PARTIE I : étude du nombre T_n d'involutions de E

Q1.. * $E=\{a\}$; $\underline{T_1=1}$ (il y a une seule application de E dans E : Id_E qui est une involution)

* $E=\{a,b\}$ il y a deux bijections de E dans E : Id_E et celle qui transforme a en b et b en a ; ce sont deux involutions ; $\underline{T_2=2}$.

* $E=\{a,b,c\}$ il y a six bijections de E dans E :

$f_1=Id_E$ qui est une involution ; f_2 qui laisse fixe a et qui échange b et c : c'est une involution ; f_3 qui laisse fixe b et qui échange a et c : c'est une involution ; f_4 qui laisse fixe c et qui échange a et b : c'est une involution ; f_5 qui transforme a en b, b en c et c en a : ce n'est pas une involution ; $f_6=f_5^{-1}$: qui n'est pas une involution.

En clair $\underline{T_3=4}$.

Q2 a) - le nombre des involutions s de $[1,n]$ telles que $s(n)=n$ est T_{n-1}, en effet une telle involution est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1,n-1]\!]$ que l'on peut assimiler à une involution de $[1,n-1]$.

- Notons que si s est une involution de $[1,n]$ telle que $s(n)=k$ alors $s(k)=n$. Une telle application est donc entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1,n]\!]-\{n,k\}$ que l'on peut considérer comme une involution de $[1,n]-\{n,k\}$; par conséquent $\underline{\text{il y a } T_{n-2}}$ involutions de $[1,n]$ qui transforment n en k

b) Notons $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des involutions de $[1,n]$ et pour tout $k\in[1,n]$, $\mathcal{I}_n^k$ l'ensemble des involutions de $[1,n]$ transformant n en k.

$\mathcal{I}_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{I}_n^k$; cette réunion étant disjointe : $T_n=\text{card}\,\mathcal{I}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\text{card}\,\mathcal{I}_n^k$

Rappelons que : $\text{card}\,\mathcal{I}_n^n=T_{n-1}$ et $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\text{card}\,\mathcal{I}_n^k=T_{n-2}$.

Par conséquent $T_n=\text{card}\,\mathcal{I}_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\text{card}\,\mathcal{I}_n^k+\text{card}\,\mathcal{I}_n^n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}T_{n-2}+T_{n-1}=(n-1)T_{n-2}+T_{n-1}$

Donc $\underline{T_n=(n-1)T_{n-2}+T_{n-1}}$ et ceci pour tout $n\in[\![3,+\infty[\![$.

CASIO 7000G
```
?→P:1→A◢
2→B◢
2→N:Lbl 0:NA+B→C◢
ISZ N :B→A:C→B:N<P ⇒ Goto 0:"END"
```

$T_1=1$	$T_6=76$
$T_2=2$	$T_7=232$
$T_3=4$	$T_8=764$
$T_4=10$	$T_9=2620$
$T_5=26$	$T_{10}=9496$

Voir à la fin en TP4.

PARTIE II : interprétation de T_n

Que cela est mal fait ! 1.. On ne définit H_n que pour $n \geq 1$ et on parle de H_0

2.. On ne montre pas que u est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

3.. On ne prouve pas l'existence et l'unicité de H_n.

Mettons les choses au clair et montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\exists !\, H_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = H_n(x)\,u(x)$.

- u est 0 fois dérivable et $\exists !\, H_0 \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u^{(0)}(x) = H_0(x)\,u(x)$ ($H_0 = 1$!)
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

u est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exists !\, H_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = H_n(x)\,u(x)$.

$u^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables ; u est donc $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n+1)}(x) = (u^{(n)})'(x) = H_n'(x)u(x) + H_n(x)u'(x) = H_n'(x)u(x) + H_n(x)\,x\,u(x) = (H_n'(x) + xH_n(x))\,u(x)$.

Posons $H_{n+1} = H_n' + XH_n$. $H_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n+1)}(x) = H_{n+1}(x)\,u(x)$. H_{n+1} est nécessairement unique car $\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n+1)}(x) = H_{n+1}(x)u(x) \Leftrightarrow H_{n+1}(x) = \dfrac{u^{(n+1)}(x)}{u(x)}$. Ceci achève la récurrence.

Nous pouvons maintenant commencer à travailler.

Q1 a) $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = e^{x^2/2}$; $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = x\,e^{x^2/2}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = x\,u(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Dérivons n fois l'égalité précédente en posant $w : x \mapsto x$ et en appliquant la formule de Leibniz.

$u' = wu$; $u^{(n)} = (u')^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\, w^{(k)}\, u^{(n-1-k)}$. $w^{(0)} = w$; $w^{(1)} = 1$ et $w^{(k)} = 0$ pour $k \geq 2$

Par conséquent : $u^{(n)} = C_{n-1}^{0} w^{(0)} u^{(n-1)} + C_{n-1}^{1} w^{(1)} u^{(n-2)} = w\,u^{(n-1)} + (n-1)\,1\,u^{(n-2)}$

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = x\,u^{(n-1)}(x) + (n-1)\,u^{(n-2)}(x)}$ et ceci pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ H_0(x) = 1$ $\quad (u = 1 \times u)$ $\quad$; $H_0 = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = x$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = x\,u(x))$ $\quad$; $H_1 = X$.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x)u(x) = u^{(n)}(x) = x\,u^{(n-1)}(x) + (n-1)\,u^{(n-2)}(x) = x\,H_{n-1}(x)\,u(x) + (n-1) \times H_{n-2}(x)\,u(x)$

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = x\,H_{n-1}(x) + (n-1)\,H_{n-2}(x)}$

(Par conséquent : $\underline{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ H_n = XH_{n-1} + (n-1)H_{n-2}}$.)

c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme (… c'est déjà fait), de degré n, ayant la même parité que n (c'est à dire $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$) et positif sur $\mathbb{R}_+$ à l'aide d'une récurrence d'ordre 2.

- Cela est clair pour $n=0$ et $n=1$ car $H_0 = 1$ et $H_1 = X$.
- Supposons la propriété vraie pour $n-2$ et $n-1$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$) et montrons-la pour n.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) = x H_{n-1}(x) + (n-1) H_{n-2}$ donc H_n est polynômiale comme produit et somme de fonctions polynômiales, nous pouvons écrire maintenant : $H_n = X H_{n-1} + (n-1) H_{n-2}$.

$\deg(X H_{n-1}) = 1 + (n-1) = n$ et $\deg (n-1) H_{n-2} = n-2$

donc $\deg (X H_{n-1} + (n-1) H_{n-2}) = n$; $\underline{\deg H_n = n}$.

$H_n(-X) = (-X) H_{n-1}(-X) + (n-1) H_{n-2}(-X) = -X(-1)^{n-1} H_{n-1}(X) + (n-1)(-1)^{n-2} H_{n-2}(X)$

$H_n(-X) \underset{\substack{\uparrow \\ (-1)^{n-2} = (-1)^n}}{=} (-1)^n X H_{n-1}(X) + (-1)^n (n-1) H_{n-2}(X)$; $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$; $\underline{H_n \text{ a la parité de } n}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $H_n(x) = x H_{n-1}(x) + (n-1) H_{n-2}(x) \underset{\substack{\downarrow \\ H_{n-1}(x) \geq 0,\ n-1 \geq 0,\ H_{n-2}(x) \geq 0}}{\geq} 0$; $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+, H_n(x) \geq 0}$. ceci achève la récurrence.

d) Remarquons que : $H_2 = X H_1 + (2-1) H_0 = X^2 + 1$

et que : $\begin{cases} H_1(1) = 1 = T_1, \quad H_2(1) = 2 = T_2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \Rightarrow H_n(1) = H_{n-1}(1) + (n-1) H_{n-2}(1) \text{ et } T_n = T_{n-1} + (n-1) T_{n-2} \end{cases}$

Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(1) = T_n$

- C'est clair pour $n = 1$ et 2
- Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et $n-2$ ($n \geq 3$) et montrons-la pour n.

$H_n(1) = H_{n-1}(1) + (n-1) H_{n-2}(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HR}}}{=} T_{n-1} + (n-1) T_{n-2} = T_n$. ceci achève la récurrence.

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = H_n(1)}}$.

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u^{(n)}(x) = H_n(x) u(x)$. $\quad \overbrace{u'(x)}$ ↓ c'est du déjà fait … au départ

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u^{(n+1)}(x) = H_n'(x) u(x) + H_n(x) \underbrace{x u(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) u(x) = H_n'(x) u(x) + H_n(x) x u(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = H_n'(x) + x H_n(x)$.

$\underline{\underline{H_{n+1} = H_n' + X H_n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H_{n+1} = H'_n + XH_n$ et $H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$

donc $H_{n+1} - XH_n = H'_n$ et $H_{n+1} - XH_n = nH_{n-1}$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{H'_n = nH_{n-1}}$.

b) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $H_n = XH_{n-1} + (n-1)H_{n-2}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\underline{H_n(0) = (n-1)H_{n-2}(0)}$.

Observons. $H_2(0) = H_0(0) = 1$; $H_3(0) = 2H_1(0) = 0$; $H_4(0) = 3H_2(0) = 3$; $H_5(0) = 4H_3(0) = 0$; $H_6(0) = 5H_4(0) = 5\times 3$

abusif pour $p=0$

Il semble donc que $\forall p \in \mathbb{N}$, $H_{2p}(0) = (2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 1 = \dfrac{(2p)!}{(2p)(2p-2)\cdots(4)(2)} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$ et $H_{2p+1}(0) = 0$

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$ et $H_{2p+1}(0) = 0$.

- C'est clair pour $p=0$ $\left(H_0(0) = 1 = \dfrac{(2\times 0)!}{2^0\times 0!}\right.$ et $\left.H_1(0) = 0\right)$.

- Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$H_{2p+2}(0) = (2p+1)H_{2p}(0) = \dfrac{(2p+1)(2p)!}{2^p p!} = \dfrac{(2p+2)!}{(2p+2)2^p p!} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{p+1}(p+1)!}$

$H_{2p+3}(0) = (2p+2)H_{2p+1}(0) = 0$. ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}}}$ et $\underline{\underline{H_{2p+1}(0) = 0}}$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $H_{n+1} = H'_n + XH_n$ (Q2 a))

En dérivant : $H'_{n+1} = H''_n + H_n + XH'_n$.

Or $H'_{n+1} = (n+1)H_n$ ((4))

Donc $(n+1)H_n = H''_n + H_n + XH'_n$

Ce qui donne : $\underline{\underline{H''_n + XH'_n - nH_n = 0}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $H_n(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $U_n(x) = H_n(x)e^{x^2/4} \geq 0$.

U_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $U'_n(x) = H'_n(x)e^{x^2/4} + H_n(x)\dfrac{x}{2}e^{x^2/4}$

Si $n=0$: $H'_n = 0$ et si $n \geq 1$: $H'_n = nH_{n-1}$; dans les deux cas H'_n est positive sur $\mathbb{R}_+$;

donc U'_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ U_n(x) \geq 0$ et $U'_n(x) \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n(0) = H_n(0)$ et $U'_n(0) = H'_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n H_{n-1}(0) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

donc $\forall p \in \mathbb{N},\ U_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$ et $U_{2p+1}(0) = 0$.

$\forall p \in \mathbb{N},\ U'_{2p}(0) = 0$ et $U'_{2p+1}(0) = (2p+1)\dfrac{(2p)!}{2^p\, p!} = \dfrac{(2p+1)!}{2^p\, p!}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. $U'_n(x) = H'_n(x) e^{x^2/4} + H_n(x) \frac{x}{2} e^{x^2/4}$

$U''_n(x) = H''_n(x) e^{x^2/4} + H'_n(x) \frac{x}{2} e^{x^2/4} + H'_n(x) \frac{x}{2} e^{x^2/4} + H_n(x) \frac{1}{2} e^{x^2/4} + H_n(x) \frac{x^2}{4} e^{x^2/4}$

$U''_n(x) = \left(H''_n(x) + H'_n(x)\,x + \frac{1}{2} H_n(x) + \frac{x^2}{4} H_n(x)\right) e^{x^2/4} \underset{\uparrow}{=} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right) H_n(x) e^{x^2/4}$

$H''_n + X H'_n - n H_n = 0$ (Q1a))

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ U''_n(x) = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right) U_n(x)$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. $\left(n + \frac{1}{2}\right) \leq n + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} \leq n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = n + \frac{3}{4}$ et $U_n(x) \geq 0$ donc

$$\left(n + \tfrac{1}{2}\right) U_n(x) \leq U''_n(x) \leq \left(n + \tfrac{3}{4}\right) U_n(x)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ \left(n + \frac{1}{2}\right) U_n(x) \leq U''_n(x) \leq \left(n + \frac{3}{4}\right) U_n(x)$. (5)

PARTIE III : recherche d'un équivalent de T_n

Q1a) φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = \lambda\beta e^{\beta x} - \mu\beta e^{-\beta x}$

$\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = a$ et $\lambda\beta - \mu\beta = 0 \underset{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \lambda + \mu = a$ et $\lambda = \mu \Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{a}{2}$.

$\forall x \in [0,1],\ \varphi(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)$ $(= a \operatorname{ch} \beta x)$; $\forall x \in [0,1],\ \varphi(x) > 0$

$\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = \frac{a}{2}\left(\beta e^{\beta x} - \beta e^{-\beta x}\right) = \frac{\beta a}{2}\left(e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right) > 0$.

$\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = \frac{\beta a}{2}\sqrt{\left(e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right)^2} = \frac{\beta a}{2}\sqrt{\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)^2 - 4} = \frac{\beta a}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{a}\varphi(x)\right)^2 - 4}$

$\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = \frac{\beta a}{2}\sqrt{\frac{4}{a^2}\varphi^2(x) - 4} = \beta\sqrt{\varphi(x)^2 - a^2}$. $\quad \varphi' = \beta\sqrt{\varphi^2 - a^2}$

Remarque.. Notons que $\varphi'' = \beta^2 \varphi$ ... φ' a fonction de φ est certainement un "lapsus" ...

voir b)

b) $\omega = f\varphi' - \varphi f'$; $\omega(0) = f(0)\varphi'(0) - \varphi(0)f'(0) = 0$; $\underline{\underline{\omega(0)=0}}$.

ω est dérivable sur $[0,1]$ car f, φ', φ et f' le sont

$\omega' = f'\varphi' + f\varphi'' - \varphi' f' - \varphi f'' = f\varphi'' - \varphi f'' = f\beta^2\varphi - \varphi f'' = \varphi(\beta^2 f - f'')$.

$\forall x \in [0,1]$, $\omega'(x) = \varphi(x)(\beta^2 f(x) - f''(x)) \geqslant 0$ car $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \leqslant \beta^2 f(x)$.

$\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ \omega'(x) \geqslant 0}}$; donc ω est croissante sur $[0,1]$ et $\omega(0)=0$. Par conséquent :

$\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ \omega(x) \geqslant 0}}$.

c) $\forall x \in [0,1]$, $f(x)\varphi'(x) - \varphi(x)f'(x) \geqslant 0$ et $f(x) > 0$

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\left(\dfrac{\varphi}{f}\right)'(x) = \dfrac{\varphi'(x)f(x) - \varphi(x)f'(x)}{(f(x))^2} \geqslant 0$; $\dfrac{\varphi}{f}$ est donc croissante sur $[0,1]$.

De plus $\left(\dfrac{\varphi}{f}\right)(0) = \dfrac{\varphi(0)}{f(0)} = \dfrac{a}{a} = 1$. On a donc : $\forall x \in [0,1]$, $\left(\dfrac{\varphi}{f}\right)(x) \geqslant 1$

soit $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(x) \geqslant f(x)$ (car f est strictement positive sur $[0,1]$).

$\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant \varphi(x)}}$.

d) $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant \varphi(x) = \dfrac{a}{2}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \underset{\downarrow}{\overset{a \geqslant 0 \text{ et } \beta > 0}{\leqslant}} \dfrac{a}{2}(e^{\beta x} + 1)$.

$\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant \dfrac{a}{2}(e^{\beta x} + 1).}}$ (7)

e) On prend les mêmes et on recommence ! Posons $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) = \dfrac{a}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$.

$\psi(0) = a$; ψ est dérivable sur $[0,1]$; $\psi'(0) = 0$.

ψ est strictement positive sur $[0,1]$, ψ'' existe et vaut $\alpha^2\psi$.

Posons $\widehat{\omega} = f\psi' - \psi f'$. $\widehat{\omega}(0) = 0$, $\widehat{\omega}$ est dérivable sur $[0,1]$ et $\widehat{\omega}' = f\psi'' - \psi f''$

$\widehat{\omega}' = f\alpha^2\psi - \psi f'' = \psi(\alpha^2 f - f'')$.

$\forall x \in [0,1]$ $\widehat{\omega}'(x) \leqslant 0$ car $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) \geqslant 0$ et $\alpha^2 f(x) \leqslant f''(x)$.

Ainsi $\widehat{\omega}$ est décroissante sur $[0,1]$ et $\widehat{\omega}(0)=0$, donc $\forall x \in [0,1]$, $\widehat{\omega}(x) \leqslant 0$.

Ceci donne : $\forall x \in [0,1]$, $f(x)\psi'(x) - \psi(x)f'(x) \leqslant 0$

Et encore : $\forall x \in [0,1]$, $\left(\dfrac{\psi}{f}\right)'(x) = \dfrac{f(x)\psi'(x) - \psi(x)f'(x)}{f^2(x)} \leqslant 0$. $\dfrac{\psi}{f}$ est décroissante sur

$[0,1]$ et $\left(\dfrac{\psi}{f}\right)(0) = \dfrac{\psi(0)}{f(0)} = \dfrac{a}{a} = 1$.

Par conséquent : $\forall x \in [0,1]$, $\left(\dfrac{\psi}{f}\right)(x) \leqslant 1$. $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) \leqslant f(x)$.

Ceci donc : $\forall x\in[0,1]$, $f(x)\geqslant \frac{a}{2}(e^{\alpha x}+e^{-\alpha x})\geqslant \frac{a}{2}e^{\alpha x}$.

$\forall x\in[0,1]$, $\frac{a}{2}e^{\alpha x}\leqslant f(x)$.

Q2.. a) Rappelons la relation (5).

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,1],\ (n+\tfrac12)U_n(x)\leqslant U_n''(x)\leqslant(n+\tfrac34)U_n(x).$$

Nous avons encore : $\forall x\in[0,1]$, $U_n(x)=H_n(x)\,e^{x^2/4}$.

Soit $p\in\mathbb{N}$. Posons $f=U_{2p}$, $\alpha=\alpha_{2p}=\sqrt{2p+\frac12}$, $\beta=\beta_{2p}=\sqrt{2p+\frac34}$

$\forall x\in[0,1]$, $\alpha^2 f(x)\leqslant f''(x)\leqslant\beta^2 f(x)$. Nous avons vu de plus que $f=U_{2p}$ était croissante sur $[0,1]$ et que $f(0)=U_{2p}(0)=\frac{(2p)!}{2^p p!}>0$; donc $\forall x\in[0,1]$, $f(x)>0$. De plus $f'(0)=U'_{2p}(0)=0$.
Il ne reste plus qu'à poser $a=f(0)=H_{2p}(0)$ et nous pouvons alors appliquer III Q1

(toutes les hypothèses sont vérifiées car il est clair que $f=U_{2p}$ est de classe C^2 comme produit de deux fonctions de classe C^2).

Donc $\forall x\in[0,1]$, $\frac{a}{2}e^{\alpha x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{a}{2}(e^{\beta x}+1)$

Soit $\forall x\in[0,1]$, $\frac{H_{2p}(0)}{2}e^{\alpha_{2p}x}\leqslant U_{2p}(x)=H_{2p}(x)e^{\frac{x^2}{4}}\leqslant\frac{H_{2p}(0)}{2}(e^{\beta_{2p}x}+1)$

Soit pour $x=1$: $H_{2p}(0)\frac{e^{\alpha_{2p}}}{2}\leqslant H_{2p}(1)e^{1/4}\leqslant H_{2p}(0)\frac{e^{\beta_{2p}}+1}{2}$

b) Prouvons que $T_{2p}\sim\frac{1}{\sqrt2}e^{-1/4}e^{\sqrt{2p}}\left(\frac{2p}{e}\right)^p$.

Soit à prouver que $H_{2p}(1)\sim\frac{1}{\sqrt2}e^{-1/4}e^{\sqrt{2p}}\left(\frac{2p}{e}\right)^p$.

$$H_{2p}(0)=\frac{(2p)!}{2^p p!}\sim\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2\pi\, 2p}\times\frac{1}{2^p}\times\frac{1}{\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt{2\pi p}}=\frac{2^{2p}}{2^p}\left(\frac{p}{e}\right)^{2p-p}\sqrt2=2^p\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt2$$

$H_{2p}(0)\sim\sqrt2\left(\frac{2p}{e}\right)^p$. Divisons les inégalités de Q2 a) par $\frac{1}{\sqrt2}e^{\sqrt{2p}}\left(\frac{2p}{e}\right)^p$

Il vient :

$$\frac{H_{2p}(0)}{\sqrt2\left(\frac{2p}{e}\right)^p}\,e^{\alpha_{2p}-\sqrt{2p}}\leqslant\frac{H_{2p}(1)\,e^{1/4}}{\frac{1}{\sqrt2}e^{\sqrt{2p}}\left(\frac{2p}{e}\right)^p}\leqslant\frac{H_{2p}(0)}{\sqrt2\left(\frac{2p}{e}\right)^p}\,e^{-\sqrt{2p}}\left(e^{\beta_{2p}}+1\right)$$

Notons déjà que : $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} \dfrac{H_{2p}(0)}{\sqrt{2}\,(\frac{2p}{e})^p} = 1$. Notons aussi que : $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} e^{\alpha_{2p}-\sqrt{2p}} = \lim\limits_{p\mapsto+\infty}(e^{-\sqrt{2p}}(e^{\beta_{2p}}+1)) = 1$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ e^{\alpha_{2p}-\sqrt{2p}} = e^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p}}$; $\forall p\in\mathbb{N},\ \sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p} = \dfrac{1/2}{\sqrt{2p+1/2}+\sqrt{2p}}$; $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}(\sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p}) = 0$;

$\lim\limits_{p\mapsto+\infty}(e^{\alpha_{2p}-\sqrt{2p}}) = 1$. De même : $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}(\beta_{2p}-\sqrt{2p}) = \lim\limits_{p\mapsto+\infty}(\sqrt{2p+3/4}-\sqrt{2p}) = 0$; donc

$\lim\limits_{p\mapsto+\infty}(e^{-\sqrt{2p}}(e^{\beta_{2p}}+1)) = \lim\limits_{p\mapsto+\infty}(e^{\beta_{2p}-\sqrt{2p}}+e^{-\sqrt{2p}}) = 1+0 = 1$.

Par conséquent, par encadrement : $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} \dfrac{H_{2p}(1)\,e^{1/4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\sqrt{2p}}\,(\frac{2p}{e})^p} = 1$.

Ceci donne : $T_{2p} = H_{2p}(1) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-1/4}\,e^{\sqrt{2p}}\,(\frac{2p}{e})^p$; c'est ce qu'il fallait montrer.

c) $\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-1/4}\,e^{\sqrt{10}}\,(\frac{10}{e})^{10/2} \simeq 8865,94}}$; pour mémoire $T_{10} = 9496$

Q3 .- a) $n = 2p+1$.

$\forall x\in[0,1],\ (\underbrace{2p+1+\tfrac{1}{2}}_{\alpha_{2p+1}})\,U_{2p+1}(x) \leqslant U''_{2p+1}(x) \leqslant (\underbrace{2p+1+\tfrac{3}{4}}_{\beta_{2p+1}})\,U_{2p+1}(x)$.

$\forall x\in[0,1],\ U_{2p+1}(x) = H_{2p+1}(x)\,e^{x^2/4}$ et $U'_{2p+1}(x) = (H'_{2p+1}(x)+\frac{x}{2}H_{2p+1}(x))\,e^{x^2/4}$

U_{2p+1} est C^2 sur $[0,1]$. $U_{2p+1}(0) = 0$ et $U'_{2p+1}(0) = H'_{2p+1}(0) = (2p+1)H_{2p}(0)$

U_{2p+1} est strictement positive sur $]0,1]$ (une récurrence simple donne :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ H_n(x) > 0$ ...).

Le résultat admis donne alors :

$\forall x\in[0,1],\ \dfrac{(2p+1)H_{2p}(0)}{2\,\alpha_{2p+1}}(e^{\alpha_{2p+1}x}-1) \leqslant U_{2p+1}(x) = H_{2p+1}(x)\,e^{x^2/4} \leqslant \dfrac{(2p+1)H_{2p}(0)}{2\,\beta_{2p+1}}\,e^{\beta_{2p+1}x}$

Par conséquent : $A_{2p+1} \leqslant H_{2p+1}(1)\,e^{1/4} \leqslant B_{2p+1}$ avec $A_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)H_{2p}(0)}{2\,\alpha_{2p+1}}(e^{\alpha_{2p+1}}-1)$ et

$B_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)H_{2p}(0)}{2\,\beta_{2p+1}}\,e^{\beta_{2p+1}}$

Donc : $\dfrac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}} \leqslant H_{2p+1}(1)\dfrac{e^{1/4}}{B_{2p+1}} \leqslant 1$. Notons que : $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}\dfrac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}} = 1$ ce qui donnera

par encadrement : $\lim\limits_{p\mapsto+\infty} H_{2p+1}(1)\dfrac{e^{1/4}}{B_{2p+1}} = 1$ c'est à dire : $H_{2p+1}(1) \sim B_{2p+1}\,e^{-1/4}$.

$$\frac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}} = \frac{\beta_{2p+1}}{\alpha_{2p+1}}\,\frac{e^{\alpha_{2p+1}}-1}{e^{\beta_{2p+1}}} = \sqrt{\frac{2p+1+3/4}{2p+1+1/2}}\left(e^{\alpha_{2p+1}-\beta_{2p+1}} - e^{-\beta_{2p+1}}\right) \sim e^{\alpha_{2p+1}-\beta_{2p+1}} - e^{-\beta_{2p+1}}$$

↑ $\lim\limits_{p\to+\infty}\sqrt{\frac{2p+1+3/4}{2p+1+1/2}} = 1$.

$$\alpha_{2p+1}-\beta_{2p+1} = \sqrt{2p+1+1/2}-\sqrt{2p+1+3/4} = \frac{\frac12-\frac34}{\sqrt{2p+1+1/2}+\sqrt{2p+1+3/4}}\ . \quad \lim_{p\to+\infty}(\alpha_{2p+1}-\beta_{2p+1}) = 0$$

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(e^{\alpha_{2p+1}-\beta_{2p+1}} - e^{-\beta_{2p+1}}\right) = 1-0 = 1$. Par conséquent $\frac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}} \sim 1$!

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}} = 1$ ce qui donne : $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(H_{2p+1}(1)\,\frac{e^{3/4}}{B_{2p+1}}\right) = 1$

Finalement $H_{2p+1}(1) \sim e^{-3/4}B_{2p+1} = e^{-3/4}\,\frac{(2p+1)\,H_{2p}(0)}{2\,\beta_{2p+1}}\,e^{\beta_{2p+1}}$

$\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{\sqrt{2p+1}}{\beta_{2p+1}} = \lim\limits_{p\to+\infty}\sqrt{\frac{2p+1}{2p+1+3/4}} = 1$; $\beta_{2p+1}\sim\sqrt{2p+1}$

$\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{e^{\beta_{2p+1}}}{e^{\sqrt{2p+1}}}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(e^{\sqrt{2p+1+3/4}-\sqrt{2p+1}}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty} e^{\frac{3/4}{\sqrt{2p+1+3/4}+\sqrt{2p+1}}} = 1$; $e^{\beta_{2p+1}}\sim e^{\sqrt{2p+1}}$

Donc $H_{2p+1}(1) \sim e^{-3/4}\,\frac{(2p+1)}{2\sqrt{2p+1}}\,e^{\sqrt{2p+1}}H_{2p}(0)$, $H_{2p+1}(1) \sim \frac12 e^{-3/4}\sqrt{2p+1}\,e^{\sqrt{2p+1}}H_{2p}(0)$

$\underline{H_{2p+1}(1) \sim \frac12 e^{-3/4}\sqrt{2p+1}\; e^{\sqrt{2p+1}}\, H_{2p}(0)}$ ... ou : $H_n(1) \sim \frac12 e^{-3/4}\sqrt{n}\,e^{\sqrt n}H_{n-1}(0)$, avec $n = 2p+1$ (aïe !)

b) Il s'agit en fait de prouver que : $T_{2p+1} = H_{2p+1}(1) \sim \frac{1}{\sqrt2}e^{-3/4}e^{\sqrt{2p+1}}\left(\frac{2p+1}{e}\right)^{\frac{2p+1}{2}}$

Nous avons : $H_{2p+1}(1) \sim \frac12 e^{-3/4}\sqrt{2p+1}\,e^{\sqrt{2p+1}}H_{2p}(0) = \frac{1}{\sqrt2}e^{-3/4}e^{\sqrt{2p+1}}\left(\frac{2p+1}{e}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\underbrace{\left[\left(\frac{e}{2p+1}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{2p+1}\,H_{2p}(0)\right]}_{C_{2p+1}}$

Il ne reste donc plus à montrer que : $C_{2p+1} \sim 1$!

$$C_{2p+1} = \frac{(2p+1)^{1/2}}{(2p+1)^{p+1/2}}\,\frac{1}{\sqrt2}\,e^{p+\frac12}H_{2p}(0) \sim \frac{1}{(2p+1)^p}\,e^{p+\frac12-p}\,(2p)^p = e^{1/2}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^p$$

$H_{2p}(0) \sim \sqrt2\left(\frac{2p}{e}\right)^p$ (cf p 7 !)

$p\ln\frac{2p}{2p+1} \sim p\left(\frac{2p}{2p+1}-1\right) = -\frac{p}{2p+1} \sim -\frac12$; $\lim\limits_{p\to+\infty} p\ln\frac{2p}{2p+1} = -\frac12$; $\lim\limits_{p\to+\infty} e^{p\ln\frac{2p}{2p+1}} = e^{-1/2}$; $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^p = e^{-1/2}$

Finalement : $c_{2p+1} \sim e^{1/2}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{p} \sim e^{1/2} e^{-1/2} = 1$.

Par conséquent : $T_{2p+1} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/4} e^{\sqrt{2p+1}} \left(\frac{2p+1}{e}\right)^{\frac{2p+1}{2}}$

La relation (9) vaut encore lorsque n est impair (ici c).

```
program escp93MI;

var k,n:integer;a,b,c:longint;

begin
write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
writeln;

a:=1;b:=2;
writeln('T(1)=',a);writeln('T(2)=',b);

for k:=3 to n do
    begin
    c:=b+(k-1)*a;a:=b;b:=c;
    writeln('T(',k,')=',b);
    end;

end.
```

```
Donnez la valeur de n. n=

T(1)=1
T(2)=2
T(3)=4
T(4)=10
T(5)=26
T(6)=76
T(7)=232
T(8)=764
T(9)=2620
T(10)=9496
T(11)=35696
T(12)=140152
T(13)=568504
T(14)=2390480
T(15)=10349536
```

On peut montrer assez facilement que : $T_{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p}^{2k} \frac{(2p-2k)!}{2^{p-k}(p-k)!}$ et

$$T_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k+1} \frac{(2p-2k)!}{2^{p-k}(p-k)!}.$$