq f(X)$. f possède un maximum sur $\mathcal{C}$ que U réalise.

D'après la partie III, U est un sommet de $\mathcal{C}$... car $(C_i)_{i\in[1,r]} = (C_i)_{i\in\Delta(U)}$ est libre.

(Q3) Ici $n = 2$, $p = 4$, $C^1 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $C^4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}$

a) $C^3 = \frac{2}{3}C^1 + \frac{1}{3}C^2$ et $C^4 = \frac{1}{3}C^1 + \frac{2}{3}C^2$.

$E = \mathrm{Vect}(C^1, C^2, C^3, C^4) = \mathrm{Vect}(C^1, C^2)$ et la famille (C^1, C^2) est clairement libre.

Ainsi $r = \mathrm{rg}\, A = 2$ et (C^1, C^2) est libre.

b) $Z = \alpha C^1 + \beta C^2$. $\forall i \in \{1,\dots,r\}$, $\langle Z, C^i\rangle = W_i$.

$2 = W_1 = \langle Z, C^1\rangle = \alpha\langle C^1, C^1\rangle + \beta\langle C^1, C^2\rangle = 5\alpha - 4\beta$.

$4 = W_2 = \langle Z, C^2\rangle = \alpha\langle C^1, C^2\rangle + \beta\langle C^2, C^2\rangle = -4\alpha + 5\beta$.

$6 = 2+4 = 5\alpha - 4\beta - 4\alpha + 5\beta = \alpha + \beta$; $2 = 4 - 2 = -4\alpha + 5\beta - 5\alpha + 4\beta = 9(\beta - \alpha)$.

$\begin{cases}\alpha + \beta = 6\\ \beta - \alpha = \frac{2}{9}\end{cases}$; $2\beta = 6 + \frac{2}{9} = \frac{56}{9}$ et $2\alpha = 6 - \frac{2}{9} = \frac{52}{9}$; $\beta = \frac{28}{9}$ et $\alpha = \frac{26}{9}$.

$Z = \frac{26}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \frac{28}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/3\\10/3\end{pmatrix}$. $\quad Z = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\[4pt]\frac{10}{3}\end{pmatrix}$.

c) $A'Z - W = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\[2pt]\frac{10}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\8/3\\10/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5/3\\1/3\end{pmatrix} \geq 0$. $\quad A'Z - W \geq 0$

Ainsi $\forall i \in \{r+1,\dots,p\}$, $\langle Z, C^i\rangle = (A'Z)_i \geq W_i$

<u>d)</u> Soit $X \in \mathcal{C}$. $x_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$

$$S(X) = \{1,2\} \iff \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 = x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ 1 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ 1 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \underset{\text{ADC}}{\iff} x_1 = x_2 = 1.$$

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le seul élément de $\mathcal{C}$ tel que $S(V) = \{1,2\}$

D'après Q2 $f : X \mapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ en $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

V est un sommet de $\mathcal{C}$. Notons que $\Pi_0 = f(V) = \langle V, W \rangle = 6$.

On retrouve (presque) les résultats de la partie II ... il ne reste plus qu'à prouver que V est le seul point où f réalise son maximum sur $\mathcal{C}$.

Soit $X \in \mathcal{C} \setminus \{V\}$.

$$f(V) = \langle Z, B \rangle = \sum_{i=1}^{p} X_i W_i + \sum_{i=p+1}^{p} (\langle Z, C^i \rangle - W_i) X_i$$

$$f(V) = f(X) + \sum_{i=3}^{4} (A'Z - W)_i X_i = f(X) + \frac{5}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4$$

$$f(V) - f(X) = \frac{5}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4.$$

Supposons $X_3 = X_4 = 0$; alors $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 0 = 1 \\ -X_1 + 2X_2 + 0 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2X_1 - X_2 = 1 \\ -X_1 + 2X_2 = 1 \end{cases}$; $X_1 = X_2 = 1$,

Alors $X = V$!

Donc $(X_3, X_4) \neq (0,0)$, comme $X_3 \geq 0$ et $X_4 \geq 0$: $\frac{5}{3} X_3 + \frac{1}{3} X_4 > 0$, $f(V) > f(X)$.