(A)

Q1. $\frac{g_1'}{g_1}$ est définie sur $]0,+\infty[-\{1\}$. $\forall x \in]0,+\infty[-\{1\}$, $\frac{g_1'}{g_1}(x) = \frac{-x^2\ln a + x(2+\ln a) - 1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \ln a$

$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$

x	0		1		$+\infty$
$(g_1'/g_1)'$	‖	$-$	‖	$-$	
g_1'/g_1	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$-\ln a$

les zéros de $\frac{g_1'}{g_1}$ sont : $u = \frac{2+\ln a - \sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a}$ et

$v = \frac{2+\ln a + \sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a}$ (résolution de $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $-x^2\ln a + x(2+\ln a) - 1 = 0$)

Remarque. Il n'est pas nécessaire de montrer que les 2 zéros de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $-x^2\ln a + x(2+\ln a) - 1 = 0$ sont dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ car il est clair que g_1'/g_1 s'annule exactement deux fois sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (continuité et stricte monotonie sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ ...)

Etude de g_1 : g_1 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. $g_1(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 0$

x	0		u		1		v		$+\infty$
$g_1'(x)/g_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$g_1(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g_1'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
g_1	0	$\searrow$	$\tilde{A}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\tilde{B}$	$\searrow$	0

$\tilde{A} = g(u)$ et $\tilde{B} = g(v)$

Branche infinie. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de g_1.

Q2 $u \simeq 0{,}41581$; $v \simeq 3{,}46958$ $(3{,}469377153)$.
$g(u) \simeq -0{,}18209$; $g(v) \simeq 0{,}77349$ $(0{,}7734858135)$.

(B)

Q1. Majoration de $|R_1(k,n)|$ et $|R_2(k,n)|$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $|R_1(k,n)| = \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|$. f est de classe C^2 sur $[-1,1]$, $\frac{k}{n} \in [-1,1]$, $\frac{k-\beta}{n} \in [-1,1]$ et $\frac{k-\beta}{n} \leq \frac{k}{n}$. $\exists \alpha_k \in \left[\frac{k-\beta}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k-\beta}{n} - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{k-\beta}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 f''(\alpha_k)$ (T.L.)

$|R_1(k,n)| = \left|-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\beta}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 f''(\alpha_k)\right| = \frac{1}{2n^2}\beta^2 |f''(\alpha_k)| \leq \frac{\beta^2}{2n^2} \sup_{x\in[-1,1]} |f''(x)| \leq \frac{\beta^2}{2n^2} M = \frac{A}{n^2}$ en posant : $A = \frac{M\beta^2}{2}$.

Soit F une primitive de f sur $[-1,1]$. $R_2(k,n) = F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right)$. F est de classe C^3 sur $[-1,1]$, $\frac{k}{n} \in [-1,1]$, $\frac{k-1}{n} \in [-1,1]$ et $\frac{k}{n} > \frac{k-1}{n}$.

$\exists \beta_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$, $F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{\left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right)}_{-1/n} F'\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2}_{1/2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{\frac{1}{6}\left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right)^3}_{-1/6n^3} F'''(\beta_k)$ (T.L.)

$|R_2(k,n)| = \left|\frac{1}{6n^3} F'''(\beta_k)\right| = \frac{1}{6n^3} |f''(\beta_k)| \leq \frac{M}{6n^3}$

$|R_2(k,n)| \leq \frac{B}{n^3}$ avec $B = M/6$.

Q2. Majoration de $|R_3(k,n)|$

$R_3(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}\left(f(k/n) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = R_2(k,n) + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - 1/2}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

$R_3(k,n) = R_2(k,n) + \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{\beta}{n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\beta - 1/2}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

$R_3(k,n) = R_2(k,n) + \frac{1}{n} R_1(k,n) + \frac{\beta - 1/2}{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right]$

$\exists \gamma_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$, $f\left(\frac{k-1}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 f''(\gamma_k)$.

$R_3(k,n) = R_2(k,n) + \frac{1}{n} R_1(k,n) + \frac{\beta - 1/2}{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 f''(\gamma_k)\right) = R_2(k,n) + \frac{1}{n} R_1(k,n) + \frac{\beta - 1/2}{2n^3} f''(\gamma_k)$

$|R_3(k,n)| \leq |R_2(k,n)| + \frac{1}{n}|R_1(k,n)| + \frac{|\beta - 1/2|}{2n^3} |f''(\gamma_k)| \leq \frac{B}{n^3} + \frac{1}{n}\frac{A}{n^2} + \frac{|\beta - 1/2| M}{2}\frac{1}{n^3} = \frac{C}{n^3}$ avec $C = B + A + \frac{|\beta - 1/2| M}{2}$.

Majoration de Δ_n.

$$\Delta_n = \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt}^{\int_0^1 f(t)dt} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta-1/2}{n} \overbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)}^{f(1)-f(0)}$$

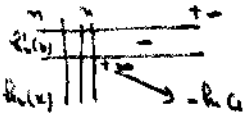
$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} R_3(k,n) \,.\quad |\Delta_n| \leq \sum |R_3(k,n)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{n^3} = \frac{c}{n^2}\,.$$

Ⓒ Q1.. $\to$ Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $P = \lambda \prod_{i=0}^{n} (X - a_i)$: $\forall x \in \mathbb{R} - \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{x-a_i}$

Rappel incontournable.

Pour $P_n(X) = X(X-1)\cdots(X-n)$. $\forall x \in]n,+\infty[$, $h_n(x) = \dfrac{P_n'(x)a^{-x} - \ln a\, P_n(x)a^{-x}}{P_n(x)a^{-x}} = \dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} - \ln a = \sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{x-i} - \ln a$

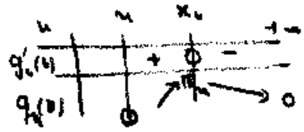
h_n est dérivable sur $]n,+\infty[$ et $\forall x \in]n,+\infty[$, $h_n'(x) = -\sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{(x-i)^2} < 0$.



Un raisonnement classique montre que h_n s'annule une fois et une seule sur $]n,+\infty[$; en x_n.
(continuité + st. monotonie + $0 \in]-\ln a, +\infty[$ ...)

$\forall x \in]n,+\infty[$, $g_n'(x) = h_n(x) \times g_n(x)$ et $g_n(x) > 0$.

ii.. g_n' s'annule une fois et une seule sur $]n,+\infty[$ en x_n (zéro de h_n).
$\forall x \in]n, x_n[$, $g_n'(x) > 0$ et $\forall x \in]x_n,+\infty[$, $g_n'(x) < 0$.



$\alpha = \dfrac{a}{a-1} > 1$!

Q2.. $h_n(n\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{n\alpha - i} - \ln a = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f_\alpha\left(\dfrac{i}{n}\right) - \ln a = \dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_\alpha\left(\dfrac{i}{n}\right) - \ln a$

$h_n(n\alpha) = \dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\dfrac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt \iff \ln a = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt = \int_0^1 \dfrac{1}{\alpha - t}\,dt = -\ln\left|\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right| \iff a = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$

$\Delta_n = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt - \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\dfrac{k-\beta}{n}\right) - \dfrac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)\right)$ et $h_n(n\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n\alpha+\beta-k} - \ln(a) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f_\alpha\left(\dfrac{k-\beta}{n}\right) - \ln a$

En additionnant: $\Delta_n + h_n(n\alpha+\beta) = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} - \dfrac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)\right) - \ln a$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que : $\ln a = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$. $\Delta_n + h_n(n\alpha+\beta) = \dfrac{1}{n\alpha+\beta} - \dfrac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)\right)$

donc $h_n(n\alpha+\beta) = \dfrac{1}{n\alpha+\beta} - \dfrac{\beta-1/2}{n}\left(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)\right) - \Delta_n$ $\qquad \left|\dfrac{\Delta_n}{n}\right| \leq \dfrac{c}{n}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(n\, h_n(n\alpha+\beta)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n\alpha+\beta} - (\beta - 1/2)\left(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)\right) - \dfrac{\Delta_n}{n}\right) = \dfrac{1}{\alpha} - (\beta - 1/2)\left(\dfrac{1}{\alpha-1} - \dfrac{1}{\alpha-0}\right) - 0 = \dfrac{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}{\alpha(\alpha-1)}$.

Q3.. x_n est le zéro de h_n sur $]n,+\infty[$. Pour avoir $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$ il suffit d'avoir
$h_n(n\alpha) \times h_n(n\alpha+\alpha) \leq 0$ (Voir les propriétés de h_n ... Q1)

$\lim_{n\to+\infty} n\, h_n(n\alpha+\beta) = \dfrac{\alpha-\beta-1/2}{\alpha(\alpha-1)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\, h_n(n\alpha) = \dfrac{\alpha - 1/2}{\alpha(\alpha-1)} > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n\, h_n(n\alpha+\alpha) = \dfrac{-1/2}{\alpha(\alpha-1)} < 0$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 h_n(n\alpha)\, h_n(n\alpha+\alpha)\right) < 0$. $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow n^2 h_n(n\alpha)\, h_n(n\alpha+\alpha) < 0 \Rightarrow h_n(n\alpha)\, h_n(n\alpha+\alpha) < 0$.

$\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow n\alpha < x_n < (n+1)\alpha$ ... cqfd (et mieux !)

Q4 a.. Encadrement de y_n.
et b

$y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\dfrac{x_n}{n} - \dfrac{k}{n}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$ (voir plus haut).

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha - \dfrac{k}{n} \leq \dfrac{x_n}{n} - \dfrac{k}{n} \leq \alpha + \dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{k}{n} = \alpha - \left(\dfrac{k-\alpha}{n}\right)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\ln\left(\alpha - \dfrac{k}{n}\right) \leq \ln\left(\dfrac{x_n}{n} - \dfrac{k}{n}\right) \leq \ln\left(\alpha - \dfrac{k-\alpha}{n}\right)$

Considérons : $f : x \mapsto \ln(\alpha - x)$. fait de classe C^2 sur $[-1,1]$ $(\alpha > 1)$

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{x_n}{n} - \frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\alpha - \frac{k-\alpha}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq y_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k-\alpha}{n}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$

8. Q2 avec $\beta = 0$ donne : $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\Delta_n + \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{2n}\left(f(1) - f(0)\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f(0) = 0\right)$

8. Q2 avec $\beta = \alpha$ permet de la même manière de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k-\alpha}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \ln(\alpha - t)\,dt = \Big[(t-\alpha)\ln(\alpha - t) - t\Big]_0^1 = \underline{\underline{(1-\alpha)\ln(\alpha-1) - 1 + \alpha\ln\alpha}}$

$\Pi_n = f_n(x_n) = x_n(x_n - 1)\cdots(x_n - n)\,a^{-x_n}$. Posons $z_n = \frac{1}{n}(\Pi_n)^{1/n}$

$\ln z_n = -\ln n + \frac{1}{n}\ln \Pi_n = -\ln n + \frac{1}{n}\ln\left(x_n(x_n-1)\cdots(x_n-n)\,a^{-x_n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(x_n - k)\right) - \ln n - \frac{x_n}{n}\ln a$

$\ln z_n = \frac{1}{n}\ln \prod\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{x_n - k}{n}\right) + \frac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n} n\right) - \ln n - \frac{x_n}{n}\ln a = y_n + \frac{1}{n}\ln n^{n+1} - \ln n - \frac{x_n}{n}\ln a$

$\ln z_n = y_n + \left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\ln n - \frac{x_n}{n}\ln a = y_n + \frac{\ln n}{n} - \frac{x_n}{n}\ln a$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$ (à partir d'un certain rang : $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(z_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(y_n) - \alpha\ln a = (1-\alpha)\ln(\alpha-1) - 1 + \alpha\ln\alpha - \alpha\ln a \underset{\alpha = \frac{a}{a-1}}{=} -\ln(a-1) - 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = e^{-\ln(a-1) - 1} = \frac{1}{(a-1)e}$.