Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$.

Q1 a) ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = \ln'1\,(x-1) + \ln 1$ ou encore $y = x-1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$.

Soit $u \in [0,1[$. $1-u \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(1-u) \leq (1-u)-1 = -u$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall u \in [0,1[,\ \ln(1-u) \leq -u}}$.

Soit $t \in [0, n[$. $\frac{t}{n} \in [0,1[$ donc $\ln(1-\frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$.

Alors $\ln(1-\frac{t}{n})^n = n\ln(1-\frac{t}{n}) \leq -t$. Par croissance de exp on obtient : $(1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$.

Notons que ceci vaut encore pour $t=n$ ($0 \leq e^{-n}$!).

Finalement $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,n],\ (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}}}$.

b) . $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $1-\frac{t^2}{n} > 0$ et $1-\frac{t}{n} > 0$.

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- $t \mapsto 1-\frac{t^2}{n}$ et $t \mapsto 1-\frac{t}{n}$ sont dérivables sur $[0,\sqrt{n}[$.

Alors $t \mapsto \ln(1-\frac{t^2}{n})$ et $t \mapsto \ln(1-\frac{t}{n})$ sont dérivables sur $[0,\sqrt{n}[$.

φ est alors dérivable sur $[0,\sqrt{n}[$ comme combinaison linéaire de trois fonctions dérivables sur $[0,\sqrt{n}[$

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{-2t/n}{1-\frac{t^2}{n}} - 1 - n\,\frac{-1/n}{1-t/n} = -\frac{2t}{n-t^2} - 1 + \frac{n}{n-t} = \frac{1}{(n-t^2)(n-t)}\left[-2t(n-t) - (n-t^2)(n-t) + n(n-t^2)\right]$$

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{1}{(n-t^2)(n-t)}\left[-2nt + 2t^2 - n^2 + nt + nt^2 - t^3 + n^2 - nt^2\right] = \frac{-t^3 + 2t^2 - nt}{(n-t^2)(n-t)}.$$

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{-t(t^2-2t+n)}{(n-t^2)(n-t)} = \frac{-t\left((t-1)^2+n-1\right)}{(n-t^2)(n-t)}.$$

Or $\forall t \in [0,\sqrt{n}[$, $t \geq 0$, $(t-1)^2+n-1 \geq 0$, $n-t^2 > 0$ et $n-t > 0$. Alors $\forall t \in [0,\sqrt{n}[$, $\varphi'(t) \leq 0$.

est alors décroissante sur $[0,\sqrt{n}[$.

Ainsi $\forall t\in[0,\sqrt{n}[$, $\varphi(t)\leq\varphi(0)=0$. $\forall t\in[0,\sqrt{n}[$, $\ln(1-\frac{t^2}{n})-t-n\ln(1-\frac{t}{n})\leq 0$.

$\forall t\in[0,\sqrt{n}[$, $\ln(1-\frac{t^2}{n})-t\leq\ln(1-\frac{t}{n})^n$. Par croissance de exp il vient :

$e^{\ln(1-\frac{t^2}{n})-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n$ pour tout t dans $[0,\sqrt{n}[$.

Alors $\forall t\in[0,\sqrt{n}[$, $e^{\ln(1-\frac{t^2}{n})}e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n$ ou $(1-\frac{t^2}{n})e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n$.

Observons alors que cette dernière inégalité vaut aussi pour $t=\sqrt{n}$ $(0\leq(1-\frac{\sqrt{n}}{n})^n\,!)$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[0,\sqrt{n}]$, $(1-\frac{t^2}{n})e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n$.

c) Observons que $\forall t\in]\sqrt{n},n]$, $(1-\frac{t^2}{n})e^{-t}\leq 0\leq(1-\frac{t}{n})^n$.

Alors $\forall t\in[0,n]$, $(1-\frac{t^2}{n})e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n$ ou $e^{-t}-\frac{t^2}{n}e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n$.

Rappelons que $\forall t\in[0,n]$, $(1-\frac{t}{n})^n\leq e^{-t}$ d'après a)

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[0,n]$, $e^{-t}-\frac{t^2}{n}e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n\leq e^{-t}$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall t\in]0,n]$, $t^{x-1}e^{-t}-\frac{1}{n}t^{x+1}e^{-t}\leq(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\leq t^{x-1}e^{-t}$. $(*)$

$\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+2)$ existent donc nécessairement

1) $\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ et $\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt$ existent.

2) $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ & $\Gamma(x+2)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt$

Observons que $\forall t\in]0,n]$, $0\leq(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\leq t^{x-1}e^{-t}$. Comme $\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge il en est de même de $\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\,dt$.

Nous pouvons alors "intégrer (*)" et il vient alors

$$\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt-\frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \leq \int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt .$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt=\Gamma(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt\right)=0\times\Gamma(x+2)=0$.

Alors par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt=\Gamma(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt=\Gamma(x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$

Q2 a) $\forall y\in\,]0,1],\ y^{x-1}=\frac{1}{y^{1-x}}$ et $1-x<1$ donc $\int_0^1 y^{x-1}\,dy$ converge d'après le cours.

- $y\mapsto y^{x-1}(1-y)^n$ est continue et positive sur $]0,1[$
- $y^{x-1}(1-y)^n \underset{0}{\sim} y^{x-1}$
- $\int_0^1 y^{x-1}\,dy$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^1 y^{x-1}\,dy$ et $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy$ convergent.

---

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $x\in\,]1,+\infty[$.

Soit ε dans $]0,1]$. Une intégration par parties simple donne :

$$\int_\varepsilon^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy=\left[y^{x-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)(1-y)^{n+1}\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1(x-1)y^{x-2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)(1-y)^{n+1}\,dy$$

car $y\mapsto y^{x-1}$ et $y\mapsto-\frac{1}{n+1}(1-y)^{n+1}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon,1]$.

Alors $\int_\varepsilon^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy=\frac{1}{n+1}\,\varepsilon^{x-1}(1-\varepsilon)^{n+1}+\frac{x-1}{n+1}\int_\varepsilon^1 y^{x-2}(1-y)^{n+1}\,dy$.

Notons que $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$ et que $\int_0^1 y^{x-2}(1-y)^{n+1}dy$ converge car $x\in]1,+\infty[$.

Notons également que $\lim_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left(\frac{1}{n+1}\,\varepsilon^{x-1}(1-\varepsilon)^{n+1}\right)=0 \quad (x>1)$.

En passant à la limite dans (**) il vient $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy = \frac{x-1}{n+1}\int_0^1 y^{x-2}(1-y)^{n+1}dy$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in]1,+\infty[,\ B_n(x)=\frac{x-1}{n+1}\ B_{n+1}(x-1)$.

Ce que nous pouvons encore écrire : $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in]0,+\infty[,\ B_{n+1}(x)=\frac{n+1}{x}B_n(x+1)}$

Notons que ceci vaut encore pour $n=0$...

Notons alors par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}_+^*}}$, $B_n(x)=\dfrac{n!}{\prod_{l=0}^{n}(x+l)}$.

- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $B_1(x)=\int_0^1 y^{x-1}(1-y)dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 y^{x-1}dy-\int_0^1 y^x dy = \lim_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left[\frac{y^x}{x}\right]_\varepsilon^1-\lim_{\varepsilon\mapsto 0^+}\left[\frac{y^{x+1}}{x+1}\right]_\varepsilon^1$

les deux intégrales convergent

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $B_1(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1!}{\prod_{l=0}^{1}(x+l)}$. La propriété est vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $B_n(x)=\dfrac{n!}{\prod_{l=0}^{n}(x+l)}$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$$B_{n+1}(x)=\frac{n+1}{x}B_n(x+1)=\frac{n+1}{x}\ \frac{n!}{\prod_{l=0}^{n}(x+1+l)}=\frac{(n+1)!}{x\prod_{k=1}^{n+1}(x+l)}=\frac{(n+1)!}{\prod_{l=0}^{n+1}(x+l)}.$$

Ainsi la propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

$$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ B_n(x)=\frac{n!}{\prod_{l=0}^{n}(x+l)}.}}$$

__Remarque__ : Ceci vaut pour $n=0$ car $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $B_0(x)=\int_0^1 y^{x-1}dy=\frac{1}{x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n) = (x+n)(x+n-1)\Gamma(x+n-1)$

$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots x\,\Gamma(x)$ (récurrence simple !)

Alors $\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)} = \dfrac{1}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)}$; $\dfrac{\Gamma(x)\,n!}{\Gamma(x+n+1)} = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} = B_n(x)$.

Or $n! = \Gamma(n+1)$ donc $B_n(x) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$.

$B_0(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} = \dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(0+1)}{\Gamma(x+0+1)}$ car $\Gamma(0+1) = 1$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $B_n(x) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall \varepsilon \in]0,n]$, $\displaystyle\int_\varepsilon^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \underset{y=\frac{t}{n}}{=} \int_{\varepsilon/n}^1 (1-y)^n (ny)^{x-1} n\,dy = \int_{\varepsilon/n}^1 (1-y)^n n^x y^{x-1}\,dy$.

En faisant tendre ε vers 0^+ il vient $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x B_n(x)$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \Gamma(x)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n^x B_n(x)\right) = \Gamma(x)$.

Ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n^x \frac{n!}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)}\right) = \Gamma(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\,\Gamma(x) = \left(\prod_{\ell=0}^{n-1}(x+\ell)\right)\Gamma(x)$

$\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)}$ et $\Gamma(x) \neq 0$ donc $\Gamma(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^x\, n!}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)}$.

Alors $\Gamma(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\prod_{\ell=0}^{n-1}(x+\ell)\right) \dfrac{n^x\, n!}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)} = \dfrac{n^x\, n!}{x+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^x\, n!}{n} = n^x (n-1)!$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^x (n-1)!$$

d) Pour montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n}\lambda_n) = \sqrt{2}$

Pour cela il suffit de montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty}(\sqrt{2p}\,\lambda_{2p}) = \lim\limits_{p\to+\infty}(\sqrt{2p+1}\,\lambda_{2p+1}) = \sqrt{2}$.

$$\lambda_{2p} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} = \frac{(p-1)!}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \underset{p\to+\infty}{\overset{(c)}{\sim}} \frac{(p-1)!}{p^{1/2}(p-1)!} = \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p}}.$$

Alors $\sqrt{2p}\,\lambda_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} (\sqrt{2p}\,\lambda_{2p}) = \sqrt{2}$.

$$\lambda_{2p+1} = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{p\,!} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{1/2}(p-1)!}{p!} = \frac{p^{1/2}}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p}} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p+1}}.$$

Alors $\sqrt{2p+1}\,\lambda_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} (\sqrt{2p+1}\,\lambda_{2p+1}) = \sqrt{2}$.

Ceci achève de montrer que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

(Q1) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\rightarrow$ $t \mapsto |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

$\rightarrow$ $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ (croissance comparée).

$\rightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

$(*)$ $1 - \frac{x}{2} = \frac{2-x+1}{2}$ ...

$\rightarrow$ $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)^{(*)}$ en 0 car

$\lim\limits_{t\to 0}\left(t^{1-\frac{x}{2}}|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|\right) = \lim\limits_{t\to 0} |t^{x/2}(\ln t)^k e^{-t}| = 0$ par croissance comparée $(x>0)$.

$\rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ converge car $1-\frac{x}{2}<1$

Les points précédents et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^1 |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|dt$ et de $\int_1^{+\infty} |t^{x-1}(\ln t)^\ell e^{-t}|dt$. Ainsi $\int_0^{+\infty} |t^{x-1}(\ln t)^\ell e^{-t}|\,dt$ converge.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^\ell e^{-t}dt$ est absolument convergente.

b) et c) Dans une première étape, sous les hypothèses proposées nous allons établir que $\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t}dt$ est convergente.

Soit $t \in]0,+\infty[$. Posons $\forall \alpha \in [a,b]$, $u(\alpha) = t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t}$.

u est continue sur $[a,b]$. Donc $\max_{\alpha\in[a,b]} u(\alpha)$ existe.

$\alpha \mapsto (\alpha-1)\ln t$ est croissante sur $[a,b]$ si $\ln t \geqslant 0$ et décroissante si $\ln t \leqslant 0$.

Ainsi u est croissante sur $[a,b]$ si $t\geqslant 1$ et décroissante si $t \leqslant 1$.

Par conséquent $\max_{\alpha\in[a,b]} u(\alpha) = \begin{cases} u(b) \text{ si } t \geqslant 1 \\ u(a) \text{ si } t \leqslant 1 \end{cases}$.

Donc $\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1} = \max_{\alpha\in[a,b]} u(\alpha) = \begin{cases} t^{b-1} \text{ si } t \geqslant 1 \\ t^{a-1} \text{ si } t \leqslant 1 \end{cases}$.

Alors $\forall t \in]0,1]$, $(\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t} = (\ln t)^2\, t^{a-1} e^{-t}$ et

$\forall t \in [1,+\infty[$, $(\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t} = (\ln t)^2\, t^{b-1} e^{-t}$.

Or $\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}\,dt$ convergent car $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b\in\mathbb{R}_+^*$.

En particulier $\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}dt$ et $\int_1^{+\infty}(\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^1 (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t}\,dt$, et

$\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t}\,dt$.

Finalement 1° $\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t}\,dt$ converge.

c'est mieux que ça à coup !

2° $\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup t^{\alpha-1}) e^{-t}\,dt \boxed{=} \int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t}\,dt$.

Fixons t dans $]0,+\infty[$ et posons $\forall z\in[a,b]$, $u(z) = t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

u est de classe C^2 sur $[a,b]$, $\forall z\in[a,b]$, $u'(z) = (\ln t)\, e^{(z-1)\ln t} = (\ln t)\, t^{z-1}$ et

$\forall z\in[a,b]$, $u''(z) = (\ln t)^2 e^{(z-1)\ln t} = (\ln t)^2\, t^{z-1}$. Notons alors que :

$\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\, g_1(x_0) = \int_0^{+\infty} [t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t) t^{x_0-1}]\, e^{-t}\,dt$.

$\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\, g_1(x_0) = \int_0^{+\infty} (u(x) - u(x_0) - (x-x_0)\, u'(x_0))\, e^{-t}\,dt$ (... n'oublions pas que u dépend de t).

u étant C^2 sur $[a,b]$ et x, x_0 étant deux éléments de $[a,b]$ l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 donne : $|u(x) - u(x_0) - (x-x_0)\, u'(x_0)| \leq \frac{|x-x_0|^2}{2} \max_{\alpha\in[\overleftrightarrow{x_0,x}]} |u''(\alpha)|$

Or $\max_{\alpha\in[\overleftrightarrow{x_0,x}]} |u''(\alpha)| \leq \max_{\alpha\in[a,b]} |u''(\alpha)| = \max_{\alpha\in[a,b]} |(\ln t)^2 t^{\alpha-1}| = (\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} |t^{\alpha-1}| = (\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$.

Ainsi $|u(x) - u(x_0) - (x-x_0)\, u'(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1} = \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$.

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ tel que : $A\leq B$.

$\left|\int_A^B [t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t)\, t^{x_0-1}]\, e^{-t}\,dt\right| \leq \int_A^B |t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t) t^{x_0-1}|\, e^{-t}\,dt$

$\left|\int_A^B [t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t)\, t^{x_0-1}]\, e^{-t}\,dt\right| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_A^B (\ln t)^2 \sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\,dt$.

En faisant tendre A vers 0^+ et B vers $+\infty$ il vient :

$$\left|\int_0^{+\infty}\left[t^{x-1}-t^{x_0-1}-(x-x_0)(\ln t)\,t^{x_0-1}\right]e^{-t}\,dt\right| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 \sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$$ car

les deux intégrales convergent.

Ainsi $\quad |\Gamma(x)-\Gamma(x_0)-(x-x_0)g_1(x_0)| \leq \dfrac{(x-x_0)^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 \sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$

Comme x et x_0 sont distincts il vient en divisant par $|x-x_0|$:

$$\left|\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0}-g_1(x_0)\right| \leq \frac{|x-x_0|}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 \sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$$

$\displaystyle\lim_{x\mapsto x_0}\frac{|x-x_0|}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2 \sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt = 0$ donc par encadrement on obtient

$\displaystyle\lim_{x\mapsto x_0}\left(\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0}-g_1(x_0)\right)=0$ ou $\displaystyle\lim_{x\mapsto x_0}\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0}=g_1(x_0)$.

Ainsi Γ est dérivable en x_0 et $\Gamma'(x_0)=g_1(x_0)$.

d) Nous venons de montrer que si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}_+^*$ et si $x_0\in\,]a,b[$ alors Γ est dérivable en x_0 et $\Gamma'(x_0)=g_1(x_0)$. Montrons que Γ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma'=g_1$.

Soit $x_0\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $a=\frac{x_0}{2}$ et $b=\frac{3x_0}{2}$. $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}_+^*$ et $x_0\in\,]a,b[$ donc Γ est dérivable en x_0 et $\Gamma'(x_0)=g_1(x_0)$.

Finalement Γ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x_0\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma'(x_0)=g_1(x_0)$.

Ainsi Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x_0\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma'(x_0)=g_1(x_0)$.

(Q2) a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Soit $k \in [\![1,+\infty[\![$.

$t \mapsto \ln t$ est de classe C^1 sur $[k,k+1]$. Le théorème des accroissements finis

montre que : $\exists c_k \in]k,k+1[$, $\dfrac{\ln(k+1)-\ln k}{(k+1)-k} = \ln' c_k = \dfrac{1}{c_k}$.

$\dfrac{1}{c_k} \in]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}[$ donc $\dfrac{\ln(k+1)-\ln k}{(k+1)-k} \in]\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}[$.

Ainsi $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{\ln(k+1)-\ln(k)}{(k+1)-k} = \ln(k+1)-\ln k < \dfrac{1}{k}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1)-\ln k < \dfrac{1}{k}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln k) < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n - \ln 1 = \ln n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} > -\ln n > -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} > \gamma_n > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $1 > \gamma_n > \dfrac{1}{n}$; $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $1 > \gamma_n > 0$.

Notons que $\gamma_1 = 1$. Alors $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $1 \geq \gamma_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \gamma_n \leq 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\gamma_{n+1}-\gamma_n = -\ln(n+1) + \dfrac{1}{n+1} + \ln n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

d'après I 1. a) $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{n+1}$ car $\dfrac{1}{n+1} \in [0,1[$

donc $\gamma_{n+1}-\gamma_n \leq \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leq 0$. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Remarque .. $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n$ est la constante d'Euler.

(Q3) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] = \prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)}{n!}\,e^{-x\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

Or $e^{-x\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = e^{-x(\gamma_n+\ln n)} = e^{-x\gamma_n}e^{-x\ln n} = \dfrac{e^{-x\gamma_n}}{n^x}$.

Alors $\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] = \dfrac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)\right)e^{-x\gamma_n}}{n!\,n^x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] = e^{-x\gamma_n}\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)}{n^x\,n!} = e^{-x\gamma_n}\dfrac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x\,n!}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$v_n(x) = e^{-x\gamma_n}\dfrac{1}{x}\dfrac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x\,n!}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x) \neq 0$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x\gamma_n} = e^{-x\gamma}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = \dfrac{e^{-x\gamma}}{x\,\Gamma(x)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\ell(x) = \dfrac{e^{-x\gamma}}{x\,\Gamma(x)}$.

(Q4) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 \neq 0$.

Ainsi $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}$.

- $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}$;
- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2} \geqslant 0$;
- la série de terme général $\frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ converge et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}^*_+$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}^*_+$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] > 0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = \ln v_n(x)$.

$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \ell(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x\,\Gamma(x)} > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln v_n(x) = \ln \ell(x)$

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right] = \ln \ell(x)$; $-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = \ln \ell(x)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \ln \ell(x)$.

Remarque.. Nous retrouvons ainsi la convergence de la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+$ $-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \ln \ell(x) = \ln \frac{e^{-\gamma x}}{x\,\Gamma(x)} = -\gamma x - \ln x - \ln \Gamma(x)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\ln \Gamma(x) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$.

Q5 Notons que Γ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^*_+$. Comme $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, $x\mapsto \ln(\Gamma(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x\,\Gamma(x)) = \ln x + \ln\Gamma(x)$. En dérivant il vient : $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $1\times\psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x)$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

Nous avons vu que Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive.

ln étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x\,\psi(x) = x\,\psi(x+1) - 1$. $\lim_{x \to 0^+} \psi(x+1) = \psi(1)$ car ψ est continue en 1.

Ainsi $\lim_{x \to 0^+} (x\,\psi(x)) = -1 \neq 0$; $x\,\psi(x) \underset{0^+}{\sim} -1$; $\psi(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{\ell=1}^{n-1} (\psi(\ell+1) - \psi(\ell)) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell}$ donc $\psi(n) - \psi(1) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell}$

Par conséquent $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\psi(n) = \psi(1) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell}$.

Q6 a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = -\ln(\Gamma(x)) - \gamma x - \ln x$.

Nous avons vu plus haut que $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme il en est de même pour ln et $x \mapsto \gamma x$ on peut dire que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $A'(x) = -\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \frac{1}{x}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $A''(x) = -\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} + \frac{1}{x^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

b) $x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{x}{n} > 0$ et ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $x \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $x \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors U_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U_n'(x) = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{x}{n(n+x)}$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x}{n^2} \geqslant 0$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|U_n'(x)| = \dfrac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$
- La série de terme général $\frac{x}{n^2}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $|U_n'(x)|$ converge.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $U_n'(x)$ est absolument convergente (donc convergente).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U_n'(x) = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U_n''(x) = -(n+x)^{-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U_n'''(x) = 2(n+x)^{-3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U_n^{(4)}(x) = -2\times 3\,(n+x)^{-4}$.

Une récurrence simple montre alors que : $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $U_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(n+x)^k}$.

Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n^{(k)}(x)| \geqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|U_n^{(k)}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} (k-1)!\dfrac{1}{n^k}$.
- la série de terme général $(k-1)!\,\frac{1}{n^k}$ converge car $k \geqslant 2$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $|U_n^{(k)}(x)|$ converge.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente (donc convergente).

Finalement pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Q7 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right] = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x).$

En dérivant on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$

Alors $\psi(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = 1.$

Ainsi $\underline{\psi(1) = -\gamma}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = -\gamma + \left(\gamma_n + \ln n - \frac{1}{n}\right).$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \psi(n) - \ln n = \gamma_n - \gamma - \frac{1}{n}.$

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\psi(n) - \ln n\right) = 0$. ou $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n - \psi(n)\right) = 0$.

Q8 a) → $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ G(t) = \frac{1}{(t+x)^2} > 0$ | Dans cette question x est un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

→ $t \mapsto (t+x)^2$ est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc G est ~~strictement~~ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

→ • G est continue et positive sur $[1,+\infty[$;

• $G(t) = \frac{1}{(t+x)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$;

• $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$.

G est positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$ converge.

b) • $\forall t \in [1,+\infty[$, $G(t) > 0$ donc $\int_1^{+\infty} G(t)\,dt > 0$.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons H une primitive de G sur $\mathbb{R}_+^*$ (G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$...). H est dérivable sur $[k, k+1]$.

Le théorème des accroissements finis donne :

$\exists\, d_k \in]k, k+1[$, $\dfrac{H(k+1)-H(k)}{(k+1)-k} = H'(d_k) = G(d_k)$.

Ainsi $\int_k^{k+1} G(t)\,dt = H(k+1)-H(k) = \dfrac{H(k+1)-H(k)}{(k+1)-k} = G(d_k) < G(k)$

{ G est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de $d_k \in]k, k+1[$

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} G(t)\,dt < G(k)$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_1^{n+1} G(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} G(t)\,dt < \sum_{k=1}^{n} G(k)$ $(\bullet)$

G est continue, positive et (strictement) décroissante sur $[1,+\infty[$ donc la série de terme général $G(n)$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$; elle est donc convergente. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(\bullet)$ il vient :

$$\int_1^{+\infty} G(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} G(t)\,dt \underset{=}{\leq} \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).$$ Trop juste !!

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(G(k) - \int_k^{k+1} G(t)\,dt \right) \geq G(1) - \int_1^{2} G(t)\,dt > 0.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $G(k) - \int_k^{k+1} G(t)\,dt > 0$

Ainsi $\sum_{k=1}^{+\infty} G(k) - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} G(t)\,dt > 0$.

Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} G(k) > \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} G(t)\,dt = \int_1^{+\infty} G(t)\,dt$. $0 < \int_1^{+\infty} G(t)\,dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k)$.

Notons que : $\int_1^{+\infty} G(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{t+x}\right]_1^A = \frac{1}{x+1}$.

De plus $\sum_{\ell=1}^{+\infty} G(\ell) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ell+x)^2} = -\sum_{\ell=1}^{+\infty} U''_n(x) = -A''(x)$.

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -A''(x) > \frac{1}{x+1}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln \Gamma(x) = -\gamma x - \ln x - \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = -\gamma x - \ln x - A(x)$

En dérivant il vient : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} - A'(x)$. En dérivant une seconde fois on obtient : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) = \frac{1}{x^2} - A''(x)$

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) > \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) - \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2(x+1)}\left[x+1+x^2-x(x+1)\right] = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) > \frac{1}{x}$.

Partie III Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$.

Q1 → Supposons que L admette un maximum M sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$\exists (\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall (\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ L(\theta,r) \le L(\theta^*, r^*)$.

Alors $\forall(\theta,r)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $F(\theta,r) = \ln L(\theta,r) \le \ln L(\theta^*,r^*) = F(\theta^*,r^*)$

Ainsi F admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un maximum qui vaut $\ln M$ et qui est atteint en (θ^*, r^*)

→ Supposons que F admette un maximum C sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$\exists (\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall (\theta,r)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ F(\theta,r) \le F(\theta^*,r^*)$

Alors $\forall (\theta,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $L(\theta,r) = e^{F(\theta,r)} \le e^{F(\theta^*,r^*)} = L(\theta^*,r^*)$

Ainsi L admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un maximum qui vaut e^C et qui est atteint en (θ^*, r^*).

Donc la recherche du maximum L sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur cet ensemble.

(Q2) a) $\forall (\theta,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $F(\theta,r) = \sum_{i=1}^{p} \ln f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \ln\left(\frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} x_i^{r-1} e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right)$

$\forall (\theta,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $F(\theta,r) = -p \ln \Gamma(r) - p\, r \ln \theta + (r-1)\sum_{i=1}^{p} \ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{p} x_i$.

$(r,\theta) \to (r-1)\sum_{i=1}^{p} \ln x_i$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme fonction polynôme.

$(r,\theta) \to -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{p} x_i$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme fonction rationnelle.

$(r,\theta) \mapsto \theta$ est de classe C^2 et strictement positive sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$; ainsi $(r,\theta) \to \ln\theta$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
De plus $(r,\theta) \to p\,r$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme fonction polynôme.
Par produit $(r,\theta) \to -p\,r\ln\theta$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Donc $(r,\theta) \to -p\,r\ln\theta + (r-1)\sum_{i=1}^{p} \ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{p} x_i$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$
donc possède des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. (1)
Montrons qu'il en est de même pour $(r,\theta) \to -p\ln\Gamma(r)$; il suffit de prouver qu'il en est ainsi pour $(r,\theta) \to \ln\Gamma(r)$
$(r,\theta) \to r$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Comme $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

par composition $(r,\theta) \to \ln\Gamma(r)$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$; même chose pour $(r,\theta) \to -p\ln\Gamma(r)$ (2)

(1) et (2) permettent de dire que F admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

⚠ Il était préférable d'admettre également que Γ'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ... cela sera utile pour la suite.

$\forall (r,\theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial r}(\theta,r) = -p\dfrac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} - p\ln\theta + \sum_{i=1}^{p} \ln x_i$.

$\forall (r,\theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,r) = -pr\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{p} x_i$.

$\forall (r,\theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\theta,r) = -p\dfrac{\Gamma''(r)\Gamma(r) - (\Gamma'(r))^2}{(\Gamma(r))^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta,r) = pr\dfrac{1}{\theta^2} - \dfrac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{p} x_i$ et

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}(\theta,r) = -\dfrac{p}{\theta} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}(\theta,r)$.

b) Soit $(\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial r}(\theta^*,r^*) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta^*,r^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -p\dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} - p\ln\theta^* + \sum_{i=1}^{p}\ln x_i = 0 & (a) \\ -pr^*\dfrac{1}{\theta^*} + \dfrac{1}{\theta^{*2}}\sum_{i=1}^{p} x_i = 0 & (b) \end{cases}$$

$$(b) \overset{\theta^*\neq 0}{\Leftrightarrow} -pr^*\theta^* + \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Leftrightarrow r^*\theta^* = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i = \bar{x} \Leftrightarrow \theta^* = \frac{\bar{x}}{r^*} .$$

$$(a)\text{ et }(b) \Leftrightarrow \begin{cases} r^*\theta^* = \bar{x} \\ -p\dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} - p\ln\dfrac{\bar{x}}{r^*} + \sum_{i=1}^{p}\ln x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^*\theta^* = \bar{x} \\ \ln r^* - \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln\bar{x} - \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln x_i \end{cases}$$

$$\text{Finalement } \frac{\partial F}{\partial r}(\theta^*,r^*) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta^*,r^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln r^* - \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln\bar{x} - \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln x_i \\ \theta^* r^* = \bar{x} \end{cases}$$

Soit $(\theta^*, r^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, (θ^*, r^*) est un point critique de F si et seulement si

(θ^*, r^*) vérifie : (S)
$$\begin{cases} \theta^* r^* = \bar{x} & (1) \\ \ln r^* - \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln\bar{x} - \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln x_i & (2) \end{cases}$$

(Q3) a) $\varphi : x \mapsto \ln x - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

$\varphi'(1) = 0$, $\forall x \in]0,1[$, $\varphi'(x) > 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $\varphi'(x) < 0$.

φ étant continue sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ ceci permet de dire que

φ est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Alors $\forall x \in]0,1[$, $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$.

Ainsi $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi(x) = \ln x - x + 1 < 0$.

Donc $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\ln x < x - 1$.

$$K_p = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \ln x_i = \frac{1}{p}\left(p \ln \bar{x} - \sum_{i=1}^{p} \ln x_i\right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} (\ln \bar{x} - \ln x_i)$$

$$K_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \ln \frac{\bar{x}}{x_i} = -\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \ln \frac{x_i}{\bar{x}}.$$

$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\ln x < x - 1$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

Supposons que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\frac{x_i}{\bar{x}} = 1$. Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $x_i = \bar{x}$ et

$x_1, x_2, \dots, x_p$ sont tous égaux ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\frac{x_i}{\bar{x}} > 0$ et $\exists i_0 \in [\![1,p]\!]$, $\frac{x_{i_0}}{\bar{x}} \neq 1$.

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^{p} \ln \frac{x_i}{\bar{x}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \ln \frac{x_i}{\bar{x}} + \ln \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1\right) + \ln \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1\right) + \frac{x_{i_0}}{\bar{x}} - 1$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^{p} \ln \frac{x_i}{\bar{x}} < \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1\right) = \frac{1}{\bar{x}} \sum_{i=1}^{p} x_i - p = \frac{1}{\bar{x}} p \bar{x} - p = 0.$$

$\sum_{i=1}^{p} \ln \frac{x_i}{\bar{x}} < 0$ donc alors $K_p = -\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \ln \frac{x_i}{\bar{x}} > 0$.

$K_p > 0$.

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. h est alors ainsi que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{f''(y)f(y) - (f'(y))^2}{(f(y))^2} = \dfrac{1}{y} - \psi'(y) < 0$.

h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $h(y) = \ln y - \psi(y) - K_p$.

Rappelons que $\psi(y) \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{1}{y}$. donc $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} (y\,\psi(y)) = -1$.

$\lim\limits_{y \mapsto 0^+} (y\,h(y)) = \lim\limits_{y \mapsto 0^+} (y \ln y - y\,\psi(y) - y K_p) = 1$; $y\,h(y) \underset{0^+}{\sim} 1$; $h(y) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{y}$.

Alors $\lim\limits_{y \mapsto 0^+} h(y) = \lim\limits_{y \mapsto 0^+} \dfrac{1}{y} = +\infty$. $\lim\limits_{y \mapsto 0^+} h(y) = +\infty$.

h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h admet soit une limite finie en $+\infty$ soit pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

Supposons que h admette en $+\infty$ pour limite $-\infty$.

Alors $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} (\ln y - \psi(y) - K_p) = -\infty$ donc $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} (\ln y - \psi(y)) = -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\ln n - \psi(n)) = -\infty$ ceci contredit le résultat de II Q 7 qui nous a donné $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\ln n - \psi(n)) = 0$

Ainsi h admet une limite finie L en $+\infty$. Alors $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} (\ln y - \psi(y)) = L + K_p$.

Donc $0 = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\ln n - \psi(n)) = L + K_p$ donc $L = -K_p$. $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} h(y) = -K_p$

y	0	$+\infty$
$h'(y)$		$-$
$h(y)$	$+\infty$	$\searrow -K_p$

c) h est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -K_p$

Ainsi h définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-K_p,+\infty[$.

$K_p>0$ donc $-K_p<0$. Ainsi $0\in]-K_p,+\infty[$.

Alors $\exists!\, r^*\in \mathbb{R}_+^*$, $h(r^*)=0$ ou $\ln r^* - \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = K_p = \ln\bar{x} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln x_i$

L'équation (2) admet donc une solution et une seule : r^*. $r^* = h^{-1}(0)$.

Si r^* est la solution de (2), il existe un élément θ^* de $\mathbb{R}_+^*$ et un seul qui vérifie $\theta^* r^* = \bar{x}$: $\theta^* = \frac{\bar{x}}{r^*}$ $\quad (r^* = h^{-1}(0) > 0)$.

Le système d'équations (S) admet une solution (θ^*, r^*) et une seule.
$$\begin{cases} r^* = h^{-1}(0) \\ \text{et} \\ \theta^* = \dfrac{\bar{x}}{h^{-1}(0)} = \dfrac{\bar{x}}{r^*}\end{cases}$$

Conclusion... F admet un point critique et un seul qui n'est autre que (θ^*, r^*) avec $r^* = h^{-1}(0)$ et $\theta^* = \frac{\bar{x}}{h^{-1}(0)} = \frac{\bar{x}}{r^*}$

(Q4) Pour utiliser correctement les outils du programme nous admettons que Γ'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme nous l'avons dit plus haut cela permet d'affirmer que F est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(\theta^*, r^*) = p r^*\frac{1}{\theta^{*2}} - \frac{2}{\theta^{*3}}\sum_{i=1}^{p} x_i = p\,\frac{\bar{x}}{\theta^*}\,\frac{1}{\theta^{*2}} - \frac{2}{\theta^{*3}}\,p\bar{x} = -\frac{p\bar{x}}{(\theta^*)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\theta^*, r^*) = -p\,\frac{\Gamma''(r^*)\Gamma(r^*) - (\Gamma'(r^*))^2}{(\Gamma(r^*))^2} = -p\,\psi'(r^*).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}(\theta^*, r^*) = \frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}(\theta^*, r^*) = -\frac{p}{\theta^*}. \text{ Alors } \nabla^2 F(\theta^*, r^*) = \begin{pmatrix} -\dfrac{p\bar{x}}{(\theta^*)^3} & -\dfrac{p}{\theta^*} \\ -\dfrac{p}{\theta^*} & -p\,\psi'(r^*)\end{pmatrix}.$$

Rappelons que F est de classe C^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et que (θ^*, r^*) est le point critique. Pour savoir si F admet un extremum en ce point nous allons étudier le signe de "$\tilde{T} = rt - s^2$" (!!). ($\tilde{T}$ est une notation perso !)

$$\tilde{T} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta^*, r^*)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\theta^*, r^*) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(\theta^*, r^*)\right]^2 = \frac{p^2 \bar{x}\, \psi'(r^*)}{(\theta^*)^3} - \frac{p^2}{(\theta^*)^2}.$$

$$\tilde{T} = \frac{p^2}{(\theta^*)^3}\left[\bar{x}\psi'(r^*) - \theta^*\right] = \frac{p^2}{(\theta^*)^3}\left[\bar{x}\psi'(r^*) - \frac{\bar{x}}{r^*}\right] = \frac{p^2 \bar{x}}{(\theta^*)^3}\left[\psi'(r^*) - \frac{1}{r^*}\right]$$

Ainsi $\tilde{T} > 0$ car $p^2 > 0$, $\bar{x} > 0$, $(\theta^*)^3 > 0$ et $\psi(r^*) - \frac{1}{r^*} > 0$.

Alors F possède un extremum local en (θ^*, r^*).

$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\theta^*, r^*) = -\frac{p\bar{x}}{(\theta^*)^3} < 0$ ainsi F possède un maximum local en (θ^*, r^*).

PARTIE IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale centrée réduite

Q1 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ donc $\frac{X}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1^2)$. Posons $Y = \frac{X}{\sigma}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est une densité de Y.

Le cours et la longueur du texte nous autorise à dire que Y^2 est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction ψ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cours et la longueur du texte nous autorise encore à dire que $\frac{1}{2}Y^2$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $\hat{\psi} : x \mapsto 2\,\psi(2x)$.

Par parité donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{\psi}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi 2x}} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}$.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $\hat{\psi}(x) = 0$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(1/2)\, 1^{1/2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

ℓ est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre $1/2$.

Observons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \ell(x)$.

mieux $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(x) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \ell(x)$.

Alors $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x)\,dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(u)\,du = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \times 1 = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$.

donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\hat{\varphi} = \ell$. Ainsi $\frac{1}{2} Y^2 \hookrightarrow \gamma(1/2)$.

Finalement $\frac{X^2}{2\sigma^2} \hookrightarrow \gamma(1/2)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(Q2) a) $\frac{X_1^2}{2\sigma^2}, \frac{X_2^2}{2\sigma^2}, \dots, \frac{X_n^2}{2\sigma^2}$ sont n variables aléatoires indépendantes (car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes) qui suivent une loi $\Gamma(1, \frac{1}{2})$ (notation de l'énoncé...)

le cours montre alors que $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$ suit une loi $\Gamma(1, \frac{n}{2})$.

S_n suit une loi $\Gamma(1, \frac{n}{2})$.

b) $E(S_n) = 1 \times \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$. $\quad Y_n = \frac{1}{n} 2\sigma^2 S_n$.

donc $E(Y_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n} 2\sigma^2 E(S_n) = \sigma^2$.

$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

(Q3) a) $(\sqrt{Y_n})^2 = Y_n$ et $E(Y_n)$ existe donc $\sqrt{Y_n}$ possède un moment d'ordre 2.
Ainsi $\sqrt{Y_n}$ possède une espérance et une variance.

$V(\sqrt{Y_n}) > 0$ car $\sqrt{Y_n} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ n'est pas presque sûrement constante !

Alors $0 < V(\sqrt{Y_n}) = E(\sqrt{Y_n}^2) - (E(\sqrt{Y_n}))^2 = E(Y_n) - (E(\sqrt{Y_n}))^2 = \sigma^2 - (E(\sqrt{Y_n}))^2$

$(E(\sqrt{Y_n}))^2 < \sigma^2$ et $E(\sqrt{Y_n}) \geq 0$.

Alors $\underline{\underline{E(\sqrt{Y_n}) < \sigma}}$.

b) $\sqrt{Y_n} = \sqrt{\frac{1}{n} 2\sigma^2 S_n} = \sqrt{\frac{2}{n}}\, \sigma \sqrt{S_n}$. $E(\sqrt{S_n})$ existe car $E(\sqrt{Y_n})$ existe et

$E(\sqrt{Y_n}) = \sqrt{\frac{2}{n}}\, \sigma\, E(\sqrt{S_n})$. Calculons $E(\sqrt{S_n})$.

Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(k/2)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, g_k est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi $\Gamma(1, \frac{k}{2})$.

En particulier g_n est une densité de S_n.

S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de transfert indique alors que $E(\sqrt{S_n})$, qui existe, vaut

$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, g_n(t)\, dt$.

$$E(\sqrt{S_n}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(n/2)}\, dt = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\, dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\, dt = \frac{1}{\lambda_n}.$$

$E(\sqrt{S_n}) = \frac{1}{\lambda_n}$. Alors $\underline{\underline{E(\sqrt{Y_n}) = \sqrt{\frac{2}{n}}\, \sigma \frac{1}{\lambda_n}}}$.

c) $\hat{\sigma}_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}}\, \sqrt{Y_n}$.

Ainsi $E(\hat{\sigma}_n)$ existe car $E(\sqrt{Y_n})$ existe et vaut $\lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}}\, E(\sqrt{Y_n}) = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2}{n}}\, \sigma \frac{1}{\lambda_n} = \sigma$.

donc $E(\hat{\sigma}_n) = \sigma$. $\underline{\underline{\hat{\sigma}_n \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } \sigma}}$.

Q4 a) Nous avons déjà vu que $V(\sqrt{Y_n})$ existe et vaut $E(Y_n) - (E(\sqrt{Y_n}))^2$.

Comme $\widehat{\sigma}_n = \lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{Y_n}$, $V(\widehat{\sigma}_n)$ existe et vaut $\left(\lambda_n \sqrt{\frac{n}{2}}\right)^2 V(\sqrt{Y_n})$.

$V(\widehat{\sigma}_n) = \lambda_n^2 \frac{n}{2} \left[E(Y_n) - (E(\sqrt{Y_n}))^2 \right]$

$V(\widehat{\sigma}_n) = \lambda_n^2 \frac{n}{2} \left[\sigma^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\, \sigma \frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \right] = \lambda_n^2 \frac{n}{2} \sigma^2 - \lambda_n^2 \frac{n}{2} \, \frac{2}{n} \sigma^2 \frac{1}{\lambda_n^2}$.

$\underline{\underline{V(\widehat{\sigma}_n) = \frac{n}{2} \lambda_n^2 \sigma^2 - \sigma^2}}$

b) Rappelons que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$. Ainsi $\lambda_n^2 \sim \frac{2}{n}$ ou $\frac{n}{2}\lambda_n^2 \sim 1$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{2}\lambda_n^2\right) = 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\widehat{\sigma}_n) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq P(|\widehat{\sigma}_n - E(\widehat{\sigma}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\widehat{\sigma}_n)}{\varepsilon^2}$. ou $0 \leq P(|\widehat{\sigma}_n - \sigma| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\widehat{\sigma}_n)}{\varepsilon^2}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\widehat{\sigma}_n) = 0$: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|\widehat{\sigma}_n - \sigma| \geq \varepsilon) = 0$.

Alors $\underline{\underline{(\widehat{\sigma}_n)_{n \geq 1} \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à } \sigma}}$.

Déjà fait ?!